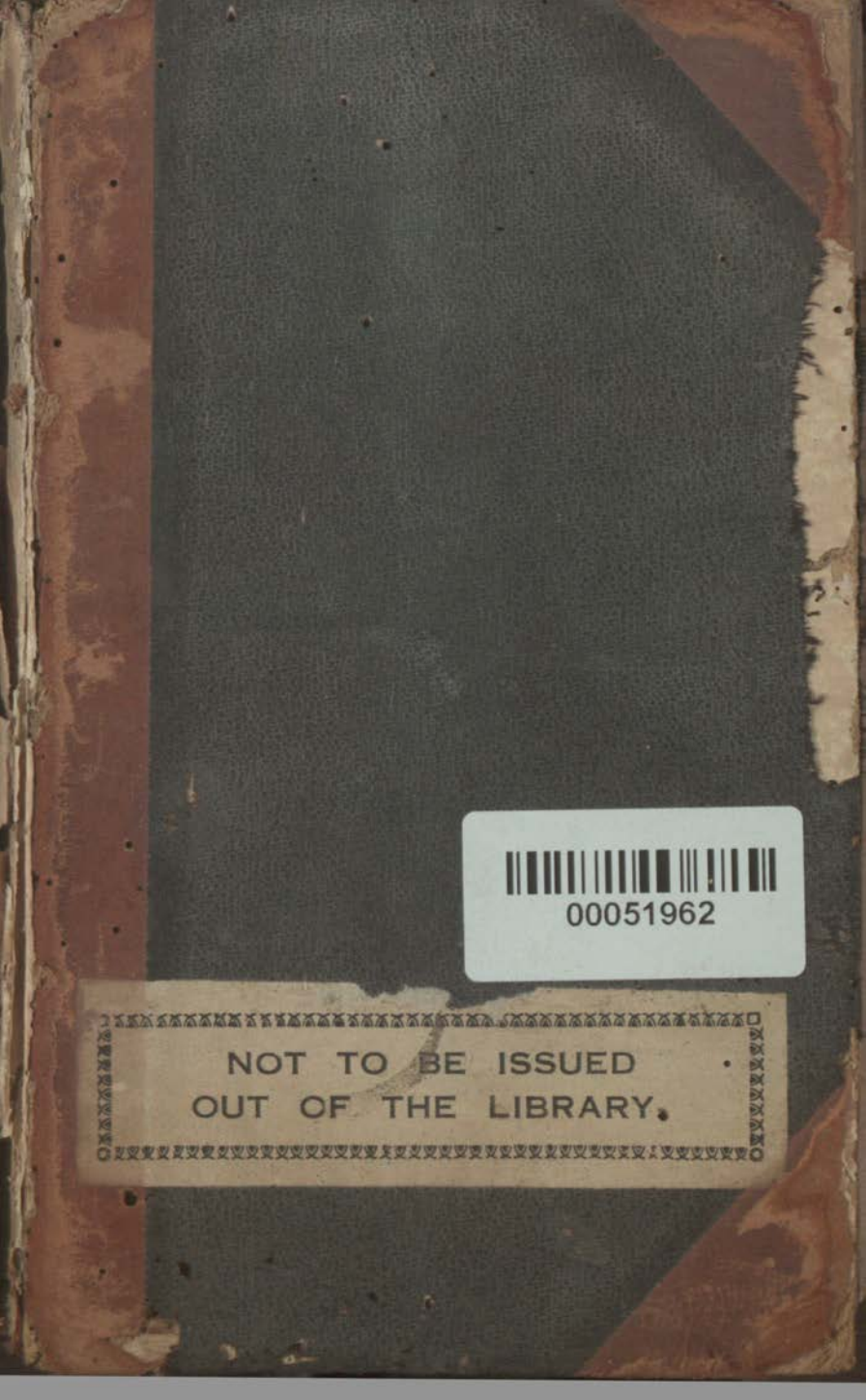

00051962

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

00051962

Digitized with financial assistance from
Shri Brihad Bhartiya Samaj
on 20 February, 2020

Ex.c.l.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE,

PAR BEZOUT.

TROISIÈME PARTIE,

CONTENANT L'ALGÈBRE ET L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE,

AVEC DES NOTES EXPLICATIVES

PAR A.-A.-L. REYNAUD.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ ROYALE.

51962

SEPTIÈME ÉDITION.

510

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
POUR LES MATHÉMATIQUES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1834

God
Fré
510
Bez/Cou
51962

PRÉFACE.

Les connaissances que nous avons exposées dans les deux volumes précédens, servent de base à toutes les parties des Mathématiques, et la méthode que nous avons suivie pour les présenter, peut servir à passer à des vérités plus composées. Mais en réfléchissant sur cette méthode, on a pu remarquer que le nombre des propositions qu'on est obligé de se rappeler pour l'intelligence d'une proposition nouvelle, s'accroît à mesure que celle-ci s'éloigne de l'origine de la chaîne qui les lie les unes aux autres.

Cette manière de procéder à la démonstration ou à la recherche de vérités mathématiques, est sans doute lumineuse; mais elle devient de plus en plus pénible, à mesure que ces vérités s'éloignent davantage des connaissances primitives : elle a d'ailleurs l'inconvénient d'exiger, de la part de l'esprit, de nouvelles ressources, de nouveaux expédiens, à mesure qu'on passe à de nouveaux objets.

Cependant, quelque différens que soient les objets des recherches mathématiques, les raisonnemens et les opérations qu'ils exigent, ont des parties communes qu'on peut ramener à des règles générales, à l'aide desquelles on peut soulager l'esprit d'une grande partie des efforts que chaque nouvelle question semblerait exiger. La méthode qu'on appelle *Analyse*, est celle qui enseigne à trouver ces règles, et l'instrument qu'elle emploie pour y parvenir s'appelle l'*Algèbre*.

L'Algèbre, ou l'art de représenter par des signes généraux toutes les idées qu'on peut se former relativement aux quantités, est, à proprement parler, une langue en laquelle nous traduisons d'abord certaines idées connues; puis, par des règles constantes, nous combinons ces idées, à l'aide des caractères de cette langue; et enfin, interprétant les résultats de ces combinaisons, nous en concluons des vérités que toute autre manière de procéder aurait rendues d'un accès très difficile, et auxquelles même il serait souvent impossible d'atteindre par une autre voie.

Les avantages principaux qu'on peut retirer de cette science, sont donc de faciliter l'intelligence et la découverte des vérités mathématiques, et de se procurer des moyens faciles et des règles générales pour résoudre toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Les méthodes de l'Algèbre ne nous étaient point nécessaires dans les volumes précédens, où les objets étaient simples; mais la synthèse que nous y avons employée, ne peut nous procurer les mêmes ressources pour traiter ceux qui nous restent à parcourir. D'ailleurs, une des choses qu'on doit avoir en vue dans l'étude des Mathématiques, c'est moins d'accumuler un grand nombre de propositions, que d'acquérir l'esprit de recherche et d'invention qui seul peut faire mettre à profit les connaissances que l'on a recueillies; or la manière de procéder, en Algèbre, tend directement à ce but.

L'objet principal que nous nous proposons, en

donnant l'Algèbre dans ce volume-ci, est de nous mettre en état de traiter, dans le suivant, la Mécanique, d'une manière commode et utile. Mais pour tirer de l'Algèbre les avantages qu'elle peut procurer, il faut s'être rendu familier l'usage des différentes opérations qu'elle enseigne, et s'être accoutumé à interpréter les phrases de cette langue : c'est pour cette raison que nous avons renfermé dans ce même volume plusieurs applications de l'Algèbre à l'Arithmétique et à la Géométrie. Nous nous étions proposé d'y faire entrer encore une autre branche de l'Analyse, celle qui regarde les quantités considérées comme variables, ou, du moins, d'en donner ce qui nous serait nécessaire pour quelques applications importantes à la Mécanique; mais une espèce de nécessité de conserver à cette troisième Partie le même caractère d'impression qu'aux deux premières, ne nous permet pas d'exécuter ce projet pour le moment, sans passer de justes bornes.

Les différentes méthodes qu'on a suivies jusqu'ici, pour exposer les principes de l'Algèbre, se réduisent à deux principales. La première consiste à donner les règles des quatre opérations fondamentales, et celles qui conduisent à la résolution des équations du premier degré, par une voie qu'on peut regarder comme synthétique. La seconde, qui est purement analytique, conduit à trouver ces règles, en proposant des questions dont la résolution exige certaines opérations et certains raisonnemens que, par un examen postérieur, on trouve revenir les mêmes dans

toutes les questions, et que par conséquent on érige en règles générales. Cette dernière méthode semblerait d'abord préférable à la première, en ce qu'elle paraît devoir flatter l'amour-propre des commençans, et irriter leur curiosité. Mais si l'on fait réflexion qu'alors l'attention est nécessairement partagée entre trois objets, savoir, l'état de la question, les raisonnemens pour l'exprimer algébriquement, et les opérations qu'il faut faire à l'aide des signes dont la signification échappe d'autant plus aisément qu'on est encore moins exercé à représenter ses idées d'une manière abstraite, il me semble qu'on doutera que cette méthode soit la meilleure, dans les commencemens, pour le plus grand nombre de lecteurs. Ne produirait-elle pas, au contraire, un effet tout opposé à celui que quelques-uns lui attribuent ? Les raisonnemens qu'elle exige, quoique simples dans les commencemens, où, sans doute, on ne traite que des questions faciles; ces raisonnemens, dis-je, devant être tirés du fonds même de celui qui opère, ne l'humilieront-ils pas, lorsqu'ils ne se présenteront pas à lui ? La méthode d'invention suppose toujours une certaine finesse : c'est celle qu'ont dû suivre les inventeurs, et par conséquent celle des hommes de génie; or, ceux-ci ne sont certainement pas le plus grand nombre.

Ce sont ces considérations qui nous ont déterminé à suivre l'autre marche, pour l'exposition des règles fondamentales; mais comme un des objets que nous nous proposons, est de faire acquérir au lecteur

cette méthode d'invention, nous n'avons suivi la première qu'autant qu'il nous a paru nécessaire de le faire, pour que le défaut d'habitude des signes algébriques ne fût plus un obstacle à l'intelligence de ce que nous aurions à présenter.

Nous ne dirons rien de la manière dont les choses sont traitées; ce n'est plus à nous à la juger. Mais nous croyons pouvoir nous arrêter un moment sur quelques-unes des matières que nous avons considérées; elles sont de deux sortes : les unes élémentaires; les autres, au moins pour la plus grande partie, supposent qu'on s'est rendu les premières très familières. Pour les unes et pour les autres, nous avons fait en sorte de ne rien omettre de ce qui peut être utile. Nous avons distingué celles de la seconde sorte par de petits caractères : quelques notes répandues dans l'ouvrage, et qui appartiennent à la partie élémentaire, sont, à la vérité, du même caractère, mais elles sont distinguées par une étoile. Parmi les objets compris sous le petit caractère, nous avons renfermé, entre autres choses, 1°. le Précis d'une méthode qu'on trouvera avec plus d'étendue dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1764, et qui a pour objet l'élimination des inconnues dans les équations : c'est une partie de l'Algèbre, sur laquelle il y a encore bien des choses à faire (*), et qui importe

(*) Depuis la première édition de cet Ouvrage, cette partie de l'Algèbre ne nous paraît plus laisser les mêmes choses à dé-

d'autant plus à la perfection de cette science, que la résolution générale des équations en dépend absolument; 2°. une méthode pour la résolution des équations. Nous ne dirons rien des tentatives qui ont été faites sur cette matière, depuis la naissance de l'Analyse. Nous remarquerons seulement que, jusqu'à nos jours, on n'a pas passé le quatrième degré; on n'a pas même eu une méthode uniforme pour les degrés qu'on sait résoudre. On trouve, à la vérité, dans l'Analyse démontrée du P. Reyneau, un procédé que l'on y donne comme général, et qui est dû à M. Tschirnaüs, qui le publia dans les Actes de Leipsick; mais indépendamment des calculs rebutans et superflus auxquels il donne lieu, il ne réussit, pour le quatrième degré, que par une modification de la règle; et quelques réflexions sur la forme que doivent nécessairement avoir les racines des équations des degrés supérieurs, font bientôt voir qu'il ne peut servir au-delà du quatrième degré. Les bornes que les matières plus nécessaires à notre objet m'ont forcé de donner à l'exposition de la méthode que je propose, m'ont empêché d'entrer dans quelques détails sur son application au cinquième degré et aux degrés supérieurs. Je m'étais même proposé de ne rien publier sur ce sujet, que lorsque, libre d'autres occupations, j'aurais pu y donner la perfection dont je le croyais susceptible; mais

---

sirer. Voyez l'ouvrage qui a pour titre *Théorie générale des Équations*, que nous avons publié en 1779.

M. Euler ayant publié, dans le tome IX des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, qui vient de paraître, une méthode sur la même matière, je donne ici les choses telles que je les ai trouvées d'abord, c'est-à-dire sur la fin de 1761. Au reste, si l'on désire de plus grands détails, on consultera les Mémoires de l'Académie, qui offrent, entre autres choses, une méthode pour les équations dont le degré est marqué par un nombre composé, laquelle simplifie le travail dans ces cas : nous aurions pu l'employer ici pour le quatrième degré; mais dans le dessein où nous étions de faire voir ce que l'on pouvait présumer de l'application de notre méthode aux degrés supérieurs, nous avons préféré d'observer l'uniformité.

Sous le même caractère d'impression sont encore compris beaucoup d'autres objets que nous avons cru devoir traiter, pour ne pas obliger de recourir ailleurs.

Dans la seconde Section, nous nous sommes attaché à faire voir la manière d'appliquer l'Algèbre, d'en traduire les résultats, de les exprimer par lignes. Nous avons tâché de faire bien entendre comment l'Algèbre comprend, dans une même équation, tous les différens cas d'une question; ce que signifient les différentes racines positives, négatives, réelles ou imaginaires.

La connaissance des principales propriétés des sections coniques nous a paru devoir entrer dans notre plan, quelques-unes de ces courbes se ren-

contrant assez souvent dans l'Architecture navale. Enfin, leur usage pour la construction des équations nous y a encore déterminé. Nous avons fait en sorte de présenter ces objets, et plusieurs autres qu'on trouvera dans le cours de l'Ouvrage, de manière qu'ils devinssent le germe de connaissances plus étendues pour ceux qui désireront les acquérir.

DE L'ALGÈBRE.

PREMIÈRE SECTION.

Dans laquelle on donne les principes du calcul des quantités algébriques.

1. Le but de la science qu'on appelle *Algèbre* est de donner les moyens de ramener à des règles générales la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités. Ces règles, pour être générales, ne doivent pas dépendre des valeurs particulières des quantités que l'on considère, mais bien de la nature de chaque question, et doivent être toujours les mêmes pour toutes les questions d'une même espèce. Il suit de là que l'Algèbre ne doit point se borner à employer, pour représenter les quantités, les mêmes caractères ou les mêmes signes que l'Arithmétique. En effet, lorsque par les règles de celle-ci on est parvenu à un résultat, rien ne retrace plus à l'esprit la route qui y a conduit. Qu'une ou plusieurs opérations arithmétiques m'aient donné 12 pour résultat, je ne vois rien dans 12 qui m'indique si ce nombre est venu de la multiplication de 3 par 4, ou de 2 par 6, ou de l'addition de 5 avec 7, ou de 2 avec 10, ou, en général, de toute autre combinaison d'opérations. L'Arithmétique donne des règles pour trouver certains résultats, mais ces résultats ne peuvent pas fournir des règles. L'Algèbre doit remplir ces deux objets, et, pour y parvenir, elle représente les quantités par des signes généraux (ce sont les lettres de l'alphabet), qui, n'ayant aucune relation plus particulière avec un nombre qu'avec tout

autre, ne représentent que ce qu'on veut, ou ce que l'on convient de leur faire représenter. Ces signes, toujours présens aux yeux dans toute la suite d'un calcul, conservent, pour ainsi dire, l'empreinte des opérations par lesquelles ils passent, ou du moins ils offrent dans les résultats de ces opérations, des traces de la route qu'on doit tenir pour arriver au même but par les moyens les plus simples. Nous ne nous attachons point ici à développer davantage cette légère idée que nous donnons de l'Algèbre; la suite de cet Ouvrage y est destinée.

Non-seulement on représente, en Algèbre, les quantités par des signes généraux, on y représente aussi leur manière d'être les unes à l'égard des autres, et les différentes opérations qu'on a dessein de faire sur elles: en un mot, tout est représentation; et lorsqu'on dit qu'on fait une opération, c'est une nouvelle forme qu'on donne à une quantité. A mesure que nous avancerons, nous ferons connaître ces différentes manières de représenter ce qui a rapport aux quantités.

Des opérations fondamentales sur les Quantités considérées généralement.

2. On fait, en Algèbre, sur les quantités représentées par des lettres, des opérations analogues à celles qu'on fait en Arithmétique sur les nombres, c'est-à-dire qu'on les ajoute, on les soustrait, on les multiplie, on les divise, etc.; mais ces opérations diffèrent de celles de l'Arithmétique, en ce que leurs résultats ne sont souvent que des indications d'opérations arithmétiques.

De l'Addition et de la Soustraction.

3. L'addition des quantités semblables n'a besoin d'aucune règle: il est évident que pour ajouter un quantité représentée par a, avec la même quantité a, il faut écrire $2a$. Pour ajouter $2a$ avec $3a$, il faut écrire $5a$, et ainsi de suite.

Quant aux quantités dissemblables, et qu'on représente toujours par des lettres différentes, on ne fait qu'indiquer cette addition, et cela s'indique par le moyen de ce signe $+$, qui

se prononce *plus*. Ainsi, si l'on veut ajouter une quantité représentée par a, avec une autre représentée par b, on ne peut faire autre chose qu'écrire $a+b$; en sorte qu'on ne connaît véritablement le résultat que quand on connaît les valeurs particulières des quantités représentées par a et par b; si a vaut 5, et si b vaut 12, $a+b$ vaudra 17.

Pareillement, pour ajouter $5a+3b$, avec $9a+2c$ et $9b+3d$, on écrira $5a+3b+9a+2c+9b+3d$, et rassemblant les quantités semblables, on aura $14a+12b+2c+3d$.

4. Il y a les mêmes choses à dire sur la soustraction que sur l'addition. Si les quantités sont semblables, on n'a besoin d'aucune règle; il est évident que si de $5a$ on veut retrancher $2a$, il reste $3a$.

Mais si les quantités sont dissemblables, on ne peut qu'indiquer la soustraction; cela s'indique à l'aide de ce signe —, qu'on prononce *moins*. Ainsi si l'on a b à retrancher de a, on écrira $a-b$. Pour retrancher $3b$ de $5a$, on écrira $5a-3b$. Pour retrancher $5a+4b$ de $9a+6b$, on écrira..... $9a+6b-5a-4b$, et faisant déduction des quantités semblables (ce qu'on appelle faire la *réduction*), on a pour reste $4a+2b$. Enfin pour retrancher $5a+3b+4c$ de $6a+4b+4d$, on écrira $6a+4b+4d-5a-3b-4c$, et en réduisant, on aura $a+b+4d-4c$.

5. Un nombre qui précède une lettre s'appelle le *coefficient* de cette lettre; ainsi dans $3b$, 3 est le coefficient de b. Lorsqu'une lettre doit avoir 1 pour coefficient, on ne met point ce coefficient; ainsi lorsque de $3a$ on retranche $2a$, il reste $1a$, on écrit seulement a. Il faut donc bien se garder de croire que le coefficient d'une lettre, lorsqu'il ne paraît point, soit zéro, il est alors l'unité ou 1.

6. Il importe peu dans quel ordre on écrive les quantités qu'on ajoute ou qu'on retranche; si l'on a a à ajouter avec b, on peut indifféremment écrire $a+b$ ou $b+a$; et pour retrancher b de a, on peut écrire également $a-b$ ou $-b+a$. Mais comme on prononce plus aisément les lettres dans l'ordre

alphabétique que dans tout autre, nous suivrons cet ordre autant que nous le pourrons.

7. Remarquons encore que lorsqu'une quantité n'a point de signe, elle est censée avoir le signe +; a est la même chose que $+a$. On est dans l'usage de supprimer le signe dans la quantité qu'on écrit la première, lorsque cette quantité doit avoir le signe +; mais si elle devait avoir le signe —, il ne faudrait pas l'omettre.

8. Lorsque après une opération on procède à la réduction, il peut arriver que l'on ait une quantité à retrancher d'une autre plus petite : alors on retranche la plus petite de la plus grande, et l'on donne au reste le signe de la plus grande. Par exemple, si après avoir ajouté $2a+3b$, avec $5a-7b$, on veut réduire le résultat $2a+3b+5a-7b$, on écrira $7a-4b$, en retranchant $3b$ de $7b$, et donnant au reste $4b$, le signe qu'avait $7b$. En effet, le signe — de $7b$ dans la quantité $5a-7b$ indique que $7b$ doit être retranché; mais si l'on vient à augmenter $5a-7b$ de la quantité $2a+3b$, il est visible que les $3b$ qu'on ajoute, diminuent d'autant la soustraction qu'on avait à faire; il ne doit donc plus y avoir que $4b$ à retrancher; il faut donc qu'il y ait $-4b$ dans le résultat. De là nous conclurons cette règle générale : *L'addition des quantités algébriques se fait en écrivant leurs parties, à la suite les unes des autres, avec leurs signes tels qu'ils sont : on réduit ensuite les quantités semblables à une seule, en rassemblant, d'une part, toutes celles qui ont le signe +, et, d'une autre part, toutes celles qui ont le signe —; enfin on retranche le plus petit résultat du plus grand, et on donne au reste le signe qu'avait le plus grand.*

Exemple. On veut ajouter les quatre quantités :

$$\begin{array}{r} 5a+3b-4c \\ 2a-5b+6c+2d \\ a-4b-2c+3e \\ 7a+4b-3c-6e \end{array}$$

Somme... $\left\{ \begin{array}{l} 5a+3b-4c+2a-5b+6c+2d+a-4b \\ \quad -2c+3e+7a+4b-3c-6e. \end{array} \right.$

Faisant la réduction, j'ai pour les a, $15a$; pour les b, j'ai

$+7b$ d'une part, et $-9b$ de l'autre, et par conséquent $-2b$ pour reste ; pour les c, j'ai $-9c$ d'une part, et $+6c$ de l'autre, et par conséquent $-3c$ pour reste; réduisant les autres de même, on trouve enfin $15a-2b-3c+2d-3e$.

9 Les quantités séparées par les signes $+$ et $-$ s'appellent les *termes* des quantités dont elles font parties.

10. Une quantité est appelée *monome, binome, trinome,* etc., selon qu'elle est composée de 1, ou de 2, ou de 3, etc., termes ; et une quantité composée de plusieurs termes dont on ne définit pas le nombre s'appelle en général un *polynome.*

11. A l'égard de la soustraction des quantités algébriques, voici la règle générale : *Changez les signes des termes de la quantité que vous devez soustraire, c'est-à-dire changez $+$ en $-$, et $-$ en $+$; ajoutez ensuite cette quantité, ainsi changée, avec celle dont on doit soustraire, et réduisez.*

Exemple. De $6a-3b+4c$, on veut retrancher la quantité $5a-5b+6c$. A la suite de $6a-3b+4c$, j'écris $-5a+5b-6c$, qui est la seconde quantité, dans laquelle on a changé les signes, et j'ai $6a-3b+4c-5a+5b-6c$, et en réduisant, $a+2b-2c$, pour reste. Pour rendre raison de cette règle, prenons un exemple, plus simple. Supposons que de a on veuille retrancher b; il est évident qu'on doit écrire $a-b$; mais si de a on voulait retrancher $b-c$, je dis qu'il faudrait écrire $a-b+c$; en effet, il est clair qu'ici ce n'est pas b tout entier qu'il s'agit de retrancher, mais seulement b diminué de c ; si donc on retranche d'abord b tout entier en écrivant $a-b$, il faut ensuite, pour compenser, ajouter ce qu'on a ôté de trop; il faut donc ajouter c; il faut donc écrire $a-b+c$, c'est-à-dire qu'il faut changer les signes de tous les termes de la quantité qu'on doit soustraire.

Dans les nombres, cette attention n'est pas nécessaire, parce que si l'on avait $8-3$, par exemple, à retrancher de 12, on commencerait par diminuer 8 de 3, ce qui donnerait 5, qu'on retrancherait de 12, et on aurait 7 pour reste; mais on voit aussi qu'on pourrait retrancher d'abord 8 de 12, et au reste 4, ajouter 3, ce qui donnerait également 7; or, c'est ce dernier parti qu'on prend, et qu'il faut prendre nécessairement en

Algèbre, parce qu'on ne peut faire la réduction préliminaire comme sur les nombres.

12. Les quantités précédées du signe + se nomment quantités *positives*, et celles qui sont précédées du signe — se nomment quantités *négatives*. Nous entrerons, par la suite, dans quelque détail sur la nature et les usages de ces quantités, considérées séparement l'une de l'autre.

De la Multiplication.

13. La multiplication algébrique exige quelques considérations qui lui sont particulières, et qui n'ont pas lieu dans la multiplication arithmétique. Indépendamment des quantités, il y a encore les signes à considérer. Au reste, à ne considérer que les valeurs numériques des quantités représentées par les lettres, on doit se former de la multiplication algébrique la même idée que de la multiplication arithmétique (*Arith.* 40); ainsi, multiplier a par b, c'est prendre la quantité représentée par a, autant de fois qu'il y a d'unités dans la quantité représentée par b.

14. Mais comme l'objet est ici de faire ou de représenter la multiplication indépendamment des valeurs numériques des quantités, il faut convenir des signes par lesquels nous indiquerons cette multiplication. On fait souvent usage de ce signe $\times$, qui signifie *multiplié par;* en sorte que $a \times b$ signifie a multiplié par b, ou que l'on doit multiplier a par b. On fait aussi usage du point, que l'on interpose entre les deux quantités qu'on doit multiplier; en sorte que $a.b$ et $a \times b$ signifient la même chose. Enfin on indique encore la multiplication (du moins entre les quantités monomes), en ne mettant aucun signe entre le multiplicande et le multiplicateur; ainsi $a \times b$, $a.b$, ab sont trois expressions dont chacune désigne qu'on doit multiplier a par b. Cette dernière est la plus usitée.

15. Pour multiplier ab par c, on écrira donc abc. Pour multiplier ab par cd, on écrira $abcd$, et ainsi de suite: il importe peu d'ailleurs dans quel ordre ces lettres soient écrites,

parce que (*Arith.* 44) le produit est toujours le même dans quelque ordre qu'on multiplie.

16. Lors donc qu'à l'avenir nous rencontrerons une quantité comme *ab*, ou *abc*, ou *abcd*, etc., dans laquelle plusieurs lettres se trouveront écrites de suite sans aucun signe, nous en conclurons que cette quantité représente le produit de la multiplication successive de chacune des lettres qui la composent.

17. Nous avons nommé (*Arith.* 42) *facteur* d'un produit, tout nombre qui, par la multiplication, a concouru à former ce produit; ainsi dans *ab*, *a* et *b* sont les facteurs; dans *abc*, les facteurs sont *a*, *b*, *c*, et ainsi de suite.

18. Il suit de la règle que nous venons de donner (15), que *le produit de la multiplication de plusieurs quantités algébriques monomes, doit renfermer toutes les lettres qui se trouvent tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.* Cela posé, si les quantités qu'on doit multiplier étaient composées de la même lettre, cette lettre se trouverait donc écrite dans le produit autant de fois qu'elle l'est dans tous les facteurs ensemble, quel que soit le nombre des quantités qu'on ait à multiplier: ainsi *a* multiplié par *a* donnerait *aa*; *aa* multiplié par *aaa* donnerait *aaaaa* (*aa* multiplié par *aaa* et multiplié encore par *a* donnerait *aaaaaa*.

19. Dans ce cas, on est convenu de n'écrire cette lettre qu'une seule fois, mais de marquer par un chiffre qu'on appelle *exposant*, et qu'on place sur la droite et un peu au-dessus de la lettre, combien de fois cette lettre est facteur, ou combien de fois elle doit être écrite. Au lieu de *aa*, on écrira donc a^2; au lieu de *aaa*, on écrira a^3; au lieu de *aaaaa* on écrira a^5, et ainsi des autres. Souvenons-nous donc à l'avenir que *l'exposant d'une lettre marque combien de fois cette lettre est facteur dans un produit.* Dans a^3b^2c il y a trois facteurs de valeur différente, savoir *a*, *b*, *c*: mais de ces lettres, la première est facteur trois fois, la seconde deux fois, et la troisième une fois: en effet, a^3b^2c équivaut à *aaabbc*.

Il faut donc bien se garder de confondre l'exposant avec le coefficient; de confondre, par exemple, a^2 avec $2a$, a^3 avec $3a$: dans $2a$, le coefficient 2 marque que a est ajouté avec a, c'est-à-dire que $2a$ équivaut à $a+a$; mais dans a^2, l'exposant 2 marque que la lettre a devrait être écrite deux fois de suite sans aucun signe, qu'elle est multipliée par elle-même, ou enfin qu'elle est facteur deux fois, c'est-à-dire que a^2 équivaut à $a \times a$; en sorte que si a vaut 5, par exemple, $2a$ vaut 10; mais a^2 vaut 25.

20. On voit donc que *pour multiplier deux quantités monomes qui auraient des lettres communes, on peut abréger l'opération, en ajoutant tout de suite les exposans des lettres semblables du multiplicande et du multiplicateur.* Ainsi pour multiplier a^5 par a^3, j'écris a^8, c'est-à-dire que j'écris la lettre a en lui donnant pour exposant les deux exposans 5 et 3 réunis. De même pour multiplier a^3b^2c par a^4b^3cd, j'écris $a^7b^5c^2d$, en écrivant d'abord toutes les lettres différentes $abcd$, et donnant ensuite à la première pour exposant 7, qui est la somme des exposans 3 et 4; à la seconde, 5, qui est la somme des exposans 2 et 3; et à la troisième, 2, qui est la somme des exposans 1 et 1; car quoique l'exposant de c ne soit pas marqué, on doit néanmoins sous-entendre qu'il est 1, puisque c est facteur une fois; donc *toute lettre dont l'exposant n'est point écrit, est censée avoir 1 pour exposant; et réciproquement toutes les fois qu'une lettre devra avoir 1 pour exposant, on peut se dispenser d'écrire cet exposant.* Telle est la règle pour les lettres dans les quantités monomes.

21. Quand les quantités monomes sont précédées d'un chiffre, c'est-à-dire d'un coefficient, il faut commencer la multiplication par ce coefficient, et cette multiplication se fait suivant les règles de l'Arithmétique; ainsi pour multiplier $5a$ par $3b$, je multiplie d'abord 5 par 3, puis a par b, et je trouve $15ab$ pour produit. Pareillement, si j'ai $12a^3b^2$ à multiplier par $9a^4b^3$, j'aurai $108a^7b^5$.

Nous avons dit, en Arithmétique, qu'une quantité était

élevée à la première, seconde, troisième, etc., puissance, ou au premier, second, troisième, etc., degré, selon qu'elle était facteur 1, 2, 3, etc., fois; donc une lettre qui a pour exposant 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc., est censée élevée à la première, ou à la seconde, ou à la troisième, etc., puissance; ainsi a^2 est la seconde puissance ou le carré de a, a^3 est le cube ou la troisième puissance de a, ainsi de suite.

22. Ces principes posés, venons à la multiplication des quantités complexes. Il faut, pour cette multiplication, suivre le même procédé qu'on suit en Arithmétique pour les nombres qui ont plusieurs chiffres, c'est-à-dire qu'il faut multiplier successivement chacun des termes du multiplicande, par chacun des termes du multiplicateur, et cela en observant les règles que nous venons de donner pour les monomes. On n'est point assujetti, comme en Arithmétique, à opérer en allant de droite à gauche plutôt que de gauche à droite; cela est indifférent; nous prendrons même ce dernier parti qui est le plus en usage.

Ier Exemple. On propose de multiplier $a + b$

par..... c

Produit..... $ac + bc$.

1°. Je multiplie a par c, ce qui (15) me donne ac. Je multiplie b par c, ce qui me donne bc; j'ajoute ce second produit au premier, en les unissant par le signe $+$, et j'ai $ac + bc$ pour produit total. S'il y avait un second terme au multiplicateur, je multiplierais actuellement par ce second terme, et j'ajouterais ce second produit au premier.

IIe Exemple. Si j'avais..... $a + b$

à multiplier par $c + d$

Produit... $ac + bc + ad + bd$.

Après avoir multiplié a et b par c, ce qui donne $ac + bc$, je multiplierais aussi a et b par d, ce qui me donnerait $ad + bd$, qui, joint au premier produit, donne $ac + bc + ad + bd$. En effet, multiplier $a + b$ par $c + d$, c'est prendre non-seulement a, mais encore b, autant de fois qu'il y a d'unités dans

la totalité de $c+d$, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans c, plus autant de fois qu'il y a d'unités dans d.

IIIe Exemple. On propose de multiplier $a-b$

par..... c

Produit..... $ac-bc$.

Après avoir multiplié a par c, ce qui donne ac, je multiplie b par c, ce qui donne bc; mais au lieu d'ajouter ce dernier produit au premier, je l'en retranche, parce qu'ici ce n'est point la somme des deux quantités a et b qu'il s'agit de multiplier, mais seulement leur différence, puisque $a-b$ signifie qu'on doit retrancher b de a; or, si l'on multiplie a tout entier, ainsi qu'on le fait par la première opération, il est visible qu'on y multiplie de trop la quantité b dont a devait être diminué; il faut donc ôter de ce produit la quantité b multipliée par c, c'est-à-dire ôter bc.

Dans les nombres, cette attention n'est pas nécessaire, parce qu'avant de faire la multiplication, on ferait la soustraction qui est indiquée ici dans le multiplicande. Si l'on avait, par exemple, 8—3 à multiplier par 4, on réduirait tout de suite le multiplicande 8—3 à 5, que l'on multiplierait ensuite par 4. Mais on voit aussi qu'on viendrait également au même résultat en multipliant d'abord 8 par 4, ce qui donnerait 32, puis 3 par 4, ce qui donnerait 12; et retranchant ce dernier produit du premier, on aurait 20, comme par la première voie; or, cette seconde manière, qu'il serait peut-être ridicule d'employer pour les nombres, devient indispensable pour les quantités littérales, puisque dans celles-ci la soustraction préliminaire ne peut avoir lieu.

IVe Exemple. On propose de multiplier $a-b$

par..... $c-d$

Produit... $ac-bc-ad+bd$.

On multipliera d'abord $a-b$ par c, ce qui donnera $ac-bc$, on multipliera ensuite $a-b$ par d, ce qui donnera $ad-bd$; enfin on retranchera ce second produit $ad-bd$ du premier,

et (11) on aura $ac-bc-ad+bd$ pour produit total. En effet, puisque le multiplicateur est moindre que c, de la quantité d, il marque qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'autant de fois qu'il y a d'unités dans c diminué de d; or, comme on ne peut faire cette diminution avant la multiplication, on peut prendre d'abord $a-b$ autant de fois qu'il y a d'unités dans c, c'est-à-dire multiplier $a-b$ par c, puis en retrancher $a-b$ pris autant de fois qu'il y a d'unités dans d, c'est-à-dire en retrancher le produit de $a-b$ par d.

23. Si l'on fait attention aux signes des termes qui composent le produit total $ac-bc-ad+bd$, et qu'on les compare avec les signes des termes du multiplicande et du multiplicateur qui les ont donnés, on observera, 1°. que le terme a, qui est censé avoir le signe $+$, étant multiplié par le terme c, qui est censé aussi avoir le signe $+$, a donné pour produit ac, qui est censé avoir le signe $+$; 2°. que le terme b, qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme c, qui est censé avoir le signe $+$, a donné pour produit bc avec le signe $-$; 3°. que le terme a, qui a le signe $+$, multiplié par le terme d, qui a le signe $-$, a donné pour produit ad avec le signe $-$; 4°. enfin que le terme b, qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme d, qui a aussi le signe $-$, a donné pour produit le terme bd, qui a le signe $+$.

Donc à l'avenir nous pourrons reconnaître facilement dans les multiplications partielles, si les produits particuliers doivent être ajoutés ou retranchés; il suffira pour cela d'observer les deux règles suivantes que nous fournissent les observations que nous venons de faire.

24. *Si les deux termes que l'on doit multiplier l'un par l'autre, ont tous deux le même signe, c'est-à-dire ou tous deux* $+$, *ou tous deux* $-$, *leur produit aura toujours le signe* $+$. *Si, au contraire, ils ont différens signes, c'est-à-dire l'un* $+$ *et l'autre* $-$, *ou l'un* $-$ *et l'autre* $+$, *leur produit aura toujours le signe* $-$. A l'aide de ces règles et de celles que nous avons données (15, 20, 21 et 22), on est en état de faire toute multiplication algébrique. Mais pour procéder avec méthode,

on observera d'abord la règle des signes, puis celles des lettres et des exposans.

Terminons par un exemple où toutes ces règles soient appliquées.

V^e *Ex.* On propose de multiplier $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

par..... $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{r} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ +10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{array}$$

Produit $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Je multiplie successivement les trois termes..... $5a^4, -2a^3b, +4a^2b^2$, par le premier terme a^3 du multiplicateur. Les deux termes $5a^4$ et a^3 ayant le même signe, le produit doit (24) avoir le signe +; mais (7) j'omets ce signe, parce qu'il appartient au premier terme du produit. Je multiplie ensuite le coefficient 5 de a^4 par le coefficient 1 de a^3 (21), ce qui me donne 5; enfin, multipliant a^4 par a^3, selon la règle donnée (20), c'est-à-dire ajoutant les deux exposans 4 et 3, j'ai a^7, et par conséquent $5a^7$ pour produit. Je passe au terme $-2a^3b$, et, pour le multiplier par a^3, je vois que les signes de ces deux quantités étant différens, le produit doit avoir le signe —; je multiplie ensuite le coefficient 2 de a^3b par le coefficient 1 de a^3, et enfin a^3b par a^3, et j'ai $-2a^6b$ pour produit. Par un procédé semblable, le terme $+4a^2b^2$ multiplié par a^3 donnera $+4a^5b^2$. Après avoir multiplié tous les termes du multiplicande par a^3, il faut les multiplier par le second terme $-4a^2b$ du multiplicateur. Le terme $5a^4$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent, donnera $-20a^6b$, le terme $-2a^3b$ multiplié par $-4a^2b$ de même signe, donnera $+8a^5b^2$, et le terme $+4a^2b^2$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent, donnera $-16a^4b^3$. Enfin, on passera à la multiplication par le terme $+2b^3$, et, en suivant les mêmes règles, on trouvera $+10a^4b^3, -4a^3b^4, +8a^2b^5$ pour les trois produits partiels. Faisant attention que parmi tous les différens produits partiels qu'on

vient de trouver, il y a des termes semblables, c'est-à-dire composés des mêmes lettres avec les mêmes exposans, on fera la réduction en réunissant ceux qui ont le même signe et déduisant ceux qui ont des signes contraires, ce qui donnera enfin $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ pour produit total.

25. Comme il importe de se familiariser avec la pratique de cette règle, nous joignons ici, pour exercer les commençans, une table qui renferme plusieurs exemples. Nous ajouterons en même temps quelques remarques sur quelques-uns de ces exemples.

Dans le premier, on a multiplié $a+b$ qui représente généralement la somme de deux quantités, par $a-b$ qui représente généralement leur différence, et l'on trouve pour produit a^2-b^2, qui est la différence du carré de la première au carré de la seconde, ou la différence des carrés de ces deux quantités. On peut donc dire généralement que *la somme de deux quantités, multipliée par leur différence, donne toujours pour produit la différence des carrés de ces mêmes quantités.* Que l'on prenne deux nombres quelconques, 5 et 3, par exemple; leur somme est 8 et leur différence 2, lesquelles multipliées l'une par l'autre, donnent 16, qui est en effet la différence du carré de 5 au carré de 3, c'est-à-dire de 25 à 9. Et réciproquement, *la différence des carrés de deux quantités peut toujours être considérée comme formée par la multiplication de la somme de ces deux quantités par leur différence.* Ainsi, la quantité b^2-c^2, qui est la différence du carré de b au carré de c, vient de la multiplication de $b+c$ par $b-c$. Ces deux propositions nous seront utiles par la suite. On peut déjà remarquer en passant un des usages de l'Algèbre, pour découvrir des vérités générales.

Le second exemple fait voir, d'une manière générale et simple, ce que nous avons dit en Arithmétique sur la composition du carré, savoir, que *le carré de la somme* $a+b$ *de deux quantités, est composé du carré* a^2 *de la première, du double* $2ab$ *de la première multipliée par la seconde, et du carré* b^2 *de la seconde.*

Le troisième exemple confirme ce que nous avons dit aussi en Arithmétique sur la formation du cube. On y voit.... $a^2+2ab+b^2$, carré de $a+b$, qui, après avoir été multiplié par $a+b$, donne $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, dont le premier terme est le cube de a, le second, qui est le même que $3a^2\times b$, est le triple du carré de a, multiplié par b: on voit de même que $3ab^2$ est le triple de a multiplié par le carré de b; et enfin b^3 est le cube de b.

26. Pour indiquer la multiplication entre deux quantités complexes, on est dans l'usage de renfermer chacune de ces deux quantités entre deux crochets, et d'interposer entre elles l'un des signes de multiplication dont nous avons parlé plus haut (14); quelquefois même on n'interpose aucun signe; ainsi pour marquer que la totalité de la quantité $a^2+3ab+b^2$ doit être multipliée par la totalité de $2a+3b$, on écrit $(a^2+3ab+b^2)\times(2a+3b)$, ou $(a^2+3ab+b^2).(2a+3b)$, ou simplement $(a^2+3ab+b^2)(2a+3b)$.

27. Il y a beaucoup de cas où il est plus avantageux d'indiquer la multiplication que de l'exécuter. On ne peut donner de règles générales sur ce sujet, parce que cela dépend des circonstances qui donnent lieu à ces opérations: nous verrons par la suite plusieurs de ces cas. C'est principalement par l'usage qu'on apprend à les distinguer. On peut cependant dire assez généralement, qu'il convient de se contenter d'indiquer les multiplications, lorsque celles-ci doivent être suivies de la division; parce que cette dernière opération s'exécutant souvent, ainsi qu'on va le voir, par la seule suppression des facteurs communs au dividende et au diviseur, on distingue plus facilement ces facteurs communs, lorsqu'on n'a fait qu'indiquer la multiplication.

De la Division.

28. La manière de faire cette opération en Algèbre dépend beaucoup des signes que nous sommes convenus d'employer pour la multiplication. L'objet en est d'ailleurs le même qu'en Arithmétique.

29. Lorsque la quantité qu'on proposera à diviser n'aura aucune lettre commune avec le diviseur, alors il n'est pas possible d'exécuter l'opération; on ne peut que l'indiquer, et cela se fait en écrivant le diviseur au-dessous du dividende, en forme de fraction, et séparant l'un de l'autre par un trait; ainsi pour marquer qu'on doit diviser a par b, on écrit $\frac{a}{b}$, et l'on prononce a divisé par b; pour marquer qu'on doit diviser $aa+bb$ par $c+d$, on écrit $\frac{aa+bb}{c+d}$.

30. Lorsque le dividende et le diviseur sont monomes, si toutes les lettres qui se trouvent dans le diviseur se trouvent aussi dans le dividende, la division peut être faite exactement, et on l'exécutera en suivant cette règle : *Supprimez dans le dividende toutes les lettres qui lui sont communes avec le diviseur, les lettres qui resteront composeront le quotient.* Ainsi pour diviser ab par a, je supprime a dans le dividende ab, et j'ai b pour quotient. Pour diviser abc par ab, je supprime ab dans le dividende, et j'ai c pour quotient. En effet, puisque (15) les lettres écrites sans aucun signe interposé, sont les facteurs de la quantité dans laquelle elles entrent, les lettres du diviseur, qui sont communes au dividende, sont donc facteurs de ce dividende; or nous avons vu (*Arith.* 69) que lorsqu'on divise un produit par un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur; donc le quotient doit être composé des lettres du dividende, qui ne sont point communes entre celui-ci et le diviseur.

31. Il suit de là que lorsqu'il y aura des exposans, la règle qu'on doit suivre est de *retrancher l'exposant de chaque lettre du diviseur, de l'exposant de pareille lettre du dividende;* ainsi pour diviser a^3 par a^2, je retranche 2 de 3, il me reste 1, et par conséquent j'ai a^1 ou a pour quotient. De même ayant à diviser $a^4b^3c^2$ par a^2bc, j'aurai a^2b^2c. En effet, $\frac{a^3}{a^2}$ est la même chose que $\frac{aaa}{aa}$, qui, selon la règle donnée (30), se réduit à a, en ôtant les lettres communes au dividende et au divi-

seur. En général, puisque le quotient ne doit avoir que les lettres qui ne sont point communes au dividende et au diviseur, l'exposant de chaque lettre du quotient ne doit donc être que la différence entre les exposans de cette lettre dans le dividende et dans le diviseur.

32. Donc si une lettre a le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, elle aura zéro pour exposant dans le quotient; ainsi a^3 divisé par a^3 donne a^0; a^7bc^4 divisé par a^5bc^4, donne $a^1b^0c^0$, ou ab^0c^0. Dans ce cas, on peut se dispenser d'écrire les lettres qui ont 0 pour exposant; car chacune d'elles n'est autre chose que l'unité. En effet, lorsqu'on divise a^3 par a^3, on cherche combien de fois a^3 contient a^3; or il le contient évidemment 1 fois; le quotient doit donc être 1: d'un autre côté a^3 divisé par a^3 donne pour quotient a^0; donc a^0 vaut 1. En général, *toute quantité qui a zéro pour exposant vaut* 1.

33. Si quelques lettres du diviseur ne sont pas communes au dividende, ou si quelques-uns des exposans du diviseur sont plus grands que ceux de pareilles lettres du dividende, alors la division ne peut être faite exactement : on ne peut que l'indiquer, comme il a été dit ci-dessus (29). Mais on peut simplifier le quotient ou la quantité fractionnaire qui le représente alors. La règle qu'il faut suivre pour cela est de supprimer dans le dividende et dans le diviseur les lettres qui leur sont communes; en sorte que s'il y a des exposans, on efface la lettre qui a le plus petit exposant, et l'on diminue de pareille quantité le plus grand exposant de la même lettre. Par exemple, si l'on propose de diviser a^5bc^3 par $a^2b^3c^4$, on écrira $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$, que l'on réduira en cette manière : on effacera a^2 dans le diviseur, et l'on écrira seulement a^3 dans le dividende; on effacera b dans le dividende, et l'on écrira seulement b^2 dans le diviseur; enfin on effacera c^3 dans le dividende, et l'on écrira seulement c dans le diviseur, en sorte qu'on aura $\frac{a^3}{b^2c}$.

On trouvera de même que $\frac{a^7b^5c^3}{a^4bc^3d}$ se réduit à $\frac{b^4c}{ad}$.

Si, par ces opérations, il ne restait plus aucune lettre dans le dividende, il faudrait écrire l'unité; ainsi $\frac{a^2}{a^3}$ se réduira à $\frac{1}{a}$.

La raison de ces règles est facile à saisir après tout ce qui a été dit ci-dessus; car supprimer, ainsi qu'on le prescrit, le même nombre de lettres dans le dividende et dans le diviseur, c'est diviser, par une même quantité, chacun des deux termes de la fraction qui exprime le quotient : or cette opération (*Arith.* 89) n'en change point la valeur et simplifie la fraction.

34. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coefficient que peuvent avoir le dividende ou le diviseur, ou tous les deux. La règle qu'on doit suivre à leur égard est de les diviser comme en Arithmétique, et si la division ne peut pas être faite exactement, on les laisse sous la forme de fraction, que l'on réduit à sa plus simple expression (*Arith.* 92), lorsque cela est possible. Par exemple, ayant à diviser $8a^3b$ par $4a^2b$, je divise 8 par 4, et j'ai pour quotient 2; divisant ensuite a^3b par a^2b, j'ai pour quotient a, et par conséquent $2a$ pour quotient total. Ayant à diviser $8a^3b^2$ par $6ab$, j'écris $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, que je réduis à $\frac{4a^2b}{3}$.

35. La règle que nous venons de donner (33) est générale, soit que le dividende et le diviseur soient monomes, soit qu'ils soient complexes ou polynomes, pourvu que dans ce dernier cas les lettres communes au dividende et au diviseur soient en même temps communes à tous les termes séparés par les signes + et −. C'est ainsi qu'ayant $a^5+4a^4b-5a^2b^3$ à diviser par a^3-5a^2b, on réduira le quotient $\frac{a^5+4a^4b-5a^2b^3}{a^3-5a^2b}$ à la quantité $\frac{a^3+4a^2b-5b^3}{a-5b}$ en supprimant a^2 qui est facteur commun de tous les termes du dividende et du diviseur.

36. Si le dividende et le diviseur sont complexes, on ne peut donner de règles générales pour reconnaître, par l'inspection seule, si la division peut ou ne peut pas être faite exactement. Il faut, pour s'en assurer et trouver en même temps le quotient, faire l'opération que nous allons enseigner. 1°. Disposer, sur une même ligne, le dividende et le diviseur, et *ordonner* leurs

termes par rapport à une même lettre commune à l'un et à l'autre; c'est-à-dire écrire, par ordre de grandeur, les termes où cette lettre a des exposans consécutivement plus petits. 2°. Cette disposition faite, on sépare le dividende du diviseur par un trait, et l'on procède à la division en prenant seulement le premier terme du dividende, que l'on divise, suivant les règles données ci-dessus (30, 31 et 34), par le premier terme du diviseur, et l'on écrit le quotient sous le diviseur. 3°. On multiplie successivement tous les termes du diviseur par le quotient qu'on vient de trouver, et l'on porte les produits sous le dividende, en observant de changer leur signe. 4°. On souligne le tout, et après avoir fait la réduction des termes semblables, on écrit le reste au-dessous pour commencer une seconde division de la même manière, en prenant pour premier terme celui des termes restans qui a le plus fort exposant.

Sur quoi il faut remarquer qu'ici, comme dans la multiplication, on doit avoir égard aux signes du terme du dividende et du terme du diviseur que l'on emploie: la règle est la même que pour la multiplication, c'est-à-dire que *si le dividende et le diviseur ont le même signe, le quotient aura le signe +; si, au contraire, ils ont différens signes, le quotient aura le signe —*. Cette règle, pour les signes, est fondée sur ce que (*Arith.* 74), le quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende. Il faut donc que le quotient ait des signes tels qu'en le multipliant par le diviseur, on reproduise le dividende avec les mêmes signes; or, cette condition entraîne nécessairement la règle que nous venons de donner. Pour procéder avec ordre, on commencera par les signes, puis on divisera le coefficient, enfin les lettres.

Exemple. On propose de diviser $aa - bb$ par $b + a$.

J'ordonne le dividende et le diviseur par rapport à l'une ou à l'autre des deux lettres a et b, par rapport à a, par exemple, et je les écris comme on le voit ici :

Dividende.....	$aa - bb$ |	$a + b$ Diviseur.
	$- aa - ab$ |	$a - b$ Quotient.
Reste.....	$- ab - bb$	
	$+ ab + bb$	
Reste.....	.....	o.

Le signe du premier terme aa du dividende étant le même que celui de a premier terme du diviseur, je dois mettre $+$ au quotient; mais comme c'est le premier terme, je puis omettre le signe $+$. Je divise aa par a, j'ai pour quotient a, que j'écris sous le diviseur. Je multiplie successivement les deux termes a et b du diviseur, par le premier terme a du quotient, et j'écris les produits aa et ab sous le dividende, avec le signe $-$, contraire à celui qu'a donné la multiplication, parce que ces produits doivent être retranchés du dividende. Je fais la réduction en effaçant les deux termes aa et $- aa$ qui se détruisent; il me reste $- ab$ qui, avec la partie restante $- bb$ du dividende, compose ce qui me reste à diviser. Je continue la division en prenant $- ab$ pour premier terme de mon nouveau dividende. Divisant $- ab$ par a, j'écris $-$ au quotient, parce que les signes du dividende et du diviseur sont différens. Quant aux lettres, je trouve b pour quotient, et je l'écris à la suite du premier quotient. Je multiplie les deux termes a et b du diviseur par le terme $- b$ du quotient; les deux produits sont $- ab$ et $- bb$; je change leurs signes et j'écris $+ ab$, $+ bb$ sous les parties restantes du dividende. Je fais la réduction en effaçant les parties semblables et de signes contraires: comme il ne reste rien, j'en conclus que le quotient est $a - b$.

On aurait pu également ordonner le dividende et le diviseur par rapport à la lettre b, et alors on aurait eu $- bb + aa$ à diviser par $b + a$; ce qui, en opérant de la même manière, aurait donné $- b + a$ pour quotient, quantité qui est la même que $a - b$. Avant de passer à l'exemple qui suit, il est à propos que les commençans s'exercent sur les exemples de la table ci-jointe.

37. Si, après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre, il se trouvait plusieurs termes dans lesquels cette lettre eût le même exposant, on disposerait ceux-ci dans une même colonne verticale, comme on le voit dans l'exemple suivant; et dans cette disposition on observerait d'ordonner tous les termes de chaque colonne par rapport à une même lettre.

Exemple. On propose de diviser..... $19a^2b^2 + 13a^3b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$, par $-3ab - 5a^2 + bb$. J'ordonne le dividende et le diviseur par rapport à la lettre a, ce qui me donne..... $-20a^4 + 13a^3b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc - 5ab^3 + 2ab^2c$ à diviser par $-5a^2 - 3ab + bb$; mais comme il y a deux termes affectés de a^3, deux termes affectés de a^2, et deux termes affectés de a, je les dispose comme on le voit ici, en ordonnant à chaque colonne par rapport à la lettre b.

$$
\begin{array}{l|l}
\text{Div.}\left\{\begin{array}{l} -20a^4 + 13a^3b + 19a^2b^2 - 5ab^3 \\ \qquad\quad -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \end{array}\right. & \begin{array}{l} -5a^2 - 3ab + bb \text{ Div.} \\ \hline 4a^2 - 5ab + 2ac \text{ Quot.} \end{array} \\
\quad +20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2 & \\
\hline
\text{Reste...}\left\{\begin{array}{l} +25a^3b + 15a^2b^2 - 5ab^3 \\ -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \end{array}\right. & \\
\qquad -25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3 & \\
\hline
\text{Reste...}\quad -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c & \\
\qquad +10a^3c + 6a^2bc - 2ab^2c & \\
\hline
\text{Reste.....}\quad 0. &
\end{array}
$$

Je procède ensuite à l'opération, en divisant $-20a^4$ premier treme du dividende, par $-5a^2$ premier terme du diviseur. Cette opération, faite suivant les règles ci-dessus, me donne pour quotient $+4a^2$, ou simplement $4a^2$, parce que c'est le premier terme : je l'écris au quotient.

Je multiplie les trois termes du diviseur successivement par $4a^2$, et changeant les signes à mesure que je trouve ces produits, je les écris sous le dividende, ce qui me donne..... $20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2$, dont je fais la réduction avec les termes

du dividende, et j'ai pour reste et pour nouveau dividende $+25a^3b-10a^3c+15a^2b^2-6a^2bc-5ab^3+2ab^2c$. Je continue la division en prenant $+25a^3b$ pour dividende, et je trouve pour quotient $-5ab$; j'écris ce quotient; je multiplie, par cette même quantité, les trois termes du diviseur; et changeant les signes à mesure que je les trouve, j'écris les produits sous mon nouveau dividende; j'ai $-25a^3b-15a^2b^2+5ab^3$, dont faisant la réduction avec les termes de ce même nouveau dividende, j'ai pour reste et pour troisième dividende..... $-10a^3c-6a^2bc+2ab^2c$. Je passe à une troisième division en prenant $-10a^3c$ pour dividende: je trouve $+2ac$ pour quotient; je fais la multiplication, le changement de signes et la réduction, comme ci-devant, et il ne me reste plus rien; ainsi le quotient est $4a^2-5ab+2ac$.

38. Il arrive souvent qu'une quantité résultante de plusieurs opérations différentes peut être mise sous la forme d'un produit ou résultat de multiplication; lorsque cela arrive, il est très souvent utile de lui donner cette forme, en indiquant la multiplication entre ses facteurs. Quoique la méthode générale pour découvrir ces facteurs dépende de connaissances que nous ne donnerons que par la suite, néanmoins nous observerons que lorsqu'on s'est un peu familiarisé avec la multiplication et la division, on les aperçoit, dans beaucoup de cas, avec facilité. Par exemple, si l'on avait à ajouter..... $5ab-3bc+a^2$ avec $3ab+3bc-2a^2$, on aurait $8ab-a^2$, qui, à cause de la lettre a qui est facteur commun des deux termes $8ab$ et a^2, peut être considéré comme étant venu de la multiplication de $8b-a$ par a, et peut être représenté par..... $(8b-a)\times a$. Il est très utile de s'exercer à ces sortes de décompositions.

De la manière de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales.

39. La méthode pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales est analogue à celle que nous avons donnée pour les nombres (*Arith.* n° 95). Il faut, après avoir ordonné les deux quantités par rapport à une même lettre, diviser celle où cette lettre a le plus grand

exposant, par la seconde, et continuer la division jusqu'à ce que cet exposant y soit devenu moindre que dans la seconde, ou tout au plus égal. On divise ensuite la seconde par le reste de cette division, et avec les mêmes conditions. On divise, après cela, le premier reste par le second, et l'on continue de diviser le reste précédent par le nouveau, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une division exacte : alors le dernier diviseur qu'on aura employé est le plus grand commun diviseur cherché. La démonstration est fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons donnée en Arithmétique, page 92.

Avant de mettre cette règle en pratique, nous ferons une observation qui peut en faciliter l'usage ; cette observation est qu'on ne change rien au plus grand commun diviseur des deux quantités, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise l'une des deux par une quantité qui n'est point diviseur de l'autre et qui n'a aucun commun diviseur avec cette autre. Par exemple, ab et ac ont pour commun diviseur a ; si je multiplie ab par d, il deviendra abd, qui n'a, avec ac, d'autre commun diviseur que a, c'est-à-dire le même qui était entre ab et ac.

Il n'en serait pas de même si je multipliais ab par une quantité qui fût diviseur de ac, ou qui eût un facteur commun avec ac ; par exemple, si je multipliais ab par c, il deviendrait abc, dont le diviseur commun avec ac est ac lui-même. Pareillement, si je multipliais ab par cd, qui a un facteur commun avec ac, j'aurais $abcd$, dont le commun diviseur avec ac est ac.

4o. Concluons de là, 1°. que si, en cherchant le plus grand commun diviseur de deux quantités, on s'aperçoit, dans le cours des divisions que l'on fera successivement, que le dividende ou le diviseur ait un facteur ou un diviseur qui ne soit point facteur de l'autre, on pourra supprimer ce facteur ;

2°. Qu'on pourra multiplier l'une des deux quantités par tel nombre qu'on voudra, pourvu que ce nombre ne soit point diviseur de l'autre quantité, et n'ait aucun facteur commun avec elle.

Appliquons maintenant la règle et les remarques que nous venons de faire.

Supposons qu'on demande le plus grand commun diviseur de..... $aa-3ab+2bb$ et $aa-ab-2bb$. Je divise la première par la seconde, j'ai 1 pour quotient, et $-2ab+4bb$ pour reste. Je vais donc diviser $aa-ab-2bb$ par le reste $-2ab+4bb$; mais comme celui-ci a pour facteur $2b$, qui n'est point facteur du nouveau dividende, je supprime ce facteur $2b$, et je me contente de chercher le commun diviseur de $aa-ab-2bb$ et $-a+2b$, c'est-à-dire de diviser $aa-ab-2bb$ par $-a+2b$; la division se fait exactement. J'en conclus que $-a+2b$ est le plus grand commun diviseur des deux quantités proposées.

Proposons-nous pour second exemple, de trouver le plus grand commun diviseur des deux quantités $5a^3-18a^2b+11ab^2-6b^3$ et $7a^2-23ab+6b^2$. Il faudrait donc diviser la première de ces deux quantités par la seconde ; mais comme 5 ne peut être divisé exactement par 7, je multiplierai la pre-

mière par 7, qui, n'étant point facteur de tous les termes de la seconde, ne peut rien changer au commun diviseur. J'aurai donc..... $35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3$ à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$. En faisant la division, j'aurai $5a$ pour quotient, et pour reste $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$. Comme l'exposant de a dans celui-ci est encore égal à celui de a dans le diviseur, je puis continuer la division; mais j'observe qu'il faudra encore, par la même raison que ci-dessus, multiplier par 7; d'ailleurs je remarque que je puis ôter b dans tous les termes de $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$, parce qu'il n'est point facteur commun de tous les termes du diviseur $7a^2 - 23ab + 6b^2$; j'aurai donc, d'après ces observations, $+77a^2 + 329ab - 294b^2$, à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$; faisant la division, j'ai -11 pour quotient, et $76ab - 228b^2$ pour reste. Je vais donc diviser $7a^2 - 23ab + 6b^2$, qui m'a servi de diviseur jusqu'ici, par le reste $76ab - 228b^2$, ou plutôt par $76a - 228b$. Pour que la division pût se faire, il faudrait multiplier la première de ces deux quantités par 76; mais avant de faire cette multiplication, il faut savoir si 76 n'est pas facteur de toute la quantité $76a - 228b$, ou s'il n'a pas quelqu'un de ses facteurs qui en soit facteur commun. Or, je remarque que 76 est 3 fois dans 228; et comme il n'est pas facteur de $7a^2 - 23ab + 6b^2$, je supprime dans le diviseur $76a - 228b$, le facteur 76, et j'ai $7a^2 - 23ab + 6b^2$ à diviser par $a - 3b$ seulement; la division faite, il ne reste rien; d'où je conclus que le commun diviseur des deux quantités proposées est $a - 3b$.

Des Fractions littérales.

41. Les fractions littérales se calculent suivant les mêmes règles que les fractions numériques, mais en appliquant en même temps les règles que nous avons données ci-dessus concernant l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Comme cette application est facile, nous la ferons très sommairement.

42. La fraction $\frac{a}{b}$ peut être transformée, sans changer de valeur, en $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{aa}{ab}$, ou $\frac{aa+ab}{ab+bb}$, et ainsi de suite. En effet, ces dernières ne sont autre chose que la première dont on a multiplié les deux termes, par c dans le premier cas, par a dans le second, et par $a + b$ dans le troisième; ce qui (*Arith.* 88) n'en change pas la valeur.

43. La fraction $\frac{aac}{abc}$ est la même chose que $\frac{a}{b}$; la fraction

$\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ est la même que $\frac{2a+b}{4a+3c}$. Cela est évident (*Arith.* 89), en divisant les deux termes de la première par ac, et les deux termes de la seconde par $3a^2$. Au reste, cette réduction des fractions à leur plus simple expression, est comprise dans ce qui a été dit (33).

44. La règle générale et la plus sûre pour réduire une fraction quelconque à ses moindres termes, est de diviser les deux termes par leur plus grand commun diviseur, que l'on trouve par ce qui a été dit (39 et 40).

45. Pour réduire à une seule fraction une quantité composée d'un entier et d'une fraction, il faut, comme en Arithmétique, multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne. Par exemple, $a+\frac{bd}{c}$, peut être changé en $\frac{ac+bd}{c}$. De même, $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ se réduit à $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$ en multipliant l'entier a par le dénominateur $b-d$.

Lorsqu'à la suite de ces opérations il se trouve des termes semblables, il ne faut pas oublier de les réduire; ainsi dans le dernier exemple, la quantité $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ a été changée en $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, qui se réduit à $\frac{-ad+cd}{b-d}$ ou $\frac{cd-ad}{b-d}$, en effaçant les deux termes ab et $-ab$ qui se détruisent.

46. Pour tirer les entiers qu'une fraction littérale peut renfermer, cela se réduit, comme en Arithmétique, à diviser le numérateur par le dénominateur, autant qu'il est possible, et en suivant les règles données ci-dessus pour la division; ainsi la quantité $\frac{3ab+ac+cd}{a}$, peut être réduite à $3b+c+\frac{cd}{a}$; pareillement, la quantité $\frac{a^2+4ab+4bb+cc}{a+2b}$, se réduit à $a+2b+\frac{cc}{a+2b}$, en faisant la division par $a+2b$.

47. Pour réduire plusieurs fractions littérales au même dénominateur, la règle est la même qu'en Arithmétique: ainsi pour réduire à un même dénominateur les trois fractions

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, je multiplie les deux termes a et b de la première par df, qui est le produit des dénominateurs des deux autres fractions, et j'ai $\frac{adf}{bdf}$. Je multiplie de même les deux termes c et d de la seconde par bf, produit des deux autres dénominateurs, et j'ai $\frac{bcf}{bdf}$; enfin je multiplie les deux termes e et f de la dernière par bd, produit des dénominateurs des deux autres, et j'ai $\frac{bde}{bdf}$, en sorte que les trois fractions, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

On se conduirait de la même manière si les numérateurs ou les dénominateurs, ou tous les deux, étaient complexes, mais en observant les règles de la multiplication des quantités complexes. C'est ainsi qu'on trouvera que les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ et $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ et $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, en multipliant les deux termes de la première par $a-b$, et les deux termes de la seconde par $a+b$.

48. Quand les dénominateurs ont un diviseur ou facteur commun, on peut réduire les fractions à un même dénominateur plus simplement que par la règle générale : par exemple, si j'avais les deux fractions $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$; je vois que les deux dénominateurs seraient les mêmes si f était facteur du premier et c facteur du second; je multiplie donc les deux termes de la première fraction par f, et les deux termes de la seconde par c, ce qui me donne $\frac{af}{bcf}$ et $\frac{cd}{bcf}$, plus simples que $\frac{abf}{bbcf}$ et $\frac{bcd}{bbcf}$ que j'aurais eues en suivant la règle générale. Si j'avais les trois fractions $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$; je vois que si fg était facteur du déno-

minateur de la première, cg de celui de la seconde, et bf de celui de la troisième, les trois fractions auraient le même dénominateur; je multiplie donc les deux termes de la première par fg, les deux termes de la seconde par cg, et les deux termes de la troisième par bf, et j'ai $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{dcg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

On peut appliquer cela aux nombres, en les décomposant en leurs facteurs. Par exemple, $\frac{5}{12}$ et $\frac{3}{16}$ sont la même chose que $\frac{5}{4\times3}$ et $\frac{3}{4\times4}$; je multiplie donc les deux termes de la première par 4, et les deux termes de la seconde par 3, et j'ai $\frac{20}{48}$ et $\frac{9}{48}$.

49. A l'égard de l'addition et de la soustraction, lorsqu'on a réduit les fractions au même dénominateur, il ne s'agit plus que de faire l'addition ou la soustraction des numérateurs. Ainsi les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ et $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, ont donné ci-dessus $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ et $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$; si donc on veut ajouter, on aura $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, qui se réduit à $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Au contraire, si l'on veut retrancher la seconde de la première, on aura..... $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, qui se réduit à $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

50. Remarquons, en passant, que pour retrancher la seconde fraction, nous avons changé les signes du numérateur seulement: si l'on changeait les signes du numérateur et du dénominateur en même temps, on ne changerait point la fraction, et par conséquent, au lieu de la retrancher, on l'ajouterait; en effet, $\frac{a}{b}$ est la même chose que $\frac{-a}{-b}$, selon la règle qui a été donnée (36).

51. Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, on écrira $\frac{ac}{bd}$, en multipliant numérateur par numérateur et dénominateur par dénominateur, conformément aux règles de l'Arithmétique; de même $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ donnera $\frac{1}{4}ab$.

Si l'on avait $\frac{a}{b}$ à multiplier par c, on pourrait considérer c comme étant $\frac{c}{1}$; ce qui ramène cette multiplication au cas précédent, et donne $\frac{ac}{b}$; mais on voit que cela se réduit à multiplier le numérateur par l'entier c; nous prendrons donc pour règle dorénavant, celle-ci : *pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, il faut multiplier le numérateur par l'entier, et conserver le même dénominateur.*

Si le numérateur et le dénominateur étaient complexes, on leur appliquerait la règle de la multiplication des nombres complexes.

52. Pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, l'opération (*Arith.* 109) se réduit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$; ce qui s'exécute par la règle précédente, et donne $\frac{ad}{bc}$. Et pour diviser $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{c+d}{a-b}$, cela se réduit à multiplier $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{a-b}{c+d}$; ce qui donne $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, ou $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$, ou en faisant la multiplication indiquée dans le numérateur $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

Enfin, si l'on avait $\frac{a}{b}$ à diviser par c, on pourrait considérer c comme étant $\frac{c}{1}$; ce qui ramènerait au cas précédent et réduirait à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{1}{c}$, ce qui donne $\frac{a}{bc}$; d'où l'on

voit que *pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur par l'entier, et conserver le numérateur.*

Des Équations.

53. Pour marquer que deux quantités sont égales, on les sépare l'une de l'autre par ce signe $=$, qui se prononce par le mot *égale,* ou par les mots *est égal à;* ainsi cette expression $a = b$ se prononcerait en disant a égale b, ou a est égal à b. L'assemblage de deux ou de plusieurs quantités séparées ainsi par le signe $=$, est ce qu'on appelle une *équation.* La totalité des quantités qui sont à la gauche du signe $=$ forme ce qu'on appelle le *premier membre* de l'équation; et la totalité de celles qui sont à la droite de ce même signe, forme le *second membre.* Dans l'équation $4x - 3 = 2x + 7$, $4x - 3$ forme le premier membre, et $2x + 7$ forme le second. Les équations sont d'un très grand usage pour la résolution des questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Toute question qui peut être résolue par l'Algèbre renferme toujours dans son énoncé, soit explicitement, soit implicitement, un certain nombre de conditions qui sont autant de moyens de saisir les rapports des quantités inconnues, aux quantités connues dont celles-là dépendent. Ces rapports peuvent toujours, ainsi qu'on le verra par la suite, être exprimés par des équations dans lesquelles les quantités inconnues et les quantités connues se trouvent combinées les unes avec les autres, et cela d'une manière plus ou moins composée, selon que la question est plus ou moins difficile.

Ainsi pour résoudre, par l'Algèbre, les questions qu'on peut proposer sur les quantités, il faut trois choses: 1°. saisir dans l'énoncé ou dans la nature de la question les rapports qu'il y a entre les quantités connues et les quantités inconnues: c'est une faculté que l'esprit acquiert, comme beaucoup d'autres, par l'usage; mais il n'y a point de règles générales à donner là-dessus; 2°. exprimer chacun de ces rapports par une équation : cette condition peut être réduite à une seule règle, que nous exposerons par la suite; mais l'application en

est plus ou moins facile, selon la nature des questions, la capacité et l'exercice que peut avoir celui qui entreprend de les résoudre ; 3°. résoudre cette équation ou ces équations, c'est-à-dire en déduire la valeur des quantités inconnues. Ce dernier point est susceptible d'un nombre déterminé de règles : c'est par lui que nous allons commencer.

Comme les questions qu'on peut avoir à résoudre peuvent conduire à des équations plus ou moins composées, on a partagé celles-ci en plusieurs classes ou degrés, que l'on distingue par l'exposant de la quantité ou des quantités inconnues qui s'y trouvent : nous ferons connaître ces équations à mesure que nous avancerons : celles dont nous allons nous occuper d'abord sont les *équations du premier degré*. On nomme ainsi les équations dans lesquelles les inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entre elles.

Des Équations du premier degré à une seule inconnue.

54. *Résoudre une équation, c'est la réduire à une autre, dans laquelle l'inconnue, ou la lettre qui la représente, se trouve seule dans un membre, et où il n'y ait plus que des quantités connues dans l'autre membre.*

Par exemple, si l'on proposait cette question : *Trouver un nombre dont le quadruple ajouté à* 3, *donne autant que son triple ajouté à* 12. En représentant ce nombre par x, son quadruple serait $4x$, lequel ajouté à 3 fait $4x + 3$; d'un autre côté, le triple de ce même nombre x est $3x$, lequel ajouté à 12 fait $3x + 12$; puis donc que $4x + 3$ doit donner autant que $3x + 12$, il faut que le nombre x soit tel que l'on ait $4x + 3 = 3x + 12$; c'est là l'équation qu'il s'agit de résoudre pour trouver le nombre demandé. Or, il est évident que puisque les deux quantités séparées par le signe $=$ sont égales, elles le seront encore si l'on retranche de chacune $3x$, ce qui réduit l'équation à $x + 3 = 12$; enfin ces deux-ci seront encore égales, si de chacune on retranche le même nombre 3 ; ce qui donne $x = 9$, et résout la question : car il est évident que x est connu, puisqu'il est égal à une quantité connue 9.

L'objet que nous nous proposons ici est de donner des règles pour ramener l'équation, dans tous les cas, à avoir ainsi l'inconnue seule dans un membre, et n'avoir que des quantités connues dans l'autre membre. Pour une question aussi simple que celle que nous venons de prendre pour exemple, l'usage des équations serait sans doute superflu; mais toutes les questions ne sont pas de cette facilité, et il ne s'agit encore que de faire entendre comment la question est résolue lorsque l'inconnue est seule dans un membre, et qu'il n'y a plus que des quantités connues dans l'autre.

Les règles pour résoudre les équations dont il s'agit ici, c'est-à-dire pour les réduire à avoir l'inconnue seule dans un membre, se réduisent à trois, qui sont relatives aux trois différentes manières dont l'inconnue peut se trouver mêlée ou engagée avec des quantités connues. Dorénavant nous représenterons les quantités inconnues par quelques-unes des dernières lettres x, y, z de l'alphabet, pour les distinguer des quantités connues, que nous représenterons, ou par des nombres, ou par les premières lettres de l'alphabet.

55. L'inconnue peut se trouver mêlée avec des quantités connues, en trois manières : 1°. par addition ou soustraction, comme dans l'équation $x+3=5-x$; 2°. par addition, soustraction et multiplication, comme dans l'équation..... $4x-6=2x+16$; 3°. enfin par addition, soustraction, multiplication et division, comme dans l'équation $\frac{2}{3}x-4=\frac{1}{3}x+17$, ou par ces deux dernières opérations seulement, ou par la dernière seulement. Voici les règles qu'il faut suivre pour dégager l'inconnue, dans ces différens cas.

56. *Pour faire passer un terme quelconque d'une équation, d'un membre de cette équation dans l'autre, il faut effacer ce terme et l'écrire dans l'autre membre avec le signe contraire à celui qu'il a dans le membre où il est.* Sur quoi il faut se rappeler qu'un terme qui n'a pas de signe est censé avoir le signe +. Par exemple, dans l'équation $4x+3=3x+12$, si je veux faire passer le terme $+3$ dans le second membre, j'écris $4x=3x+12-3$, où l'on voit que le terme 3 n'est

plus dans le premier membre, mais qu'il est dans le second avec le signe —, contraire au signe + qu'il avait dans le premier. Cette équation réduite, revient à $4x = 3x + 9$; si l'on veut maintenant faire passer le terme $3x$ dans le premier membre, on écrira $4x - 3x = 9$, qui, en réduisant, devient $x = 9$.

Pareillement, si dans l'équation $5x - 7 = 21 - 4x$, je veux faire passer le terme -7 dans le second membre, j'écrirai $5x = 21 - 4x + 7$, qui se réduit à $5x = 28 - 4x$; si je veux ensuite faire passer $-4x$, j'écrirai $5x + 4x = 28$, ou, en réduisant, $9x = 28$. Nous verrons dans quelques momens comment s'achève la résolution de cette équation. La raison de cette règle est bien facile à saisir. Puisque les quantités qui composent le premier membre sont, ensemble, égales à la totalité de celles qui composent le second, il est évident qu'on ne trouble point cette égalité, si ayant ajouté ou ôté à l'un des membres un terme quelconque, on ajoute ou l'on ôte à l'autre ce même terme; or, lorsqu'on efface un terme qui a le signe +, c'est diminuer le membre où il se trouve; il faut donc diminuer l'autre de pareille quantité, c'est-à-dire y écrire ce terme avec le signe —. Au contraire, lorsqu'on efface un terme qui a le signe —, il est évident qu'on augmente le nombre où il se trouve, il faut donc augmenter l'autre de pareille quantité, c'est-à-dire y écrire ce terme avec le signe +.

57. On voit donc que par cette règle on peut faire passer à la fois, dans un même membre, tous les termes affectés de l'inconnue, et toutes les quantités connues dans l'autre. On choisira d'abord dans quel membre on veut voir les termes affectés de l'inconnue; cela est indifférent; je suppose que ce soit dans le premier. On écrira de nouveau l'équation, en observant de conserver aux termes affectés de l'inconnue, et qui étaient dans le premier membre, les signes qu'ils avaient; on écrira, à la suite de ceux-là, les termes affectés de l'inconnue qui se trouvent dans l'autre membre, mais en observant de changer leur signe. A la suite de tous ces termes, on écrira le signe =, et l'on formera le second membre en écrivant les quantités connues qui composaient d'abord le second membre,

en les écrivant, dis-je, avec les mêmes signes qu'elles avaient, et ensuite les quantités connues qui étaient dans le premier membre, mais en leur donnant des signes contraires à ceux qu'elles avaient. C'est ainsi que l'équation $7x - 8 = 14 - 4x$ devient $7x + 4x = 14 + 8$, ou $11x = 22$. Pareillement l'équation $ax + bc - cx = ac - bx$, devient $ax - cx + bx = ac - bc$.

58. Il peut arriver, par cette transposition, que ce qui reste des x, après la réduction, se trouve avoir le signe $-$; par exemple, si l'on avait $3x - 8 = 4x - 12$, en passant tous les x dans le premier membre, on aurait $3x - 4x = -12 + 8$, qui se réduit à $-x = -4$; alors il n'y a qu'à changer les signes de l'un et l'autre membre; ce qui, dans le cas présent, donne $+x = +4$, ou $x = 4$. En effet, on était également maître de transposer les x dans le second membre; ce qui aurait donné $-8 + 12 = 4x - 3x$, qui se réduit à $4 = x$, qui est la même chose que $x = 4$.

59. On peut souvent abréger la réduction de l'équation lorsqu'elle est numérique, ou lorsque étant littérale, elle renferme des quantités semblables. Si ces quantités ont le même signe dans différens membres, on efface l'une et on diminue l'autre de pareille quantité; au contraire, on les ajoute lorsqu'elles ont différens signes. Par exemple, dans l'équation $6b - 4a + 2x = 5a + 3x$, j'efface $2x$ dans le premier membre, et j'écris seulement x dans le second; j'efface $5a$ dans le second, et j'augmente $4a$ de $5a$, ce qui me donne tout de suite $6b - 9a = x$. On voit donc que s'il se trouvait de part et d'autre des termes parfaitement égaux et de même signe, on pourrait les supprimer tout de suite; c'est ainsi que l'équation..... $5a + 2b = 5a + x$, se réduit tout de suite à $2b = x$.

60. Lorsqu'on a passé dans un membre tous les termes affectés de l'inconnue, et toutes les quantités connues dans l'autre membre, s'il n'y a point de fractions dans l'équation, il ne s'agit plus que d'exécuter la règle suivante pour avoir la valeur de l'inconnue. *Écrivez l'inconnue seule dans un membre, et donnez pour diviseur au second membre la quantité qui multipliait l'inconnue dans le premier.* Par exemple, dans

l'équation $7x-8=14-4x$ que nous avons traitée ci-dessus, nous avons eu, par la transposition et la réduction, $11x=22$; pour avoir x, je n'ai autre chose à faire qu'à écrire $x=\frac{22}{11}$, qui se réduit à $x=2$; c'est-à-dire écrire x seul dans le premier membre, et faire servir son multiplicateur 11, de diviseur au second membre 22. En effet, lorsqu'au lieu de $11x$, j'écris seulement x, je n'écris que la onzième partie du premier membre; il faut donc, pour conserver l'égalité, n'écrire que la onzième partie du second membre; c'est-à-dire diviser le second membre par 11.

Pareillement, si l'on proposait l'équation $12x-15=4x+25$; après avoir passé (56) tous les x d'un côté, et toutes les quantités connues de l'autre, on aura $12x-4x=25+15$, ou, en réduisant, $8x=40$; maintenant pour avoir x, j'écris $x=\frac{40}{8}$, qui se réduit à $x=5$. Car, lorsqu'au lieu de $8x$ j'écris x seulement, je n'écris que la huitième partie du premier membre; je dois donc, pour maintenir l'égalité, n'écrire que la huitième partie du second membre, c'est-à-dire n'écrire que $\frac{40}{8}$.

Si les quantités connues qui multiplient x, au lieu d'être des nombres, étaient représentées par des lettres, la règle ne serait pas différente pour cela: ainsi, dans l'équation $ax=bc$, il n'y a autre chose à faire, pour avoir x, que d'écrire $x=\frac{bc}{a}$.

Si, après la transposition faite, il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue, la règle est encore la même; ainsi, dans l'équation $ax+bc-cx=ac-bx$, que nous avons eue ci-dessus, on a, après la transposition, $ax-cx+bx=ac-bc$; pour avoir x, il ne s'agit plus que d'écrire $x=\frac{ac-bc}{a-c+b}$; c'est-à-dire écrire x seul dans un membre, et donner pour diviseur au second, la quantité qui multipliait x dans le premier, laquelle est ici $a-c+b$, puisque la quantité $ax-cx+bx$ est x multiplié par la totalité des trois quantités $a-c+b$.

61. On voit donc que, lorsque après la transposition, il y a plusieurs termes affectés de x, on doit, pour avoir la valeur

de x, diviser le second membre par la totalité des quantités qui affectent x dans le premier, en prenant ces quantités avec leurs signes tels qu'ils sont. Par exemple, dans l'équation $ax = bc - 2x$, on a, par la transposition, $ax + 2x = bc$; et en appliquant la règle actuelle, ou la division, on aura $x = \frac{bc}{a+2}$. De même, l'équation $x - ab = bc - ax$, donne, par la transposition, $x + ax = bc + ab$, et par conséquent $x = \frac{bc+ab}{1+a}$; car il ne faut pas oublier ici (5) que le multiplicateur de x dans le premier terme de $x + ax$ est 1; en sorte que dans $x + ax$, x est multiplié par $1 + a$; en effet, dans $x + ax$, x se trouve une fois de plus que dans ax.

62. S'il se trouvait quelque quantité qui fût facteur commun de tous les termes de l'équation; on pourrait simplifier, en divisant tous les termes par ce facteur commun; par exemple, dans l'équation $15bb = 27ab + 6bx$; je diviserais par $3b$, qui est facteur commun de tous les termes, et j'aurais $5b = 9a + 2x$, qui, par la transposition, devient $5b - 9a = 2x$, et enfin par la division, donne $\frac{5b-9a}{2} = x$, ou $x = \frac{5b-9a}{2}$.

63. Les règles que nous venons de donner ont toujours lieu, lors même que les différens termes de l'équation ont des dénominateurs, pourvu que ces dénominateurs ne contiennent pas l'inconnue; mais comme l'application de ces règles est plus facile pour les commençans, lorsqu'il n'y a pas de fractions dans l'équation, nous allons ajouter ici une règle pour faire disparaître les dénominateurs.

64. Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, *il faut multiplier chaque terme qui n'a pas de dénominateur, par le produit de tous les dénominateurs; et multiplier le numérateur de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres fractions seulement.* Par exemple, si j'avais l'équation $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, je multiplierais le numérateur $2x$

de la fraction $\frac{2x}{3}$, par 35, produit des dénominateurs 5 et 7, ce qui me donnerait $70x$. Je multiplierais le terme 4, qui n'a point de dénominateur, par 105, produit des trois dénominateurs 3, 5, 7, ce qui me donnerait 420. Je multiplierais le numérateur $4x$ de la fraction $\frac{4x}{5}$ par 21, produit des deux dénominateurs 3 et 7, et j'aurais $84x$. Je multiplierais 12, qui n'a pas de dénominateur, par le produit 105 des trois dénominateurs, et j'aurais 1260. Enfin je multiplierais le numérateur $5x$ de la fraction $\frac{5x}{7}$ par 15, produit des deux autres dénominateurs 3 et 5, ce qui me donne $75x$: en sorte que l'équation proposée est changée en celle-ci, $70x+420=84x+1260-75x$. dans laquelle, pour avoir x, il ne s'agit plus que d'appliquer les deux règles précédentes. Par la première (56) on changera cette équation en $70x-84x+75x=1260-420$; ou, en réduisant, $61x=840$, et par la seconde (60), $x=\frac{840}{61}$, qui, en faisant la division, se réduit à $x=13\frac{47}{61}$.

La raison de cette règle est facile à apercevoir, si l'on se rappelle ce qui a été dit (*Arith*, 91) pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur. En effet, si dans l'équation proposée $\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7}$, on voulait réduire au même dénominateur les trois fractions $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$, il faudrait multiplier leurs numérateurs par les mêmes nombres par lesquels notre règle actuelle prescrit de les multiplier, et donner à ces nouveaux numérateurs, pour dénominateur commun, le produit de tous les dénominateurs; en sorte que l'équation proposée serait changée en cette autre

$$\frac{70x}{105}+4=\frac{84x}{105}+12-\frac{75x}{105},$$

qui est la même, dans le fond, puisque (*Arith.* 88) les nouvelles fractions sont les mêmes que les premières. Maintenant,

si nous voulons aussi réduire les entiers en fraction, il faut (*Arith.* 86) multiplier ces entiers par le dénominateur de la fraction qui les accompagne, c'est-à-dire ici par 105 qui a été formé du produit de tous les dénominateurs qui se trouvent dans l'équation; alors on aura $\frac{70x+420}{105}=\frac{84x+1260-75x}{105}$; mais il est évident qu'on peut, sans troubler l'égalité, supprimer de part et d'autre le dénominateur commun, puisque si ces deux quantités sont égales étant divisées par un même nombre, elles doivent l'être aussi sans cette division; on a donc alors $70x+420=84x+1260-75x$, comme ci-dessus.

65. Si les différens termes qui composent l'équation sont tous des quantités littérales, la règle ne sera pas pour cela différente. Il faut seulement observer les règles de la multiplication des quantités littérales: ainsi dans l'équation..... $\frac{ax}{b}+b=\frac{cx}{d}+\frac{ab}{c}$, je multiplie le numérateur ax par le produit cd des deux autres dénominateurs, ce qui donne $acdx$. Je multiplie le terme $+b$, par le produit bcd de tous les dénominateurs, et j'ai $+b^2cd$. Je multiplie cx par bc, et j'ai bc^2x; enfin je multiplie ab par bd, et j'ai ab^2d, en sorte que l'équation devient $acdx+b^2cd=bc^2x+ab^2d$, laquelle, par transposition, donne $acdx-bc^2x=ab^2d-b^2cd$; et (61), par division, $x=\frac{ab^2d-b^2cd}{acd-bc^2}$.

66. Lorsque les dénominateurs sont complexes, on peut, pour soulager l'esprit, commencer par indiquer seulement les opérations, pour les exécuter ensuite; ce qui est plus facile en les voyant ainsi indiquées; par exemple, si j'avais..... $\frac{ax}{a-b}+4b=\frac{cx}{3a+b}$, j'écrirais

$$ax\times(3a+b)+4b\times(a-b)\times(3a+b)=cx\times(a-b);$$

alors faisant les opérations indiquées, j'aurais..... $3a^2x+abx+12a^2b-8ab^2-4b^3=acx-bcx$; transposant,

$$3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b;$$

et enfin (61), en divisant, $x = \dfrac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

Applications des principes précédens à la résolution de quelques questions simples.

67. Quoique nous nous soyons proposé de ne traiter, avec quelque détail, des usages de l'Algèbre, que dans la seconde section, nous croyons néanmoins à propos de préparer à ces usages, en appliquant dès à présent les principes précédens à quelques questions assez faciles. Cela nous donnera lieu, d'ailleurs, de faire quelques remarques utiles pour la suite. Les règles que nous venons de donner sont suffisantes pour résoudre toute question du premier degré, lorsqu'une fois elle est exprimée par une équation. Pour mettre une question en équation, on peut faire usage de la règle suivante : *Représentez la quantité ou les quantités cherchées, chacune par une lettre; et ayant examiné avec attention l'état de la question, faites, à l'aide des signes algébriques, sur ces quantités et sur les quantités connues, les mêmes opérations et les mêmes raisonnemens que vous feriez si, connaissant les valeurs des inconnues, vous vouliez les vérifier.* Cette règle est générale, et conduira toujours à trouver les équations que la question peut fournir. Mais il est bon d'en diriger l'application par quelques exemples.

Question première : *Un père et un fils ont* 100 *ans à eux deux; le père a* 40 *ans de plus que le fils : on demande quel est l'âge de chacun?* Avec une attention médiocre, on voit que la question se réduit à celle-ci : Trouver deux quantités qui, réunies, fassent 100, et dont l'une surpasse l'autre de 40. Or, il est facile de voir que dès que l'une de ces quantités sera connue, la seconde le sera aussi, puisque, si la plus grande, par exemple, était connue, il ne s'agirait que d'en ôter 40 pour avoir la plus petite. Je représente donc la plus grande par x. Maintenant si, connaissant la valeur de x, je voulais la vérifier, j'en retrancherais 40, pour

avoir le plus petit nombre ; je réunirais ensuite le plus grand et le plus petit, pour voir s'ils composent 100. Imitons donc ce procédé.

Le plus grand nombre est..... x,

le plus petit sera donc..... $x - 40$.

Ces deux nombres réunis font..... $2x - 40$.

Or, par les conditions de la question, ils doivent faire..... 100.

Donc..... $2x - 40 = 100$.

Il ne s'agit plus, pour avoir x, que d'appliquer les règles données (56 et 60). La première donne $2x = 100 + 40$, ou $2x = 140$, et la seconde $x = \frac{140}{2} = 70$; ayant trouvé le plus grand nombre x, j'en retranche 40 pour avoir le plus petit, et j'ai 30 pour celui-ci. Ainsi les deux nombres demandés sont 70 et 30.

En réfléchissant sur la manière dont nous nous sommes conduit pour résoudre cette question, on peut voir que les raisonnemens que nous avons employés ne sont point dépendans des valeurs particulières des nombres 100 et 40 qui entrent dans cette question, et que si, au lieu de ces nombres, on en eût proposé d'autres, il eût fallu se conduire de même. Ainsi, si l'on proposait la question de cette manière générale : *Deux nombres réunis font une somme connue et représentée par* a ; *ces deux nombres diffèrent entre eux d'un nombre connu représenté par* b ; *comment trouverais-je ces deux nombres ?*

Ayant représenté le plus grand par..... x,

le plus petit sera..... $x - b$.

Ces deux nombres réunis font..... $2x - b$.

Or, selon la question, ils doivent composer le nombre a; il faut donc que $2x - b = a$. Transposant, on a $2x = a + b$, et divisant $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

C'est-à-dire que pour avoir le plus grand, il faut prendre la moitié de a, et y ajouter la moitié de b; ce qui m'apprend que, lorsque je connaîtrai la somme a de deux nombres inconnus, et leur différence b, j'aurai le plus grand de ces deux

nombres inconnus, en prenant la moitié de la somme, et y ajoutant la moitié de la différence.

Puisque le plus petit des deux nombres est $x-b$, il sera donc $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-b$, ou $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; donc pour avoir le plus petit, il faut ôter la moitié de b de la moitié de a, c'est-à-dire retrancher la moitié de la différence de la moitié de la somme.

On voit par là comment en représentant d'une manière générale, c'est-à-dire par des lettres, les quantités connues qui entrent dans ces questions, on parvient à trouver des règles générales pour la résolution de toutes les questions de même espèce. Cette règle que nous venons de trouver, est celle que nous avons donnée (*Géom.* 301).

Souvent des questions paraissent différentes au premier coup d'œil, et cependant, après un léger examen, on trouve qu'elles ne diffèrent que par l'énoncé. Par exemple, si l'on proposait cette question : *Partager un nombre connu et représenté par* a, *en deux parties, dont l'une soit moindre ou plus grande que l'autre, d'une quantité connue et représentée par* b. Il est facile de voir que cette question revient au même que la précédente.

Question seconde: *Partager le nombre* 720 *en trois parties dont la plus grande surpasse la plus petite de* 80, *et dont la moyenne surpasse la plus petite de* 40. Si l'on me disait quelle est la plus petite partie, pour la vérifier, j'y ajouterais 40 d'une part, ce qui me donnerait la seconde, et 80 d'une autre part, ce qui me donnerait la plus grande; alors réunissant ces trois parties, il faudrait que leur somme formât 720. Nommons donc cette plus petite partie x, et en procédant de la même manière, nous dirons :

La plus petite partie est.....	x,
donc la moyenne est.....	$x+40$
et la plus grande.....	$x+80$.
Or, ces 3 parties réunies font.....	$3x+120$;
d'ailleurs la question exige qu'elles fassent.	720.
Il faut donc que.....	$3x+120=720$.

Appliquant les règles ci-dessus, on aura

$$3x = 720 - 120, \quad \text{ou} \quad 3x = 600,$$

et par conséquent $x = 200$; donc la seconde partie est 240, et la plus grande 280; ces trois parties réunies font en effet 720.

Il est encore évident, dans cet exemple, que quand les nombres proposés, au lieu d'être 720, 40 et 80, eussent été différens, la question aurait toujours pu se résoudre de la même manière; ainsi pour résoudre toutes les questions dans lesquelles il s'agit de partager un nombre connu a en trois parties, telles que l'excès de la plus grande sur la plus petite soit un nombre connu et représenté par b, et que l'excès de la moyenne sur la plus petite soit c; en raisonnant de même, on dira :

Représentons la plus petite par... x,
la moyenne sera ..... $x + c$,
et la plus grande..... $x + b$.
Ces trois parts réunies font..... $3x + b + c$;
or, elles doivent faire..... a.
Il faut donc que $3x + b + c = a$.
Donc, transposant,

$$3x = a - b - c, \quad \text{et divisant,} \quad x = \frac{a - b - c}{3}.$$

C'est-à-dire que pour avoir la plus petite, il faut retrancher du nombre qu'il s'agit de partager, les deux excès, et prendre le tiers du reste : alors les deux autres sont faciles à trouver. Ainsi, l'on demande de partager 642 en trois parties dont la moyenne surpasse la plus petite de 75, et dont la plus grande surpasse la plus petite de 87, j'ajouterais les deux différences 75 et 87, ce qui me donnerait 162; retranchant 162 de 642, il reste 480, dont le tiers 160 est la plus petite part. Les deux autres sont donc $160 + 75$ ou 235, et $160 + 87$ ou 247.

Au reste, les deux questions que nous venons de donner

pour exemple n'ont pas besoin du secours de l'Algèbre, mais leur simplicité est propre à faire voir clairement la manière dont on doit faire usage du principe que nous avons donné pour mettre une question en équation.

Question troisième : *Partager un nombre connu, par exemple,* 14250, *en trois parties qui soient entre elles comme les nombres* 3, 5 *et* 11 ; *c'est-à-dire dont la première soit à la seconde* :: 3 : 5, *et dont la première soit à la troisième* :: 3 : 11. Si je connaissais l'une des parties, la première, par exemple, voici comment je la vérifierais. Je chercherais par une règle de trois (*Arith.* 194) un nombre qui fût à cette 1re partie :: 5 : 3; ce serait la 2e partie. Je chercherais de même un autre nombre qui fût à cette 1re partie :: 11 : 3; ce serait la 3e partie; réunissant ces trois parties, elles devraient former 14250. Imitons donc ce procédé.

Soit la première part. ..... x.

Pour trouver la seconde, je calcule le quatrième terme de cette proportion 3 : 5 :: x :

Ce quatrième terme ou la seconde partie, sera donc $\frac{5x}{3}$.

Pour trouver la troisième, je calcule le quatrième terme de cette proportion 3 : 11 :: x :

Ce quatrième terme, ou la troisième partie, sera donc $\frac{11x}{3}$.

Ces trois parts réunies font $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$, ou $x + \frac{16x}{3}$; mais la question exige qu'elles fassent 14250; il faut donc que

$$x + \frac{16x}{3} = 14250.$$

Pour avoir la valeur de x, je fais (64) disparaître le dénominateur 3, et j'ai $3x + 16x = 42750$; ou $19x = 42750$ donc (60) en divisant par 19, $x = \frac{42750}{19} = 2250$. La seconde part, qui est $\frac{5x}{3}$, sera donc $\frac{5 \times 2250}{3}$, ou $\frac{11250}{3}$; ou 3750 ;

et la troisième, qui est $\frac{11x}{3}$, sera $\frac{11 \times 2250}{3}$ ou $\frac{24750}{3}$, ou 8250; ces trois parts réunies forment en effet 14250; d'ailleurs les trois nombres 2250, 3750, 8250, sont entre eux comme les trois nombres 3, 5 et 11; ce qu'il est facile de voir en divisant les trois premiers par le même nombre 750; ce qui (*Arith.* 170) ne change point leur rapport.

Si le nombre qu'on propose de partager, au lieu d'être 14250, était tout autre; s'il était en général représenté par a, et que les nombres proportionnels aux parties dans lesquelles on veut le partager, au lieu d'être 3, 5, 11, fussent en général trois nombres connus et représentés par les lettres m, n, p; il est visible qu'il ne faudrait qu'imiter ce que nous venons de faire.

Ainsi, la première part étant représentée par x, pour avoir la seconde, je calculerais le 4e terme de cette proportion $m : n :: x :$

Ce quatrième terme, ou la seconde part, serait donc $\frac{nx}{m}$.

Et pour avoir la troisième, je calculerais le 4e terme de cette proportion $m : p :: x :$

Ce quatrième terme, ou la troisième part, serait donc $\frac{px}{m}$.

Les trois parts réunies feraient donc $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, ou $x + \frac{nx+px}{m}$; or elles doivent faire a; il faut donc que

$$x + \frac{nx+px}{m} = a.$$

Chassant le dénominateur, on a $mx + nx + px = ma$, et par conséquent (61), en divisant, $x = \frac{ma}{m+n+p}$; ce qui nous donne lieu de faire remarquer l'utilité de l'Algèbre, pour découvrir des règles de calcul.

Si l'on voulait calculer le quatrième terme d'une proportion

dont les trois premiers seraient $m+n+p : m :: a :$, il est visible (*Arith.* 179) que ce quatrième terme serait $\frac{am}{m+n+p}$; et puisque nous trouvons que x est exprimé par la même quantité, concluons-en que pour avoir x, il faut calculer le quatrième terme d'une proportion dont le premier est la somme des parties proportionnelles ; le second, la première de ces parties; et le troisième est le nombre même qu'il s'agit de partager; ce qui est précisément la règle que nous avons donnée (*Arith.* 197).

Question quatrième: *On a fait partir de Dreux, pour Brest un courrier qui fait* 2 *lieues par heure. Huit heures après son départ, on en a fait partir un autre de Paris, pour Brest, et celui-ci fait* 3 *lieues par heure. On demande où il rencontrera le premier, sachant d'ailleurs qu'il y a* 17 *lieues de Paris à Dreux.* Si l'on me disait combien le second courrier doit faire de lieues pour attraper le premier, je vérifierais ce nombre de cette manière. Je chercherais combien le premier a dû faire de chemin pendant que le second a été en marche; et comme ils en doivent faire, en même temps, à proportion de leur vitesse, c'est-à-dire à proportion du nombre de lieues qu'ils font par heure, je trouverais combien le premier a dû en faire, en calculant le quatrième terme de cette proportion.... 3 : 2 :: le nombre de lieues faites par le second est au nombre de lieues que le premier aura faites dans le même temps. Ayant trouvé ce quatrième terme, j'y ajouterais le nombre de lieues que le premier courrier a dû faire pendant les 8 heures qu'il avait d'avance, et enfin les 17 lieues de Paris à Dreux, qu'il avait aussi d'avance, et le tout devrait former le nombre de lieues que le second a faites. Conduisons-nous donc de la même manière en représentant par x le nombre de lieues que fera le second courrier. Pour trouver le nombre de lieues que le premier fait pendant que le second fait x, je calcule le quatrième terme de cette proportion $3 : 2 :: x :$; ce 4e terme est $\frac{2x}{3}$; or, pendant 8 heures, ce même premier courrier a dû

faire 16 lieues, à raison de 2 lieues par heure; et puisqu'il y a 17 lieues de Paris à Dreux, si l'on réunit ces trois quantités, on aura $\frac{2x}{3} + 16 + 17$, ou $\frac{2x}{3} + 33$, pour le chemin qu'aura dû faire le second courrier, lorsqu'il attrapera le premier. Puis donc qu'on a supposé qu'alors il aurait fait x lieues, il faut que

$$\frac{2x}{3} + 33 = x; \quad \text{d'où} \quad x = 99.$$

C'est-à-dire que les deux courriers se rencontreront lorsque le second courrier aura fait 99 lieues, ou qu'ils se rencontreront à 99 lieues de Paris.

En effet, pendant que le second fera 99 lieues, le premier fera 66 lieues, puisqu'il fait deux lieues pendant que le second en fait trois; or il a 16 lieues d'avance, par les 8 heures dont son départ précède celui du second, et il a de plus 17 lieues d'avance, comme partant de Dreux; il sera donc alors à 99 lieues de Paris, c'est-à-dire au même endroit que le second.

Avec un peu d'attention, on voit que quand on changerait les nombres qui entrent dans cette question, la manière de raisonner et d'opérer n'en serait pas pour cela différente. Représentons donc, en général, par a, la distance des deux lieux de départ, qui était 17 lieues dans la question précédente: représentons par b le nombre d'heures dont le départ du premier courrier précède celui du second; par c le nombre de lieues que le premier fait par heure, et par d le nombre de lieues que fait le second par heure. Si nous représentons toujours par x le nombre de lieues que le second courrier doit faire pour rencontrer le premier, x sera encore composé de l'intervalle des deux lieux de départ, du chemin que le premier peut faire pendant le nombre b d'heures, et enfin du chemin que le premier fera pendant tout le temps que le second sera en marche. Pour déterminer ce dernier chemin, j'observe que les deux courriers marchant alors pendant le même temps, doivent faire du chemin à proportion de leurs vitesses;

ainsi x étant le chemin que le second est supposé faire, j'aurai celui que fait le premier pendant ce temps, en calculant le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci $d:c::x:d$; ce quatrième terme sera donc (*Arith.* 179) $\frac{cx}{2}$. Or, puisque ce premier courrier est supposé faire le nombre c de lieues par heure, il a dû, dans le nombre b d'heures, en faire b fois autant; c'est-à-dire 8 fois si b vaut huit, 30 fois si b vaut trente; en général, il en doit faire autant qu'il y a d'unités dans $c \times b$ ou bc; il en a donc fait une quantité exprimée par bc.

Réunissons donc maintenant le nombre de lieues $\frac{cx}{d}$ avec le nombre de lieues bc, et avec le nombre de lieues a, et le tout $\frac{cx}{d} + bc + a$, sera ce que le premier a dû faire. Or on a supposé que x était ce qu'il a dû faire; donc

$$x = \frac{cx}{d} + bc + a.$$

Chassant le dénominateur, on a $dx = cx + bcd + ad$; transposant, $dx - cx = bcd + ad$; divisant enfin, on a $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, qui donne la solution de toutes les questions de cette espèce, au moins tant qu'on suppose que les deux courriers vont du même côté, et que le départ du courrier qui va le moins vite précède celui du second.

Pour montrer l'usage de cette formule, reprenons l'exemple précédent, et rappelons-nous que, dans ce cas, a représente 17 lieues; c'est-à-dire $a = 17^l$, $b = 8^h$, $c = 2^l$, $d = 3^l$. Alors la valeur générale de x devient

$$x = \frac{8 \times 2 \times 3 + 17 \times 3}{3 - 2} = \frac{48 + 51}{1} = 99.$$

Tel est donc l'usage de ces solutions générales, qu'en y substituant à la place des lettres, les nombres qu'elles sont destinées à représenter, et faisant les opérations que la disposition et les

signes de ces lettres indiquent, on trouve la résolution de toutes les questions particulières de même espèce.

Par exemple, si l'on proposait cette autre question : *L'aiguille des heures d'une montre répond à 17 minutes, et celle des minutes répond à 24 minutes, c'est-à-dire qu'il est $3^h 24'$: on demande à quel nombre d'heures et de minutes ces deux aiguilles seront l'une sur l'autre.* Puisque l'aiguille des heures et celle des minutes marchent en même temps, la quantité b par laquelle nous avons représenté ce dont le départ d'un des courriers précède celui du second, est ici zéro. L'intervalle des deux lieux de départ est ici le chemin que l'aiguille des minutes a à faire pour venir de la vingt-quatrième division du cadran à la dix-septième, c'est-à-dire que $a = 53$ divisions : or, pendant que l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions, celle des heures n'en parcourt que 5 ; on a donc $c = 5$, $d = 60$. Puisque $b = 0$, je rejette de la formule le terme bcd, parce que zéro, multiplié par tout ce qu'on voudra, fait toujours zéro. J'aurai donc, pour le cas présent, $x = \frac{ad}{d-c}$; et en substituant pour a, d, c, leurs valeurs, $x = 57 + \frac{9}{11}$; c'est-à-dire qu'il faudra que l'aiguille des minutes parcoure encore 57 divisions et $\frac{9}{11}$; ainsi, puisqu'elle répondait à la vingt-quatrième division, elle répondra à $81\frac{9}{11}$ divisions ; ou, puisque 60 divisions font un tour, les deux aiguilles seront l'une sur l'autre à $21' \frac{9}{11}$ de l'heure suivante, c'est-à-dire à $4^h 21' \frac{9}{11}$.

L'avantage des solutions littérales sur les solutions numériques ne consiste pas seulement en ce que, pour chaque question particulière, il ne s'agit plus que de substituer des nombres : souvent, par certaines préparations, on rend ces solutions susceptibles d'un énoncé simple et facile à retenir. Par exemple, la formule $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, que nous venons de trouver, est dans ce cas : la quantité d étant facteur commun des termes du numérateur, on peut écrire la valeur de x de

cette manière, $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$; or, sous cette forme on peut reconnaître que la valeur de x est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient $d - c : d :: a + bc$: ; mais de ces trois termes, le premier, $d - c$, marque la différence des vitesses des deux courriers ; le second, d, marque la vitesse du second courrier ; et le troisième, $a + bc$, est composé de l'intervalle a des deux lieux de départ, et de la quantité bc ou $c \times b$ qui exprime combien le premier courrier fait de lieues pendant le nombre d'heures qu'il a d'avance ; en sorte que $a + bc$ marque toute l'avance que le premier a sur le second ; la résolution de la question peut donc se réduire à cet énoncé : Multipliez le chemin que le premier fait par heure, par le nombre d'heures qu'il a d'avance, et l'ayant ajouté à l'intervalle des deux lieux de départ, faites cette règle de trois : la différence des vitesses des deux courriers est à la vitesse du second, comme la somme des deux nombres que vous venez d'ajouter est à un quatrième terme ; ce sera le nombre de lieues que le second courrier doit faire pour rencontrer le premier. Ainsi, dans le premier exemple ci-dessus, le premier courrier ayant 8 heures d'avance, et faisant 2 lieues par heure, on a 16 lieues à ajouter à 17 lieues, intervalle des deux lieux de départ ; ce qui donne 33. Je calcule donc le quatrième terme de cette proportion $3 - 2 : 3 :: 33$: ; ou $1 : 3 :: 33$: ; ce quatrième terme est 99, comme ci-dessus.

Au reste, qu'il y ait des fractions ou qu'il n'y en ait point, c'est toujours la même règle. Par exemple, si le premier courrier faisait 7 lieues en 4 heures ; le second, 13 lieues en 5 heures : si le premier courrier avait 15 heures d'avance, et qu'enfin l'intervalle des deux lieux de départ fût de 42 lieues, je dirais : puisque le premier courrier fait 7 lieues en 4 heures, c'est $\frac{7}{4}$ de lieue par heure ; pareillement, pour le second, c'est $\frac{13}{5}$ de lieue par heure ; donc pendant les 15 heures que le premier a d'avance, il doit, à raison de $\frac{7}{4}$ de lieue par heure, faire 15 fois $\frac{7}{4}$ de lieue ou $\frac{105}{4}$ de lieue ; lesquels ajoutés à 42 lieues, font $42 + \frac{105}{4}$ ou $\frac{273}{4}$: je calcule

donc le quatrième terme de cette proportion..... $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4}$: ; ce quatrième terme sera $\frac{3549}{17}$, ou $208\frac{13}{17}$. C'est le nombre de lieues que le second courrier serait obligé de faire.

Réflexions sur les Quantités positives et les Quantités négatives.

68. Lorsqu'on a ainsi résolu, d'une manière générale, toutes les questions d'une même espèce, on peut souvent faire usage de ces formules générales pour la résolution d'autres questions dont les conditions seraient tout opposées à celles qu'on a eu en vue de remplir : un simple changement de + en —, ou de — en +, dans les signes des quantités, suffit souvent. Mais avant de faire connaître ce nouvel usage des signes, il faut les considérer sous un nouvel aspect. Les lettres ne représentent que la valeur absolue des quantités. Les signes + et — n'ont représenté jusqu'ici que les opérations de l'addition et de la soustraction, mais ils peuvent aussi représenter, dans plusieurs cas, la manière d'être des quantités les unes à l'égard des autres. Une même quantité peut être considérée sous deux points de vue opposés, ou comme capable d'augmenter une quantité, ou comme capable de la diminuer. Tant qu'on ne représentera cette quantité que par une lettre ou par un nombre, rien ne désignera quel est celui de ces deux aspects sous lequel on la considère. Par exemple, dans l'état d'un homme qui aurait autant de biens que de dettes, le même nombre peut servir à exprimer la quantité numérique des unes et des autres; mais ce nombre, quel qu'il soit, ne ferait point connaître la différence des unes et des autres. Le moyen le plus naturel de faire sentir cette différence, c'est de les désigner par un signe qui indique l'effet qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre; or, l'effet des dettes étant de retrancher sur les possessions, il est naturel de désigner celles-là en leur appliquant le signe —.

Pareillement, si l'on regarde une ligne droite (*fig.* 1) comme engendrée par le mouvement d'un point A mu perpendicu-

lairement à la ligne BC, on voit que ce point pouvant aller ou de A vers D, ou de A vers E, si l'on représente par a le chemin AD ou AE qu'il a fait, on ne détermine pas encore absolument la direction de ce point. Le moyen de la fixer est d'indiquer, par quelque signe, si la quantité a doit être considérée à droite ou à gauche : or les signes $+$ et $-$ sont propres à cet effet; car si l'on estime le mouvement du point A à l'égard du point L connu et regardé comme terme fixe, lorsque le point A se meut vers D, ce qu'il décrit tend à augmenter LA; et lorsqu'il se meut vers E, ce qu'il décrit tend, au contraire, à diminuer LA; il est donc naturel de représenter AD par $+a$ ou simplement par a, et au contraire, de représenter AE par $-a$. Ce serait tout le contraire si, au lieu de rapporter le mouvement du point A au point L, on l'avait rapporté au point O.

Les quantités négatives ont donc une existence aussi réelle que les positives, et elles n'en diffèrent qu'en ce qu'elles ont une acception toute contraire dans le calcul.

Les quantités positives et les quantités négatives peuvent se trouver et se trouvent souvent mêlées ensemble dans un calcul, non-seulement parce que certaines opérations ont conduit, comme nous l'avons vu jusqu'ici, à retrancher certaines quantités d'autres quantités, mais encore parce que l'on a besoin d'exprimer dans le calcul les différens aspects sous lesquels on considère les quantités.

69. Si donc, après avoir résolu une question, il arrivait que la valeur de l'inconnue, trouvée par les méthodes ci-dessus, fût négative; par exemple, si l'on arrivait à un résultat tel que celui-ci; $x=-3$, il faudrait en conclure que la quantité qu'on a désignée par x n'a point les propriétés qu'on lui a supposées en faisant le calcul, mais des propriétés toutes contraires. Par exemple, si l'on proposait cette question : Trouver un nombre qui, étant ajouté à 15, donne 10; cette question est évidemment impossible; si l'on représente le nombre cherché par x, on aura cette équation $x+15=10$,

et par conséquent, en vertu des règles ci-dessus, $x = 10 - 15$, ou $x = -5$.

Cette dernière conclusion me fait donc voir que x, que j'avais considéré comme devant être ajouté à 15 pour former 10, en doit, au contraire, être retranché. Ainsi, toute solution négative indique quelque fausse supposition dans l'énoncé de la question, mais en même temps elle en indique la correction, en ce qu'elle marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens tout contraire.

70. Concluons donc de là, que si, après avoir résolu une question dans laquelle quelques-unes des quantités étaient prises dans un certain sens; si, dis-je, on veut résoudre cette même question en prenant ces mêmes quantités dans un sens tout opposé, il suffira de changer les signes qu'ont actuellement ces quantités. Par exemple, dans la question quatrième, résolue généralement pour le cas où les deux courriers allaient vers un même côté, si je veux avoir la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer dans le cas où ils viennent au-devant l'un de l'autre, j'y satisferai en changeant dans la valeur de x, que nous avons trouvée $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le signe de c. En effet, puisque le premier courrier vient au-devant du second, au lieu de s'en éloigner, il diminue le chemin que celui-ci doit faire; et il le diminue à raison du chemin c qu'il fait par heure; il faut donc exprimer que c, au lieu d'ajouter, retranche; il faut donc, au lieu de $+c$, mettre $-c$. Ce changement donnera $x = \frac{ad - bcd}{c + d}$; car en changeant le signe de c, dans le terme bcd qui n'est autre chose que..... $+ bd \times + c$, il faudrait écrire $+ bd \times - c$, qui (24) revient à $-bcd$.

Confirmons tout cela par un exemple : supposons deux courriers venant en sens contraire, et partis de deux endroits éloignés de 100 lieues. Le premier part 7 heures avant le second, et fait 2 lieues par heure, le second en fait 3

par heure. En nommant x le chemin que fera le second jusqu'à la rencontre, je vois que x sera égal à la différence entre la distance totale et le chemin qu'aura fait le premier courrier : or le chemin qu'aura fait celui-ci est composé du chemin qu'il peut faire pendant 7 heures, et du chemin qu'il fera pendant que le second sera en marche : à l'égard de ce dernier chemin, on le déterminera en calculant le quatrième terme de cette proportion $3 : 2 :: x :$; ce quatrième sera $\frac{2x}{3}$; et puisque le chemin que fait le premier courrier pendant les 7 heures qu'il a d'avance, doit être de 14 lieues, à raison de 2 lieues par heure, il aura donc fait en tout $14 + \frac{2x}{3}$; donc il ne reste à faire pour le second courrier, que la quantité $100 - 14 - \frac{2x}{3}$ ou $86 - \frac{2}{3}x$: puis donc qu'on a représenté par x ce qu'il avait à faire, il faut que

$$x = 86 - \tfrac{2}{3}x ; \text{ d'où } x = \tfrac{258}{5} = 51\tfrac{3}{5}.$$

Or si l'on substitue dans la formule $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$ que nous prétendons convenir à ce cas; si l'on substitue, dis-je, 100 pour a, 7 pour b, 3 pour d, et 2 pour c, on aura

$$x = \frac{100 \times 3 - 7 \times 2 \times 3}{3 + 2} = \frac{300 - 42}{5} = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5} ;$$

ce qui est absolument la même chose. A mesure que nous avancerons, nous aurons soin de fixer de plus en plus l'idée qu'on doit se faire des quantités négatives.

71. Comme il importe beaucoup d'acquérir la facilité de mettre les problèmes en équation, nous joignons ici quelques questions simples pour exercer les commençans, nous contentant d'en donner le résultat pour servir à confirmer leurs essais. Après avoir résolu ces questions en nombres, ainsi qu'elles sont proposées, on fera très bien de s'exercer à les résoudre, en substituant des lettres aux nombres ; c'est en imitant ainsi les

solutions particulières, que l'on acquiert la facilité de généraliser et d'étendre ses idées.

Trouver un nombre qui étant successivement ajouté à 5 *et à* 12, *donne deux sommes qui soient l'une à l'autre comme* 3 *est à* 4. Rép. 16.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers et les $\frac{2}{5}$ *réunis surpassent ce nombre de* 7. Rép. 30.

On emploie trois ouvriers dont le premier fait 5 *toises d'ouvrage par jour, le second* 7, *et le troisième* 8; *on demande en quel temps ces trois ouvriers, travaillant ensemble, feront* 100 *toises?* Rép. 5 jours.

On a loué un ouvrier paresseux, à raison de 24 *sous pour chaque jour qu'il travaillerait; mais à condition de lui retenir, sur ce qui lui serait dû,* 6 *sous pour chaque jour qu'il ne travaillerait pas. On lui fait son compte au bout de* 30 *jours, et il se trouve qu'il n'a rien à recevoir; on demande combien de jours il a travaillé?* Rép. 6 jours.

Un homme achète un cheval qu'il vend ensuite 100 *livres de plus qu'il ne l'a acheté. A ce marché il se trouve gagner* 10 *pour* 100 *du prix qu'il le vend; on demande combien il l'a acheté?* Rép. 900 liv.

On a payé une certaine somme en 15 *paiemens qui ont été en augmentant toujours de la même quantité; le premier paiement a été de* 7 *livres, le dernier de* 37 *livres; on demande de combien chaque paiement augmentait?* Rép. 2 $\frac{1}{7}$.

On a de l'eau de mer qui, sur 32 *livres, contient une livre de sel; on demande combien il faudrait y mêler d'eau douce pour que sur* 32 *livres du mélange il n'y eût plus que* 2 *onces de sel?* Rép. 224 livres.

Des équations du premier degré, à plusieurs inconnues.

72. Soit qu'il y ait plusieurs inconnues, soit qu'il n'y en ait qu'une, la méthode qu'on doit suivre pour mettre en équation est toujours la même. Mais, en général, il faut former autant d'équations que peuvent en donner les condi-

tions de la question. Si ces conditions sont toutes distinctes et indépendantes les unes des autres, et si, en même temps, chacune peut être exprimée par une équation, la question ne peut avoir plus d'une solution lorsque toutes ces équations sont du premier degré, et qu'en même temps il y en a autant que d'inconnues. Mais si quelqu'une des conditions se trouve ou explicitement ou implicitement comprise dans quelqu'une des autres, ou si le nombre des conditions est moindre que le nombre des inconnues, alors on aura moins d'équations que d'inconnues, et la question peut avoir une infinité de solutions, à moins que quelque condition particulière, mais qui ne peut être exprimée par une équation, n'en limite le nombre. Nous éclaircirons tout cela par des exemples.

Nous supposerons d'abord deux équations et deux inconnues, Les règles que nous avons établies concernant les équations à une inconnue ont également lieu pour les équations à plusieurs inconnues, mais il faut y ajouter la règle suivante pour les équations à deux inconnues.

73. *Prenez dans chaque équation la valeur d'une même inconnue, en opérant comme si tout le reste était connu : égalez ces deux valeurs, et vous aurez une équation qui ne renfermera plus que la seconde inconnue, que vous déterminerez par les règles précédentes. Cette seconde inconnue étant trouvée, substituez sa valeur dans l'une ou l'autre des deux valeurs que vous avez prises par la première opération, et vous aurez la seconde inconnue.* Par exemple, si j'avais les deux équations

$$2x + y = 24, \quad 5x + 3y = 65,$$

de la première, je tire, en transposant, $2x = 24 - y$, et en divisant, $x = \frac{24 - y}{2}$. De la seconde, je tire, en transposant, $5x = 65 - 3y$, et en divisant, $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

J'égale les deux valeurs de x, en écrivant

$$\frac{24-y}{2}=\frac{65-3y}{5};$$

équation qui ne renferme plus que la seconde inconnue y. Pour avoir la valeur de y, je chasse les dénominateurs 2 et 5, et j'ai

$$120-5y=130-6y; \quad \text{d'où } y=10.$$

Pour avoir x, je substitue, au lieu de y, sa valeur 10 dans la première valeur de x trouvée ci-dessus. (On pourrait également substituer dans la seconde.) Cette substitution me donne

$$x=\frac{24-10}{2}=\frac{14}{2}=7.$$

74. Prenons pour second exemple les deux équations

$$\frac{4x}{5}-\frac{5y}{6}=2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=19.$$

Je commence par chasser les dénominateurs dans chacune de ces équations, ce qui les change en ces deux autres:

$$24x-25y=60, \quad \text{et } 8x+9y=228.$$

De la première de ces deux-ci, je tire

$$24x=60+25y \quad \text{et} \quad x=\frac{60+25y}{24};$$

de la seconde,

$$8x=228-9y, \quad \text{et} \quad x=\frac{228-9y}{8}.$$

J'égale ces deux valeurs de x, en écrivant

$$\frac{60+25y}{24}=\frac{228-9y}{8};$$

équation qui ne renferme plus que y. Pour avoir la valeur de cette inconnue, je chasse les dénominateurs, et j'ai

$$480+200y=5472-216y; \quad \text{d'où } y=12.$$

Pour avoir x, je mets au lieu de y, sa valeur 12 dans l'une ou

l'autre des deux valeurs de x, dans la première, par exemple, et je trouve

$$x = \frac{60 + 25 \times 12}{24} = \frac{60 + 300}{24} = \frac{360}{24} = 15.$$

75. Prenons pour troisième exemple, les deux équations

$$\tfrac{2}{5}x = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{7}y - 9, \quad \text{et} \quad \tfrac{4}{5}x - \tfrac{2}{7}y = \tfrac{1}{2}y - 6.$$

Je commence par faire disparaître les dénominateurs. J'ai

$$56x = 35x + 60y - 1260, \quad \text{et} \quad 56x - 20y = 35y - 420.$$

De la première, je tire

$$21x = 60y - 1260, \quad \text{et} \quad x = \frac{60y - 1260}{21}$$

La seconde me donne

$$56x = 55y - 420, \quad \text{et} \quad x = \frac{55y - 420}{56}.$$

Égalant ces deux valeurs de x, j'ai

$$\frac{60y - 1260}{21} = \frac{55y - 420}{56} : \quad \text{d'où } y = 28.$$

Pour avoir la valeur de x, je substitue, au lieu de y, sa valeur 28 dans l'équation $x = \frac{60y - 1260}{21}$ trouvée ci-dessus; ce qui donne

$$x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{1680 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20.$$

76. Si les équations étaient littérales, on opérerait de la même manière. Ainsi, si l'on avait les deux équations

$$ax + by = c, \text{ et } dx + fy = e,$$

dans lesquelles a, b, c, d, e, f, marquent des quantités connues, positives ou négatives; la première donnerait, par transposition, $ax = c - by$, et par division, $x = \frac{c - by}{a}$; la seconde donnerait de même, par transposition, $dx = e - fy$, et par

division, $x = \frac{c - fy}{d}$. Égalant ces deux valeurs de x, on aurait

$$\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d};$$

chassant les dénominateurs, on a $cd - bdy = ae - afy$; transposant, $afy - bdy = ae - cd$;

enfin divisant (61), on a $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

Pour avoir la valeur de x, il faut substituer, au lieu de y, sa valeur $\frac{ae - cd}{af - bd}$, dans l'une des deux valeurs de x, dans $x = \frac{c - by}{a}$, par exemple.

Cette substitution donnera

$$x = \frac{1}{a}\left\{c - b\left(\frac{ae - cd}{af - bd}\right)\right\} = \frac{fc - be}{af - bd}.$$

77. Nous avons supposé jusqu'ici que les deux inconnues se trouvaient toutes deux dans chaque équation. Lorsque cela n'arrive point, le calcul ne diffère des précédens qu'en ce qu'il est plus simple. Par exemple, si l'on avait

$$5ax = 3b, \text{ et } cx + dy = e,$$

la première donnerait $x = \frac{3b}{5a}$; et la seconde, $x = \frac{e - dy}{c}$.

Égalant ces deux valeurs, on aurait

$$\frac{3b}{5a} = \frac{e - dy}{c}; \text{ d'où } y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}.$$

Des équations du premier degré, à trois et à un plus grand nombre d'inconnues.

78. Ce que nous venons de dire étant une fois bien conçu, il est facile de voir comment on doit se conduire lorsque le nombre des inconnues et des équations est plus considérable. Nous supposerons toujours qu'on ait autant d'équations que

d'inconnues. Si l'on en a trois, *on prendra, dans chacune, la valeur d'une même inconnue, comme si tout le reste était connu. On égalera ensuite la première valeur à la seconde, et la première à la troisième; ou bien l'on égalera la première à la seconde, et la seconde à la troisième. On aura, par ce procédé, deux équations à deux inconnues seulement, et on les traitera par la règle précédente* (73).

Soient, par exemple, les trois équations

$$3x+5y+7z=179, 8x+3y-2z=64, 5x-y+3z=75.$$

De la première, je tire

$$3x=179-5y-7z,\ x=\frac{179-5y-7z}{3};$$

de la seconde,

$$8x=64-3y+2z,\ \text{et}\ x=\frac{64-3y+2z}{8};$$

de la troisième,

$$5x=75+y-3z,\ \text{et}\ x=\frac{75+y-3z}{5}.$$

Égalant la première valeur de x à la seconde, et la première à la troisième, j'ai

$$\frac{179-5y-7z}{3}=\frac{64-3y+2z}{8}\ \text{et}\ \frac{179-5y-7z}{3}=\frac{75+y-3z}{5}.$$

Comme il n'y a plus que deux inconnues, je traite ces deux dernières équations suivant la règle donnée (73) pour les équations à deux inconnues. Je chasse donc les dénominateurs, ce qui me donne les deux équations suivantes :

$$1432-40y-56z=192-9y+6z,$$
$$\text{et}\qquad 895-25y-35z=225+3y-9z.$$

Je prends, dans chacune de ces équations la valeur de y : la première me donne, en transposant et réduisant.....

$1240-62z=31y$, et en divisant, $y=\frac{1240-62z}{31}$. La seconde

me donne, en transposant et réduisant, $670 - 26z = 28y$, et en divisant, $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

J'égale ces deux valeurs de y, et j'ai

$$\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}; \text{ d'où } z = 15.$$

Pour avoir y, je mets, au lieu de z, sa valeur 15 dans l'équation $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, que nous venons de trouver ci-dessus; ce qui me donne

$$y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{1240 - 930}{31} = \frac{310}{31} = 10.$$

Enfin, pour avoir x, je mets, au lieu de y, sa valeur 10, et au lieu de z, sa valeur 15 dans l'une des trois valeurs de x trouvées ci-dessus; par exemple, dans la première, qui devient par là

$$x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{179 - 50 - 105}{3} = \frac{179 - 155}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

79. Si toutes les inconnues n'entraient pas à la fois dans chaque équation, le calcul serait plus simple, mais se ferait toujours d'une manière analogue. Par exemple, si l'on avait les trois équations

$$5x + 3y = 65, \quad 2y - z = 11, \quad 3x + 4z = 57.$$

La première donnerait $x = \frac{65 - 3y}{5}$; la seconde ne donnerait point de valeur de x; la troisième donnerait $x = \frac{57 - 4z}{3}$; il n'y aurait donc que ces deux valeurs de x à égaler; elles donnent

$$\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3},$$

équation qui ne renferme plus d'x, et qui, étant traitée avec la seconde équation $2y - z = 11$, selon les règles des équations à deux inconnues, donnera les valeurs de y et de z. En achevant le calcul, on trouvera $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

80. On voit par là que s'il y avait un plus grand nombre d'équations, la règle générale serait : *Prenez, dans chaque équation la valeur d'une même inconnue ; égalez l'une de ces valeurs à chacune des autres, et vous aurez une équation et une inconnue de moins. Traitez ces nouvelles équations comme vous venez de faire pour les premières, et vous aurez encore une équation et une inconnue de moins. Continuez ainsi jusqu'à ce qu'enfin vous parveniez à n'avoir plus qu'une inconnue.*

81. Il ne sera peut-être pas inutile de placer ici une règle générale pour déterminer les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. Lorsque le nombre des inconnues est un peu considérable, et que les équations renferment tous les termes qu'elles peuvent renfermer, on est conduit, par la première méthode, si elles sont littérales, à des valeurs plus composées qu'il ne convient ; à la vérité, on peut les réduire, mais c'est un travail qui devient d'autant plus long que le nombre des inconnues est plus considérable. D'ailleurs nous réduirons, par la suite, l'art de chasser les inconnues dans les équations qui passent le premier degré, à celui de les chasser dans celles du premier degré. Les méthodes que l'on a eues jusqu'ici pour éliminer ou chasser les inconnues, dans les équations qui passent le premier degré, ont toutes (si l'on en excepte seulement celles qu'ont données MM. Euler et Cramer) l'inconvénient de conduire à des équations beaucoup plus composées qu'il ne faut. Ces dernières même ne sont point à l'abri de cet inconvénient, lorsqu'on a plus de deux inconnues. Il peut donc être utile de donner ici des moyens faciles pour avoir les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. C'est ce que nous allons faire, après avoir exposé une seconde méthode qui peut avoir son utilité dans plusieurs rencontres. Soient les deux équations

$$3x + 4y = 81, \quad \text{et} \quad 3x - 4y = 9.$$

Si l'on retranche la seconde de la première, on aura $8y = 72$, et par conséquent $y = 9$. Au contraire, si l'on ajoute la première équation à la seconde, on aura $6x = 90$, et par conséquent $x = 15$. On voit donc que lorsque les deux équations sont telles, que le coefficient de l'une des inconnues est le même dans chacune, il est très facile, par une simple addition ou une simple soustraction, de réduire les deux équations à n'avoir qu'une inconnue.

82. Mais ne peut-on pas ramener les équations à cet état ? On le peut toujours ; il suffit pour cela de multiplier l'une des deux équations par un nombre convenable. Voici comment on doit s'y prendre pour trouver ce nombre. Soient les deux équations

$$4x + 3y = 65, \quad \text{et} \quad 5x + 8y = 111.$$

Je représente par m le nombre dont il s'agit, et je multiplie l'une des

deux équations, la seconde, par exemple, par m; ce qui me donne... $5mx + 8my = 111m$. Je l'ajoute avec la première, et j'ai

$$4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m.$$

Si je veux maintenant faire disparaître les x, je n'ai qu'à supposer que le nombre m est tel que $4 + 5m = 0$, ce qui me donne $m = -\frac{4}{5}$. Cette supposition réduit l'équation à $(3 + 8m)y = 65 + 111m$, qui donne $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$; équation qui, en mettant pour m sa valeur $-\frac{4}{5}$, donne $y = 7$.

Si, au contraire, j'avais voulu faire disparaître les y, j'aurais supposé m tel que $3 + 8m = 0$, c'est-à-dire que j'aurais égalé à zéro le coefficient ou multiplicateur de y; ce qui m'aurait donné $m = -\frac{3}{8}$. Cette supposition réduit l'équation à

$$(4 + 5m)x = 65 + 111m, \quad \text{qui donne} \quad x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m};$$

équation qui, en mettant pour m sa valeur actuelle $-\frac{3}{8}$, donne $x = 11$.

83. Si l'on avait trois équations et trois inconnues, on multiplierait la seconde par un nombre m, et la troisième par un nombre n; et les ajoutant, ainsi multipliées, à la première, on supposerait égal à zéro le coefficient de chacune de deux des trois inconnues x, y et z. On aurait, pour déterminer m et n, deux équations que l'on traiterait comme dans le cas précédent.

Par exemple, prenons les trois équations

$$3x + 5y + 7z = 179, \quad 8x + 3y - 2z = 64, \quad 5x - y + 3z = 75,$$

que nous avons déjà traitées. En multipliant la seconde par m, la troisième par n, et les ajoutant à la première, on aura

$$3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n.$$

Si c'est x que je veux avoir, je supposerai

$$(1)... \quad 3 + 8m + 5n = 0, \quad \text{et} \quad 5 + 3m - n = 0,$$

ce qui réduit l'équation à

$$(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n,$$

qui donne $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$.

Mais les équations (1) donnent

$$m = -\frac{28}{23}, \quad \text{et} \quad n = \frac{31}{23},$$

substituant ces valeurs de m et de n dans la valeur de z, on trouvera $z = 15$.

On voit par là comment on s'y serait pris si, au lieu de z, on avait voulu avoir y ou x; mais lorsqu'une des inconnues est trouvée, il serait superflu de recommencer un calcul semblable pour chacune des autres; il faut substituer la valeur de cette inconnue dans les équations proposées, et employant une équation de moins, on détermine les autres valeurs, comme pour le cas où il y a une équation de moins.

84. En suivant cette méthode, ou la première, on peut trouver des formules générales qui représentent les valeurs des inconnues dans tous les cas imaginables. C'est ainsi qu'on trouvera que si l'on représente généralement deux équations du premier degré à deux inconnues, par

$$ax + by + c = 0, \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

ce qu'on peut toujours faire en passant tous les termes dans un même membre, et représentant par une seule lettre la totalité des quantités connues qui multiplie chaque inconnue, et la totalité des termes entièrement connus, on trouvera, dis-je, que les valeurs de x et de y sont exprimées de cette manière :

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Pareillement, si l'on représente trois équations du premier degré à trois inconnues par

$ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$,

on trouvera que les valeurs de x, y et z sont exprimées de cette manière :

$$z = \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c},$$

$$y = \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c},$$

$$x = \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}.$$

Pour 4 équations et 4 inconnues, on aurait 4 fractions dont le numérateur et le dénominateur auraient chacun 24 termes. Ils auraient 120 termes pour 5 inconnues, 720 pour 6, et ainsi de suite, selon le produit des nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. (*).

(*) Si l'on veut s'instruire plus à fond de la manière de déterminer les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré, on peut consulter l'ouvrage que nous avons publié en 1779, sous le titre, *Théorie générale des Equations algébriques*; Paris, in-4°. On y trouvera une

Applications des règles précédentes à la résolution de quelques questions qui renferment plus d'une inconnue.

85. Question première: *Un homme a deux espèces de monnaie : sept pièces de la plus forte espèce, avec douze pièces de la seconde, font* 288 *livres; et douze pièces de la première espèce, avec sept de la seconde, font* 358 *livres. On demande combien vaut chaque espèce de monnaie?* Si l'on savait combien vaut chaque espèce de pièce, en multipliant la valeur d'une pièce de la première espèce par 7 et celle d'une pièce de la seconde espèce par 12, et ajoutant les deux produits, on trouverait 288 livres. Pareillement, en multipliant la valeur d'une pièce de la première espèce par 12, celle de la seconde par 7, et ajoutant les deux produits, on trouverait 358 livres; cela étant, si je représente par x le nombre de livres ou la valeur d'une pièce de la première espèce, et par y celle d'une pièce de la seconde espèce, je pourrai raisonner ainsi: Chaque pièce de la première espèce valant x, les sept pièces vaudront 7 fois x, ou $7x$; par la même raison, 12 pièces de la seconde espèce vaudront $12y$; il faut donc que

$$7x + 12y = 288.$$

Un raisonnement semblable, à l'égard de la seconde condition, fera voir qu'il faut que

$$12x + 7y = 358.$$

Ces deux équations donnent $x = 24$, $y = 10$. Donc, la plus forte pièce était de 24 livres, et la plus petite de 10 livres. En effet, 7 pièces de 24 livres font 168 livres, qui, avec 12 pièces de 10 livres, ou 120 livres, font 288 livres. De plus, 12 pièces de 24 livres, qui font 288 livres, avec 7 pièces de 10 livres, qui font 70 livres, donnent 358 livres.

Question seconde : *On a mêlé ensemble une certaine quan-*

---

méthode très générale et très expéditive pour déterminer tout-à-la-fois ou séparément les valeurs des inconnues dans les équations, soit numériques, soit littérales.

tité d'or et une certaine quantité d'argent. Tout le mélange fait un volume de 12 *pouces cubes, et pèse* 100 *onces : un pouce cube d'or pèse* 12 *onces* $\frac{2}{3}$, *et un pouce cube d'argent pèse* 6 *onces* $\frac{8}{9}$. *On demande quelle est la quantité d'or et quelle est la quantité d'argent qui ont été alliées ?* Si l'on connaissait le nombre de pouces cubes de chaque espèce de matière, en ajoutant ces deux nombres, ils donneraient 12 pour leur somme. De plus, en prenant 12 onces $\frac{2}{3}$ autant de fois qu'il y a de pouces cubes d'or, c'est-à-dire en multipliant $12\frac{2}{3}$ par le nombre des pouces cubes d'or, on aurait le poids de l'or qui entre dans le mélange, et en multipliant de même 6 onces $\frac{8}{9}$ par le nombre de pouces cubes d'argent, on aurait le poids de l'argent ; et en ajoutant ces produits, ils formeraient 100 onces. Raisonnons donc de la même manière, en représentant par x le nombre des pouces cubes d'or, et par y le nombre des pouces cubes d'argent : il faut donc que

$$x + y = 12.$$

D'un autre côté, chaque pouce cube d'or pesant 12 onces $\frac{2}{3}$, ou $\frac{38}{3}$ d'once, un nombre x de pouces cubes d'or pesera $\frac{38}{3} \times x$, ou $\frac{38x}{3}$. Par la même raison, chaque pouce cube d'argent pesant 6 onces $\frac{8}{9}$, ou $\frac{62}{9}$ d'once, un nombre y de pouces cubes pesera $\frac{62}{9}y$; donc l'or et l'argent réunis peseront $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y$; or ils doivent peser 100 onces, donc

$$\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y = 100.$$

Ces deux équations donnent $x = 3$ et $y = 9$, c'est-à-dire qu'on a mêlé 3 pouces d'or avec 9 pouces d'argent. En effet, le tout fait 12 pouces cubes. D'ailleurs, 3 pouces cubes pesant chacun 12 onces $\frac{2}{3}$, font 38 onces, et 9 pouces cubes pesant chacun 6 onces $\frac{8}{9}$, font 62 onces, lesquelles, avec les 38, font 100 onces.

Si les deux matières qu'on a mêlées avaient des pesanteurs spécifiques (*) différentes, et si le volume, ainsi que le poids

(*) On appelle *pesanteur spécifique*, la pesanteur d'un corps dont le volume est connu. Quand on dit : Un tel corps pèse 12 livres, on ne détermine que le poids de ce corps, et non pas celui de l'espèce de matière dont il est composé ; mais quand on dit, par exemple : 12 pouces cubes

total du mélange, étaient différens de ce qu'on vient de supposer, la méthode, pour trouver les quantités de chaque espèce de matière, n'en serait pas moins la même; ainsi pour renfermer dans une seule, toutes les solutions des questions de cette espèce, supposons généralement que le nombre total des pouces cubes des deux espèces de matières soit a; que le poids total du mélange, exprimé en onces, soit b; que le poids d'un pouce cube de la première matière soit c, et celui d'un pouce cube de la seconde soit d (c et d étant exprimés en onces). Alors si nous représentons par x le nombre de pouces cubes de la première matière, et par y le nombre de pouces cubes de la seconde, nous aurons pour première équation

$$x + y = a.$$

D'ailleurs chaque pouce de la première matière pesant c d'once, dès qu'il y a x pouces cubes, la quantité de la première matière pesera $c \times x$, ou cx. Par la même raison, la quantité de la seconde matière pesera dy; en sorte que le total pesera $cx + dy$; et comme il est supposé peser b, il faut que

$$cx + dy = b.$$

Ces deux équations donnent

$$x = \frac{b - ad}{c - d}, \quad \text{et} \quad y = \frac{ac - b}{c - d}.$$

Ces formules peuvent fournir une règle susceptible d'un énoncé assez simple, pour la résolution générale de toutes les questions de cette espèce. Pour trouver cette règle, il faut faire attention, 1°. que b marque le poids total du mélange; 2°. que a marquant le nombre total des parties du mélange, et d le poids d'une des parties de la seconde espèce, ad marque ce que peserait le volume du mélange, s'il était composé seulement de la matière de la seconde espèce. En effet,

---

d'eau pèsent 7 onces 6 gros, alors on détermine la pesanteur de cette espèce d'eau; on met en état de déterminer combien pèse tout autre volume de cette même eau.

si tout le volume était d'argent, par exemple, on trouverait son poids total en multipliant la pesanteur d d'un pouce cube d'argent, par le nombre total a des pouces cubes. Enfin le dénominateur $c-d$ est la différence des pesanteurs spécifiques de chaque espèce de matière. Si l'on analyse de même la valeur de y, on verra que ac est ce que peserait le volume du mélange, s'il était uniquement composé de la première matière. De là on pourra conclure cette règle :

Calculez ce que peserait le volume du mélange, s'il était composé seulement de la seconde matière; retranchez ce poids du poids total actuel du mélange, et divisez le reste par la différence des pesanteurs spécifiques des deux matières : le quotient sera le nombre des parties de la première qui entre dans le mixte. Pour avoir le nombre des parties de la seconde matière, calculez ce que peserait le volume du mélange, s'il était tout entier de la première matière; retranchez-en le poids total actuel du mélange, et divisez le reste par la même quantité que ci-dessus. Cette règle est précisément ce qu'on appelle en Arithmétique, *la règle d'alliage*, et qu'en Arithmétique nous avons renvoyée à cette troisième partie.

On peut à cette même question en ramener une infinité d'autres qui, au premier coup d'œil, ne semblent pas de même espèce : par exemple, celle-ci : *Faire 522 livres en 42 pièces, les unes de 24 livres, et les autres de 6 livres;* car avec un peu d'attention, on voit que cette question est la même que cette autre : *un mixte composé de 42 pouces cubes de matière pèse 522 onces; des deux matières qui y entrent, l'une pèse 24 onces par pouce cube, et l'autre 6 onces.* En suivant la règle précédente, on trouvera qu'il faut 15 pièces de 24 livres et 27 pièces de 6 livres.

La même règle servirait encore à résoudre cette autre question : *Un pied cube d'eau de mer pèse 74 livres, un pied cube d'eau de pluie pèse 70 livres; combien faudrait-il mêler ensemble d'eau de mer et d'eau de pluie, pour faire de l'eau qui pesât 73 livres par pied cube ?*

On voit par là combien il peut être utile de s'accoutumer

de bonne heure à représenter, d'une manière générale, les quantités connues qui entrent dans les questions, et à interpréter ou traduire les résultats algébriques des solutions des problèmes.

Question troisième : *On a trois lingots, dans chacun desquels il entre de l'or, de l'argent et du cuivre. L'alliage dans le premier est tel, que sur* 16 *onces, il y en a* 7 *d'or,* 8 *d'argent et* 1 *de cuivre. Dans le second, sur* 16 *onces, il y en a* 5 *d'or,* 7 *d'argent et* 4 *de cuivre. Dans le troisième, sur* 16 *onces, il y en a* 2 *d'or,* 9 *d'argent et* 5 *de cuivre. On veut, en prenant différentes parties de ces trois alliages, composer un quatrième lingot, tel, que sur* 16 *onces, il s'en trouve* 4 *onces et* $\frac{15}{16}$ *en or,* $7\frac{10}{16}$ *en argent, et* $3\frac{7}{16}$ *en cuivre.* Représentons par x le nombre d'onces qu'il faut prendre du premier lingot; par y, le nombre d'onces qu'il faut prendre du second, et enfin par z le nombre d'onces qu'il faut prendre du troisième. Puisque 16 onces du premier contiennent 7 onces d'or, on trouvera ce que x onces de ce premier lingot peuvent contenir d'or, en calculant le quatrième terme de cette proportion $16 : 7 :: x :$; ce quatrième terme sera $\frac{7x}{16}$; par un raisonnement semblable, on trouvera qu'en prenant y onces du second lingot, on prend $\frac{5y}{16}$ en or, et sur le troisième $\frac{2z}{16}$. Ces trois quantités réunies font $\frac{7x+5y+2z}{16}$; or, on veut qu'elles fassent $4\frac{15}{16}$ ou $\frac{79}{16}$; donc

$$\frac{7x+5y+2z}{16} = \frac{79}{16}.$$

Pour satisfaire à la seconde condition, on remarquera, de même, qu'en prenant x onces sur le premier lingot, on prend nécessairement $\frac{8x}{16}$ d'onces en argent, sur le second $\frac{7y}{16}$, et enfin sur le troisième, on prend nécessairement $\frac{9z}{16}$; ces

trois quantités réunies font $\frac{8x+7y+9z}{16}$; et comme on veut qu'elles fassent $7\frac{10}{16}$ ou $\frac{122}{16}$, on aura

$$\frac{8x+7y+9z}{16} = \frac{122}{16}.$$

En procédant de la même manière, on aura, pour satisfaire à la troisième condition, l'équation

$$\frac{x+4y+5z}{16} = \frac{55}{16}.$$

Comme le nombre 16 est diviseur commun des deux membres de chacune des trois équations qu'on vient de trouver, on peut le supprimer, et alors on aura les trois équations suivantes :

$$7x+5y+2z=79;\ 8x+7y+9z=122;\ x+4y+5z=55.$$

Tirant de chacune la valeur de x, on aura

$$x=\frac{79-5y-2z}{7},\ x=\frac{122-7y-9z}{8},\ x=55-4y-5z;$$

égalant la première valeur de x, à la seconde et à la troisième (78) on aura

$$\frac{79-5y-2z}{7}=\frac{122-7y-9z}{8} \text{ et } \frac{79-5y-2z}{7}=55-4y-5z;$$

équations qui ne renferment plus que deux inconnues, et qu'il faut, par conséquent, traiter selon ce qui a été dit (73). Pour cet effet, je commence par faire disparaître les diviseurs, et j'ai

$$632 - 40y - 16z = 854 - 49y - 63z,$$
$$\text{et} \quad 79 - 5y - 2z = 385 - 28y - 35z,$$

ou en passant tous les y d'un côté et réduisant,

$$9y = 222 - 47z, \quad \text{et} \quad 23y = 306 - 33z;$$

ces équations donnent

$$y=\frac{222-47z}{9} \quad \text{et} \quad y=\frac{306-33z}{23};$$

égalant ces deux valeurs de y, j'ai

$$\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23};$$

chassant les diviseurs,

$$5106 - 1081z = 2754 - 297z;$$

transposant, $5106 - 2754 = 1081z - 297z$;

réduisant, $2352 = 784z$; et enfin, en divisant,

$$z = \frac{2352}{784} = 3.$$

Pour avoir la valeur de y, je substitue dans l'une des deux valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour y, j'y substitue, dis-je, au lieu de z, sa valeur 3, qu'on vient de trouver; par exemple, en substituant dans

$$y = \frac{222 - 47z}{9}, \text{ j'ai } y = \frac{222 - 141}{9} = 9.$$

Enfin, pour avoir x, je substitue, au lieu de y et de z, leurs valeurs 9 et 3 dans l'une des trois valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour x; par exemple, dans la dernière, savoir, $x = 55 - 4y - 5z$, et cette valeur devient

$$x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4;$$

c'est-à-dire, puisqu'on trouve $x = 4$, $y = 9$ et $z = 3$, qu'il faut prendre 4 onces du premier lingot, 9 du second, et 3 du troisième, et alors le nouveau lingot contiendra en or, 4 onces et $\frac{15}{16}$; en argent, 7 onces $\frac{10}{16}$, et en cuivre, 3 onces $\frac{7}{16}$.

En effet, puisque le premier lingot contient sur 16 onces, 7 onces d'or, 8 d'argent et 1 de cuivre, il est évident que si l'on prend 4 onces seulement de ce lingot, on aura $\frac{28}{16}$ d'once en or, $\frac{32}{16}$ en argent et $\frac{4}{16}$ en cuivre. Par une raison semblable, en prenant 9 onces du second lingot, on aura $\frac{45}{16}$ en or, $\frac{63}{16}$ en argent, et $\frac{36}{16}$ en cuivre; et en prenant 3 onces du troisième lingot, on aura $\frac{6}{16}$ en or, $\frac{27}{16}$ en argent, et $\frac{15}{16}$ en cuivre. Réunissant les trois quantités de chaque espèce de matière, provenant des trois lingots, on aura $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{58}{16}$,

pour les quantités d'or, d'argent et de cuivre qui entreront dans le quatrième lingot.

Des cas où les questions proposées restent indéterminées, quoiqu'on ait autant d'équations que d'inconnues, et des cas où les questions sont impossibles.

86. Il arrive quelquefois que, quoiqu'on ait autant d'équations que d'inconnues, la question qui a conduit à ces équations reste néanmoins indéterminée, c'est-à-dire qu'elle est alors susceptible d'un nombre indéfini de solutions. Ce cas a lieu lorsque quelques-unes des conditions, quoique différentes en apparence, se trouvent être les mêmes dans le fond. Alors les équations qui expriment ces conditions sont ou des multiples les unes des autres, ou, en général, quelques-unes d'entre elles sont composées d'une ou plusieurs des autres, ajoutées ou soustraites, multipliées ou divisées par certains nombres. Par exemple, une question qui conduirait à ces trois équations

$5x+3y+2z=17$, $8x+2y+4z=20$, $18x+8y+8z=54$,

serait susceptible d'un nombre indéfini de solutions, quoiqu'il semble, d'après ce que nous avons vu plus haut, que x, y et z ne peuvent avoir chacun qu'une seule valeur. De ces trois équations, la dernière est composée de la seconde ajoutée avec le double de la première. Or il est évident que les deux premières étant une fois supposées avoir lieu, la troisième s'ensuit nécessairement; que, par conséquent, elle n'exprime aucune nouvelle condition: on est donc dans le même cas que si l'on avait seulement les deux premières équations: or nous verrons dans peu que, lorsqu'on n'a que deux équations pour trois inconnues, chaque inconnue est susceptible d'un nombre indéfini de valeurs.

87. Le calcul fait toujours connaître les cas dont il s'agit ici: voici comment. Il n'y a qu'à procéder à la recherche des inconnues, selon les règles données ci-dessus: alors si quelqu'une des équations est comprise dans les autres, on arrivera, dans

le cours du calcul, à une équation *identique*, c'est-à-dire à une équation dans laquelle les deux membres seront non-seulement égaux, mais encore composés de termes semblables et égaux : autant on trouvera d'équations identiques, autant il y aura d'équations inutiles parmi celles qui auront été proposées. Par exemple, si de chacune des deux équations

$$6x + 8y = 12 \quad \text{et} \quad x + \tfrac{4}{3}y = 2,$$

je tire la valeur de x, j'aurai, en égalant ces valeurs,

$$\frac{12 - 8y}{6} = 2 - \tfrac{4}{3}y. \quad \text{ou} \quad 36 - 24y = 36 - 24y;$$

équation identique, et qui ne peut faire connaître la valeur de y, parce qu'après la transposition et la réduction, on est conduit à cette équation, $0 = 0$.

Pareillement, des trois équations ci-dessus, on tire

$$x = \frac{17 - 3y - 2z}{5}, \quad x = \frac{20 - 2y - 4z}{8}, \quad x = \frac{54 - 8y - 8z}{18};$$

égalant la première de ces valeurs à la seconde et à la troisième, on aura $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{20 - 2y - 4z}{8}$ et $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{54 - 8y - 8z}{18}$; chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et divisant, on aura

$$y = \frac{36 + 4z}{14} \quad \text{et} \quad y = \frac{36 + 4z}{14};$$

valeurs qui, étant égalées, donnent l'équation identique

$$\frac{36 + 4z}{14} = \frac{36 + 4z}{14};$$

il n'y a donc, dans ce cas, que deux équations réellement distinctes.

Mais si l'on avait les trois équations suivantes :

$$5x + 3y + 2z = 24, \quad \tfrac{25}{2}x + \tfrac{15}{2}y + 5z = 60, \quad 15x + 9y + 6z = 72,$$

elles donneraient

$$x = \frac{24 - 3y - 2z}{5}, \quad x = \frac{120 - 15y - 10z}{25}, \quad x = \frac{72 - 9y - 6z}{15}.$$

Égalant la première de ces valeurs à la seconde et à la troisième, on aurait

$$\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{120 - 15y - 10z}{25}, \quad \frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$$

et en chassant les dénominateurs,

$$600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z,$$
$$360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z;$$

équations identiques, et dont on ne peut tirer ni y ni z, parce qu'elles se réduisent chacune à $0 = 0$. Il n'y a donc ici, à proprement parler, qu'une seule équation.

Les questions qui conduisent à de pareils résultats sont indéterminées, mais ne sont pas impossibles. Nous verrons dans peu comment on doit les traiter.

88. Dans le cas dont nous venons de parler, le numérateur et le dénominateur de chacune des valeurs des inconnues x, y, z, etc., que nous avons données (84), deviennent 0; ce qui doit être, ainsi qu'on peut le conclure facilement de ce que nous venons de dire. On peut donc, par le moyen de ces mêmes formules générales, reconnaître les cas où quelques-unes des équations seront comprises dans les autres.

89. Lorsqu'une question qui ne conduit qu'à des équations du premier degré est impossible, on s'en aperçoit à ce que la suite du calcul conduit à une absurdité, par exemple, à $4 = 3$. Si l'on avait, par exemple, les deux équations

$$5x + 3y = 30 \quad \text{et} \quad 20x + 12y = 135,$$

elles donneraient

$$\frac{30 - 3y}{5} = \frac{135 - 12y}{20},$$

qui conduit à $600 = 675$; ce qui est absurde : donc la question qui fournirait les deux équations proposées est impossible.

90. Les solutions négatives indiquent aussi une sorte d'impossibilité dans la question; mais cette impossibilité n'est pas absolue, elle est relative au sens dans lequel les quantités ont été prises; en sorte qu'il y a un sens dans lequel ces solutions sont naturelles ou admissibles. [*Voyez* ce qui a été dit (69).]

Des problèmes indéterminés.

91. On appelle *problème indéterminé* toute question à laquelle on peut satisfaire de plusieurs manières, sans pouvoir déterminer parmi toutes ces manières, quelle est celle qui donne lieu à la question. Ces sortes de problèmes ont toujours moins de conditions que d'inconnues, et, envisagés, généralement, ils sont susceptibles d'une infinité de solutions; mais il arrive souvent aussi que le nombre de ces solutions est limité par quelques conditions qui, ne pouvant pas être réduites en équations, ne permettent pas de déterminer d'une manière directe le nombre des solutions que la question peut avoir. Si l'on proposait cette question : *Trouver deux nombres qui, pris ensemble, fassent* 24; en nommant x l'un de ces nombres, et y l'autre, on aurait $x+y=24$, équation de laquelle on tire $x=24-y$. Or cette question est susceptible d'une infinité de solutions, si par x et y on entend indifféremment des nombres entiers, ou des nombres fractionnaires, et des nombres positifs ou négatifs: il suffit, pour y satisfaire, de prendre pour y tel nombre qu'on voudra, et de conclure la valeur de x de l'équation $x=24-y$, en y substituant pour y le nombre qu'on aura pris arbitrairement; ainsi si l'on suppose successivement

$$y=1,\quad y=1\tfrac{1}{2},\quad y=2,\quad y=2\tfrac{2}{3},\quad \text{etc.},$$

on aura $x=23$, $x=22\tfrac{1}{2}$, $x=22$, $x=21\tfrac{1}{3}$, etc.

Mais si l'on ne veut que des nombres entiers et positifs, alors le nombre des solutions est limité; car pour que x soit positif, il faut que y ne soit pas plus grand que 24. Et puisqu'on ne veut que des nombres entiers, il est évident que l'équation

ne peut avoir en tout que 25 solutions en y comprenant 0 : en sorte que supposant successivement

$$y=0,\quad y=1,\quad y=2,\quad y=3,\quad \text{etc.},$$

on aura $x=24$, $x=23$, $x=22$, $x=21$, etc.

92. Mais lorsqu'on impose la condition que les nombres demandés soient des nombres entiers et positifs, on ne voit pas toujours aussi facilement que dans l'exemple précédent, comment on peut satisfaire à cette condition : les questions suivantes sont propres à le faire connaître.

Question première. *On demande de combien de manières on peut payer* 542 *livres, en donnant des pièces de* 17 *livres, et recevant en échange des pièces de* 11 *livres.* Représentons par x le nombre des pièces de 17 liv., et par y celui des pièces de 11 liv. ; en donnant x pièces de 17 liv., on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pièces de 11 liv., on recevra $11y$; par conséquent on aura payé $17x-11y$; et puisqu'on veut payer 542 liv., on aura $17x-11y=542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire de l'inconnue qui a le moindre coefficient, et nous aurons

$$y=\frac{17x-542}{11}.$$

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation ; mais comme la question exige que x et y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de y se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à

$$y=x-49+\frac{6x-3}{11};$$

il faut donc que $\frac{6x-3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier, on aura

$$6x-3=11u \text{ et } x=\frac{11u+3}{6}=u+\frac{5u+3}{6};$$

il faut donc que $\frac{5u+3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier, on aura

$$5u+3=6t \text{ et } u=\frac{6t-3}{5}=t+\frac{t-3}{5};$$

il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura

$$t=5s+3:$$

l'opération est terminée, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x et y : puisqu'on a trouvé $u=\frac{1}{5}(6t-3)$, en mettant pour t sa valeur $5s+3$, on aura

$$u=\frac{30s+18-3}{5}=6s+3;$$

et puisqu'on a trouvé $x=\frac{11u+3}{6}$,

en mettant pour u sa valeur, on aura

$$x=\frac{66s+33+3}{6}=11s+6;$$

enfin puisqu'on a trouvé

$$y=\tfrac{1}{11}(17x-542)$$

en substituant pour x sa valeur, on aura

$$y=\frac{187s+102-542}{11}=17s-40;$$

ainsi les valeurs correspondantes de x et de y sont

$$x=11s+6 \quad \text{et} \quad y=17s-40.$$

Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier positif qu'on voudra ; mais la seconde ne permet pas de prendre s

plus petit que 3 : en effet, y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire plus grand que 2. On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x et de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini ; ainsi posant successivement

$$s=3,\ s=4,\ s=5,\ s=6,\ \text{etc.},$$

les valeurs correspondantes de x et de y seront

$x=39$ et $y=11$; $x=50$ et $y=28$; $x=61$ et $y=45$, etc.,

dont chacune est telle, qu'en donnant le nombre de pièces de 17 liv. désigné par x, et recevant le nombre correspondant de pièces de 11 liv. désigné par y, on paiera 542 liv.

Question seconde. *Faire* 741 *liv. en* 41 *pièces de trois espèces : savoir, de* 24 *liv., de* 19 *liv. et de* 10 *livres.* Soient x, y et z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces ; 1°. puisqu'on veut en tout 41 pièces, on aura

$$x+y+z=41 ;$$

2°. chaque pièce de la première espèce valant 24 liv., le nombre x des pièces vaudra x fois 24 liv. ou $24x$; par la même raison, y pièces de la seconde espèce vaudront $19y$, et z pièces de la troisième espèce vaudront $10z$; ainsi les valeurs réunies des trois nombres de pièces différentes monteront à $24x+19y+10z$, et comme elles doivent monter à 741 liv., on aura

$$24x+19y+10z=741.$$

Je prends, dans chacune de ces équations, la valeur d'une même inconnue, peu importe laquelle, de x, par exemple, et j'ai

$$x=41-y-z, \text{ et } x=\frac{741-19y-10z}{24} ;$$

j'égale ces deux valeurs, et j'ai

$$41-y-z=\frac{741-19y-10z}{24},$$

ou, chassant le dénominateur,

$$984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z;$$

transposant et réduisant, on a

$$243 = 5y + 14z.$$

Je prends maintenant la valeur de y qui a le plus petit coefficient, et j'ai

$$y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5};$$

or, y et z devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{3 - 4z}{5}$ soit un nombre entier : soit donc t ce nombre entier, on aura

$$3 - 4z = 5t; \text{ donc } z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4};$$

il faut donc que $\frac{3 - t}{4}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre, on aura

$$3 - t = 4u \quad \text{et} \quad t = 3 - 4u.$$

Remontons maintenant aux valeurs de y, z et x. Puisqu'on vient de trouver $z = \frac{3 - 5t}{4}$, on aura, en mettant pour t sa valeur

$$z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3;$$

et puisqu'on a trouvé $y = \frac{243 - 14z}{5}$, en mettant pour z sa valeur, on aura

$$y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u.$$

Enfin, puisqu'on a trouvé $x = 41 - y - z$, on aura

$$x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13.$$

En sorte que les valeurs correspondantes de x, y et z, sont

$$x = 9u - 13, \quad y = 57 - 14u, \text{ et } z = 5u - 3,$$

dans lesquelles on peut mettre pour u tel nombre entier qu'on voudra, pourvu qu'il en résulte des nombres positifs pour x, y et z : or cette condition emporte ces trois autres : 1°. que $9u$ soit plus grand que 13, ou que u soit plus grand que $\frac{13}{9}$ ou $1\frac{4}{9}$; 2°. que 57 soit plus grand que $14u$, ou que u soit plus petit que $\frac{57}{14}$, c'est-à-dire plus petit que $4\frac{1}{14}$; 3°. enfin, que $5u$ soit plus grand que 3, ou u plus grand que $\frac{3}{5}$; ce qui ne peut manquer d'arriver, dès qu'on observera la première condition : ainsi le nombre des solutions est donc très limité, et se réduit à trois que l'on trouve en donnant à u pour valeurs les nombres 2, 3 et 4, qui sont les seuls que l'état de la question admette. On ne peut donc faire 741 liv. en 41 pièces des trois espèces proposées, qu'en prenant les nombres de pièces marqués ci-dessous, et qu'on trouve, en mettant pour u les nombres 2, 3, 4, successivement dans chacune des valeurs de x, y et z.

$u = 2$, donne $x = 5$, $y = 29$ et $z = 7$;
$u = 3$, donne $x = 14$, $y = 15$ et $z = 12$;
$u = 4$, donne $x = 23$, $y = 1$ et $z = 17$.

Dans le cours des divisions que l'on fait pour réduire la valeur de l'indéterminée à un nombre entier, rien n'oblige à prendre le quotient plutôt au-dessous de sa véritable valeur qu'au-dessus. Il est même quelquefois plus expéditif de le prendre de cette dernière manière. Par exemple, si j'avais l'équation $19y = 52x + 139$, au lieu d'en conclure

$$y = 2x + 7 + \frac{14x + 6}{19},$$

en prenant $2x$ pour valeur du quotient de $52x$ divisé par 19, en nombres entiers, je conclurais

$$y = 3x + 7 + \frac{-5x + 6}{19},$$

en prenant plutôt $3x$ pour quotient, parce que ce quotient

est plus approchant, et que l'excédant $5x$ dont je tiens compte en lui donnant le signe —, a un coefficient plus petit; ce qui ne peut manquer d'abréger le calcul. Je fais ensuite.....

$\frac{-5x+6}{19} = u$; d'où $x = \frac{6-19u}{5}$; et $x = 1 - 4u + \frac{1+u}{5}$.

Faisant $\frac{1+u}{5} = t$, j'ai enfin $u = 5t - 1$; ce qui achève la solution plus promptement que si j'avais pris chaque quotient au-dessous de sa véritable valeur. Si l'on remonte, comme ci-dessus, aux valeurs de x et de y, on trouvera

$$x = 5 - 19t, \quad \text{et} \quad y = 21 - 52t,$$

qui, en donnant à t pour valeurs tous les nombres négatifs depuis zéro, donneront toutes les solutions positives de l'équation.

Des Équations du second degré à une seule inconnue.

93. On appelle *équations du second degré*, celles dans lesquelles la plus haute puissance de l'inconnue est cette même inconnue multipliée par elle-même, ou élevée à son carré. Ainsi, l'équation $5x^2 = 125$ est une équation du second degré, parce que dans le terme $5x^2$, la quantité x est multipliée par elle-même.

94. Lorsque l'équation ne renferme d'autre puissance de l'inconnue que le carré, elle est toujours facile à résoudre; il suffit de dégager le carré de l'inconnue de tout ce qui peut le multiplier, ou le diviser, ou des quantités qui peuvent se trouver jointes avec lui, par les signes + ou —; ce qui se fait par les règles données (56, 60 et 64); après quoi il n'y a plus qu'à tirer la racine carrée de chaque membre. Par exemple, de l'équation $5x^2 = 125$, je conclus, en divisant par 5, $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, en tirant la racine carrée de chaque membre, $x = 5$; car il est évident que si deux quantités sont égales, leurs racines carrées seront aussi égales, et il est également clair que x est la racine carrée de x^2.

Pareillement, si j'ai l'équation

$$\tfrac{5}{3}x^2 = \tfrac{4}{5}x^2 + 7,$$

je chasse les fractions, et j'ai

$25x^2 = 12x^2 + 105$; d'où $13x^2 = 105$, $x^2 = \frac{105}{13}$; donc $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$;

ce signe $\sqrt{}$ marque qu'on doit tirer la racine carrée. Lorsqu'on doit tirer la racine carrée d'une fraction, comme dans le cas présent, on fait descendre les jambes du signe $\sqrt{}$ (qu'on appelle *signe radical*) au-dessous de la barre qui sépare les deux termes de la fraction. Mais si l'on n'avait à représenter que la racine carrée de l'un ou de l'autre des deux termes de la fraction, le radical serait tout entier au-dessus ou au-dessous de la barre de la division; ainsi pour marquer qu'on veut diviser par 3 la racine carrée de 40, on écrirait $\frac{\sqrt{40}}{3}$.

Si la quantité dont on doit tirer la racine carrée était complexe, on donnerait au radical une queue qui recouvrirait toute la quantité: par exemple, pour marquer la racine carrée de $3ab + b^2$, on écrirait $\sqrt{3ab + b^2}$. Quelquefois aussi, sans donner une queue au radical, on renferme la quantité complexe entre deux crochets, qu'on fait précéder du signe $\sqrt{}$, en cette manière $\sqrt{(ab + b^2)}$.

95. Nous avons vu (24) que lorsque le multiplicande et le multiplicateur avaient tous deux le même signe, le produit avait toujours le signe +. Cela étant, lorsqu'on a à tirer la racine carrée d'une quantité qui a le signe +, on doit indifféremment donner à cette racine carrée le signe + ou le signe —; ainsi dans l'équation précédente $x^2 = 25$, on peut, lorsqu'on tire la racine carrée, dire également qu'elle est + 5, et qu'elle est — 5, parce que chacun de ces nombres multiplié par lui-même, reproduit toujours + 25; en sorte que la résolution de l'équation $x^2 = 25$ s'écrit ainsi $x = \pm 5$ (*), ce qui

(*) On pourrait demander ici pourquoi nous ne donnons pas le double signe ± au premier membre. La réponse est qu'on le peut, mais cela ne

se prononce en disant x *égale plus ou moins* 5, et qui équivaut à ces deux équations $x = +5$ et $x = -5$.

Pareillement pour la seconde équation ci-dessus, on écrirait $x = \pm \sqrt{\frac{105}{13}}$.

96. Lorsqu'on a à tirer la racine carrée d'une quantité précédée du signe —, on couvre le tout du radical, que l'on fait aussi précéder du double signe ±; ainsi si l'on avait $x^2 = -4$, on écrirait $x = \pm\sqrt{-4}$; et quoiqu'on puisse tirer la racine carrée de 4, qui est 2, il ne faudrait pas écrire $x = \pm 2$: il est essentiel ici de faire attention au signe — de la quantité qui est sous le radical.

97. Lorsqu'une équation conduit ainsi à tirer la racine carrée d'une quantité négative, on peut conclure que le problème qui a conduit à cette équation est impossible : en effet, une quantité négative ne peut avoir de racine carrée, ni exactement, ni par approximation; car il n'y a aucune quantité, soit positive, soit négative, qui, étant multipliée par elle-même, puisse produire une quantité négative : il est bien vrai que -4, par exemple, peut être considéré comme venant de $+2$ multiplié par -2; mais ces deux quantités ayant un signe différent ne sont point égales, et par conséquent leur produit n'est pas un carré. Ainsi, lorsqu'on propose de tirer la racine carrée d'une quantité négative, on propose une chose absurde; donc tout problème qui se réduira à une pareille opération, sera un problème impossible. C'est à ce

---

même à rien de nouveau. En effet, si l'on écrit $\pm x = \pm 5$, on en tire ces quatre équations

$$+x = +5, \quad +x = -5, \quad -x = +5, \quad -x = -5.$$

La dernière, en changeant les signes, revient à la première. Il en est de même de la troisième relativement à la seconde.

Il faut se garder de considérer la valeur de x dans la première équation $x = 5$, comme étant la même que dans la seconde $x = -5$, quoique ces deux valeurs soient exprimées par le même caractère ou la même lettre x. Cette lettre x est un signe par lequel on représente la quantité que l'on cherche; il peut désigner des quantités différentes, comme le mot *écu* désigne des quantités différentes dans différens pays.

caractère qu'on distingue l'impossibilité des questions du second degré. Au reste, il ne faut pas pour cela regarder comme inutile la considération des racines carrées des quantités négatives : il arrive assez souvent qu'une question, quoique possible, n'admet de solutions que par le concours de pareilles quantités dans lesquelles, à la fin, ce qu'il y a d'absurde disparaît. On appelle ces sortes de quantités, *quantités imaginaires*. Ainsi $\sqrt{-a}$, et $a + \sqrt{-b}$ sont des quantités imaginaires.

98. Ce que nous venons de dire suffit pour la résolution des équations du second degré, lorsqu'il n'y a pas d'autres puissances de x que le carré. Mais outre le carré de l'inconnue, il peut encore y avoir (et cela arrive le plus souvent) la première puissance de l'inconnue multipliée ou divisée par quelque quantité connue, comme dans cette équation $x^2 - 4x = 12$. Alors l'artifice qu'on doit employer pour résoudre l'équation consiste à préparer le premier membre de manière à en faire un carré parfait : cette préparation suppose avant tout trois choses : 1°. qu'on ait passé dans un seul membre tous les termes affectés de x, et les quantités connues dans l'autre; cela s'exécute par ce qui a été dit (56); 2°. que le terme qui renferme x^2 soit positif : s'il avait le signe —, on changerait tous les signes de l'équation, ce qui ne troublerait point l'égalité; 3°. que le terme qui renferme x^2 soit libre de tout multiplicateur ou de tout diviseur : s'il n'était point dans cet état, on l'y amenerait, en multipliant tous les autres termes de l'équation par ce diviseur, et en les divisant par le multiplicateur. Par exemple, si j'avais à résoudre l'équation

$$4x - \tfrac{3}{5}x^2 = 4 - 2x,$$

1°. je passerais tous les x dans le premier membre, en écrivant le terme x^2 le premier, et j'aurais

$$-\tfrac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4, \text{ ou } -\tfrac{3}{5}x^2 + 6x = 4;$$

2°. je changerais les signes pour rendre x^2 positif, et j'aurais

$$\tfrac{3}{5}x^2 - 6x = -4;$$

3°. je multiplierais par 5, ce qui me donnerait

$$3x^2 - 30x = -20;$$

enfin je diviserais par 3, et j'aurais

$$x^2 - 10x = -\frac{20}{3}.$$

Comme on peut toujours ramener à cet état toute équation du second degré, nous ne nous occuperons actuellement que d'une équation préparée de cette manière.

99. Cela posé, pour résoudre une équation du second degré, il faut suivre cette règle :

Prenez la moitié de la quantité connue qui multiplie x *dans le second terme : élevez cette moitié au carré, et ajoutez ce carré à chaque membre de l'équation ; ce qui ne changera rien à l'égalité. Le premier membre sera alors un carré parfait. Tirez la racine carrée de chaque membre, et faites précéder celle du second membre, du double signe* $\pm$ *; l'équation sera réduite au premier degré.* Quant à la manière de tirer la racine carrée du premier membre, on tirera la racine carrée du carré de l'inconnue, et celle du carré qu'on a ajouté : on joindra cette seconde à la première, par le signe qu'aura le second terme de l'équation. Par exemple, ayant l'équation

$$x^2 + 6x = 16,$$

je prends la moitié de la quantité connue 6, qui multiplie x dans le second terme : je carre cette moitié, et j'ajoute à chaque membre le carré 9, j'ai

$$x^2 + 6x + 9 = 25 :$$

il ne s'agit plus que de tirer la racine carrée, ce que je fais en prenant la racine carrée de x^2, qui est x, puis celle de 9, qui est 3; et comme le second terme $6x$ de l'équation a le signe $+$, j'en conclus que $x + 3$ est la racine carrée du premier membre. Quant à celle du second, elle est 5 ou plutôt (95) ± 5; par conséquent $x + 3 = \pm 5$. Pour avoir x, il

ne s'agit plus que de transposer, et l'on aura $x = \pm 5 - 3$; c'est-à-dire que x a deux valeurs, savoir :

$$x = +5 - 3 = 2, \quad \text{et} \quad x = -5 - 3 = -8.$$

Nous verrons ci-après ce que signifie cette seconde valeur. Pour entendre la raison de cette règle, il faut se rappeler ce que nous avons remarqué (25), savoir, que *le carré d'une quantité composée de deux termes contient toujours le carré du premier terme, le double du premier terme multiplié par le second, et le carré du second.* Cela posé, lorsqu'il s'agit d'ajouter à une quantité telle que $x^2 + 6x$, ce qui est nécessaire pour en faire un carré parfait, il faut remarquer, 1°. que cette quantité contient déjà un carré x^2 qu'on peut considérer comme le carré du premier terme x d'un binome ; 2°. qu'on peut toujours considérer le terme suivant $6x$, comme étant le double de x multiplié par une autre quantité ; 3°. que cette autre quantité est nécessairement la moitié de 6 multiplicateur de x. Il ne manque donc plus que le carré de cette seconde quantité, c'est-à-dire le carré de la moitié du multiplicateur de x dans le second terme. On voit que ce raisonnement est général, quel que soit le multiplicateur de x. Quant à la règle que nous donnons en même temps pour extraire la racine carrée du premier membre, elle est également une suite de la formation du carré ; puisque les deux carrés extrêmes qui se trouvent dans le carré d'un binome étant les carrés des deux termes de la racine, il est évident qu'il ne s'agit que de tirer séparément les racines de ces deux carrés pour avoir ces deux termes. Mais on doit donner au second terme de la racine le même signe qu'a le second terme de l'équation, parce que de même que le calcul fait voir que le carré de $a + b$ est $a^2 + 2ab + b^2$, de même il fait voir que le carré de $a - b$ est $a^2 - 2ab + b^2$. Appliquons la règle du n° 99 à des exemples.

100. De quelque degré que doive être l'équation, il faut toujours, pour mettre la question en équation, faire usage de la règle que nous avons donnée (67).

Question première. *Trouver un nombre tel, que si à son carré on ajoute* 8 *fois ce même nombre, le tout fasse* 33? Si je connaissais ce nombre, que j'appelle x, il est évident que j'en prendrais le carré x^2; qu'à ce carré j'ajouterais 8 fois ce nombre, c'est-à-dire $8x$, et que le tout $x^2 + 8x$ formerait 33; il faut donc que

$$x^2 + 8x = 33.$$

Pour résoudre cette équation, j'ajoute à chaque membre le nombre 16, qui est le carré de la moitié du nombre 8 qui multiplie x dans le second terme, et j'ai

$$x^2 + 8x + 16 = 49,$$

équation dont le premier membre est un carré parfait. Je tire la racine carrée de chaque membre, en observant la règle donnée (99), et j'ai

$$x + 4 = \pm 7, \quad x = \pm 7 - 4,$$

qui donne ces deux valeurs de x,

$$x = +7 - 4 = 3 \text{ et } x = -7 - 4 = -11.$$

De ces deux valeurs, la première satisfait à la question, puisque 9, qui est le carré de 3, étant ajouté à 8 fois 3 ou 24, fait 33. A l'égard de la seconde, comme elle est négative, elle indique qu'il y a une autre question dans laquelle prenant x dans un sens tout contraire, la solution serait 11, c'est-à-dire que la seconde valeur de x doit satisfaire à cette autre question : *Trouver un nombre tel, que si de son carré on retranche* 8 *fois ce même nombre, le reste soit* 33, ce qui est en effet; car le carré de 11 est 121, et 8 fois 11 font 88, lequel retranché de 121, il reste 33.

Pour confirmer ce que nous avons dit sur les quantités négatives (69), remarquons que cette seconde question mise en équation, donne $x^2 - 8x = 33$, laquelle, étant résolue selon la règle, donne $x = \pm 7 + 4$, c'est-à-dire ces deux valeurs, $x = 11$ et $x = -3$, qui sont précisément le contraire de celles de la première question.

101. On voit par là qu'une équation du second degré, à une seule inconnue, a toujours deux solutions. Car les deux valeurs 11 et — 3, substituées, au lieu de x, dans l'équation $x^2 - 8x = 33$, la résolvent également, c'est-à-dire réduisent également le premier membre à 33. On vient de le voir pour 11. A l'égard de — 3, son carré est + 9; et 8 fois — 3, font — 24, qui, retranchés de + 9, donnent + 9 + 24, selon ce qui a été enseigné (11). Mais on voit en même temps que si toute équation du second degré a deux solutions, il n'en est pas toujours de même de la question qui a conduit à cette équation; car, dans le cas présent, la seconde valeur — 3, ne résout que la question contraire. Au reste, il arrive souvent que les deux solutions de l'équation sont aussi, toutes deux, solutions de la question. Nous en verrons un exemple dans la troisième question.

Question seconde. *On devait partager* 175 *livres entre un certain nombre de personnes; mais il y en a deux d'absentes, et qui, par cette raison, ne doivent pas avoir part. Cette circonstance augmente de* 10 *livres la part de chaque présent; on demande combien il devait d'abord y avoir de partageans?* Si je savais quel est ce nombre, je diviserais 175 par ce nombre, pour connaître combien chacun aurait eu, si toutes les personnes eussent été présentes. Je diviserais ensuite par ce même nombre diminué de 2, pour connaître combien chaque partageant aura réellement; enfin je verrais si, en ôtant 10 livres de ce second quotient, le reste est égal au premier. Imitons ces opérations, en représentant par x le nombre cherché. Si tous étaient présens, chacun aurait donc $\frac{175}{x}$; mais s'il manque deux personnes, chaque partageant aura $\frac{175}{x-2}$; puis donc que ce dernier nombre doit être plus grand de 10 que le premier, il faut que

$$\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}, \text{ d'où } x^2 - 2x = 35;$$

équation à laquelle il ne s'agit plus que d'appliquer la règle donnée (99). Je prends donc la moitié — 1 du multiplicateur — 2 de x. Je carre cette moitié, ce qui me donne + 1, que j'ajoute à chaque membre, et j'ai

$$x^2 - 2x + 1 = 36 :$$

tirant la racine carrée, j'ai

$$x - 1 = \pm 6; \text{ d'où } x = \pm 6 + 1,$$

qui donne $x = 7$ et $x = -5$.

La première est le nombre cherché; car 175 divisé par 7 donne 25; et 175 divisé par 7 — 2 ou 5, donne 35, qui excède 25 de 10. Quant à la seconde, elle résout la question où l'on supposerait qu'il s'agit de partager 175 liv. avec deux nouveaux survenus, et que cette circonstance diminue de 10 livres la part que chacun aurait eue sans cela.

Question troisième. *Un homme achète un cheval, qu'il vend, au bout de quelque temps, pour* 24 *pistoles. A cette vente, il perd autant, pour* 100 *pistoles, que le cheval lui avait coûté. On demande combien il l'avait acheté?* Si l'on me disait ce que le cheval a coûté, je vérifierais ce nombre de cette manière. Je le retrancherais de 100, et je ferais cette règle de trois : Si 100 se réduisent au nombre que vient de me donner la soustraction, à combien le nombre prétendu doit-il se réduire? Ayant trouvé ce quatrième terme, il devrait être égal à 24. Nommons donc x le nombre cherché, c'est-à-dire le nombre de pistoles que le cheval a coûté. Alors puisque 100 sont supposés se réduire à $100 - x$, je trouverai à combien x doit être réduit, en faisant cette règle de trois, $100 : 100 - x :: x :$; le quatrième terme sera.... $\frac{(100 - x)\,x}{100}$ (*Arith.* 179) ou $\frac{100x - xx}{100}$; puis donc qu'on suppose que le prix du cheval a été réduit à 24 pistoles, il faut que

$$\frac{100x - xx}{100} = 24.$$

Pour résoudre cette équation, je chasse le dénominateur, et j'ai

$$100x - xx = 2400, \quad \text{ou} \quad xx - 100x = -2400.$$

Je prends donc (99) la moitié de — 100 qui est — 50; je l'élève au carré, ce qui me donne + 2500 à ajouter à chaque membre. L'équation devient

$$xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100,$$

tirant la racine carrée, j'ai

$$x - 50 = \pm 10, \quad x = 50 \pm 10, \quad \text{ou} \quad x = 60 \text{ et } x = 40;$$

chacune de ces valeurs de x résout la question; en sorte que le prix du cheval peut également avoir été de 60 ou de 40 pistoles : l'énoncé de la question n'est pas suffisant pour déterminer lequel de ces deux prix a eu lieu. Si l'on veut vérifier ces deux solutions, on verra qu'en supposant que le cheval a été acheté 60 pistoles, puisque alors 100 se réduisent à 40, 60 se réduiront à 24. Et dans le second cas, on verra de même que 100 se réduisant à 60, 40 se réduiront à 24.

102. Dans les questions précédentes, l'équation a eu deux solutions, l'une positive, l'autre négative. Dans la dernière, elle en a deux positives. Elle peut en avoir aussi deux négatives; mais cela n'arrive que lorsque l'énoncé de la question est vicieux; car alors chacune de ces deux solutions négatives indique (69) que l'inconnue doit être prise dans un sens tout opposé à celui de l'énoncé. Par exemple, si l'on proposait cette question : *Trouver un nombre tel, que si à son carré on ajoute 9 fois ce même nombre, et encore le nombre* 50, *le tout fasse* 30; cette question, mise en équation, donnerait

$$x^2 + 9x + 50 = 30,$$

qui, en suivant les règles données plus haut, deviendrait successivement

$$x^2 + 9x = -20, \quad x^2 + 9x + \tfrac{81}{4} = \tfrac{81}{4} - 20 = \tfrac{1}{4};$$

tirant la racine carrée

$x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$, qui donne

$x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, et $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$;

ce qui indique que la question doit être changée en cette autre : Trouver un nombre tel, que si après avoir ajouté 50 à son carré, on retranche du tout 9 fois le nombre demandé, il reste 30.

103. L'Algèbre a donc cet avantage, que non-seulement elle résout les questions, mais qu'elle fait encore distinguer si elles sont bien ou mal proposées ; et que si elles sont impossibles, elle le fait connaître aussi : nous en avons déjà donné le caractère (97). Si l'on en veut un exemple, il n'y a qu'à résoudre la question troisième, en y supposant 26 pistoles au lieu de 24. L'équation sera

$$\frac{100x - xx}{100} = 26, \text{ ou } 100x - xx = 2600, \text{ ou } xx - 100x = -2600,$$

qui, selon la règle (99), devient

$$xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100$$

tirant la racine carrée,

$$x - 50 = \pm \sqrt{-100}, \text{ et enfin } x = 50 \pm \sqrt{-100}$$

or, nous avons vu (97) que la racine carrée d'une quantité négative est impossible.

Question quatrième. *Deux personnes se sont réunies dans un commerce : l'une a mis* 30 *louis qui sont restés* 17 *mois dans la société. La seconde n'a fourni ses fonds qu'au bout de* 5 *mois ; c'est-à-dire qu'ils n'ont été que* 12 *mois dans la société. Ces fonds que l'on ne connaît point, font, avec le gain qui lui revient,* 26 *louis. Le gain total a été de* 18 *louis et* $\frac{3}{4}$ *; on demande ce que le second avait mis, et combien chacun a gagné ?* La question se réduit à trouver la mise du second, car il est évident que le gain de chacun sera facile à trouver ensuite. Représentons cette mise, ou le nombre de louis de cette mise par x. Puisque les 30 louis du premier ont été 17 mois dans la société, ils doivent lui avoir produit

autant que produiraient 17 fois 30 louis ou 510 louis pendant un mois. Pareillement, puisque la mise x du second a été 12 mois dans la société, elle doit lui avoir produit autant que 12 fois x louis ou $12x$ produiraient pendant un mois; ainsi, on peut regarder la société comme n'ayant duré qu'un mois, mais en supposant que les mises aient été 510 et $12x$; cela étant, pour savoir ce que le second doit gagner, il faut (*Arith.* 97) calculer le quatrième terme de cette proportion

$$510 + 12x : 18\tfrac{3}{4} :: 12 :$$

Ce quatrième terme sera

$$\frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510 + 12x}, \text{ qui revient à } \frac{225x}{510 + 12x};$$

or il est dit dans la question que le gain du second et sa mise x font 26 louis; donc

$$\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26; \quad \text{d'où} \quad x^2 + \frac{141x}{4} = 1105.$$

Prenant donc la moitié de $\frac{141}{4}$, élevant cette moitié au carré, et l'ajoutant à chaque membre, on aura

$$x^2 + \tfrac{141}{4}x + \tfrac{19881}{64} = \tfrac{19881}{64} + 1105 = \tfrac{90601}{64}.$$

Tirant donc la racine carrée, on aura

$$x + \tfrac{141}{8} = \pm \sqrt{\tfrac{90601}{64}} = \pm \tfrac{301}{8};$$

donc

$$x = -\tfrac{141}{8} \pm \tfrac{301}{8},$$

qui donne pour la seule valeur qui satisfasse à la question,

$$x = \frac{-141 + 301}{8} = \frac{160}{8} = 20;$$

la mise du second était donc de 20 louis; par conséquent son gain était de 6, et celui du premier de $12\frac{3}{4}$.

104. A l'égard des équations littérales, la règle est absolument la même. Si l'on avait à résoudre l'équation

$$abx - axx = b^2c;$$

conformément à ce qui a été dit (98 et 99), je changerais cette équation en

$$ax^2 - abx = -b^2c, \quad \text{puis en} \quad x^2 - bx = -\frac{b^2c}{a};$$

j'ajouterais à chaque membre le carré de $-\frac{1}{2}b$, et j'aurais

$$x^2 - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a};$$

tirant la racine carrée, j'ai

$$x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}}, \quad \text{et} \quad x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}}.$$

105. Lorsque l'équation est littérale, elle peut se présenter sous une forme plus composée que nous ne l'avons vue jusqu'ici, mais on peut toujours la ramener à trois termes de cette manière. Soit l'équation

$$ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx.$$

Je passe dans un seul membre tous les termes affectés de x, en observant d'écrire de suite tous ceux qui ont les mêmes puissances de x, et j'ai

$$ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2.$$

Je remarque, à présent, que $ax^2 - bx^2$ n'est autre chose que $(a-b)x^2$; pareillement $bcx + acx$ est $(bc + ac)x$; en sorte que l'équation peut s'écrire ainsi :

$$(a-b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2;$$

or, les quantités a, b, c étant des quantités connues, on doit regarder $a-b$, $bc+ac$, et $a^2b - ab^2$ comme des quantités toutes connues : on peut donc, pour abréger, représenter chacune de ces quantités par une seule lettre, et supposer

$$a - b = m, \quad bc + ac = n, \quad a^2b - ab^2 = p,$$

et alors l'équation est réduite à

$$mx^2 + nx = p,$$

qui est dans le cas des précédentes, et qui étant résolue suivant les mêmes règles, deviendra successivement

$$x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}, \quad x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m},$$

$$x + \frac{n}{2m} = \pm\sqrt{\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}}, \text{ enfin } x = \frac{-n}{2m} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}}.$$

106. Au reste, on ne fait ces sortes de transformations que lorsque le calcul qu'on aurait à faire sans elles serait très composé; car dans ce même exemple, après avoir mis l'équation proposée sous la forme

$$(a-b)x^2 + (bc+ac)x = a^2b - ab^2,$$

on peut la traiter, sans trop de calcul, comme les précédentes, en divisant d'abord par $a-b$, ce qui donne

$$x^2 + \frac{bc+ac}{a-b}x = ab;$$

maintenant il faut ajouter de part et d'autre le carré de la moitié de $\frac{bc+ac}{a-b}$, c'est-à-dire le carré de $\frac{bc+ac}{2a-2b}$; mais on peut se contenter de l'indiquer de cette manière $\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2$; ainsi on aura

$$x^2 + \frac{bc+ac}{a-b}x + \left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 = \left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + ab;$$

tirant la racine carrée, on aura

$$x + \frac{bc+ac}{2a-2b} = \pm\sqrt{\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + ab},$$

et enfin

$$x = \frac{-bc-ac}{2a-2b} \pm \sqrt{\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + ab}.$$

107. Quoiqu'on puisse, lorsqu'on a conclu la valeur de x, laisser le radical dans l'état où il est, jusqu'à ce qu'on vienne

aux applications numériques, néanmoins, il peut être souvent utile de lui donner une forme plus simple, en réduisant au même dénominateur les deux parties qui se trouvent sous ce radical. Sur quoi il faut observer qu'on peut souvent les réduire au même dénominateur d'une manière plus simple que par la règle générale donnée (47); et cela en se conformant aux observations que nous avons faites (48); prenons pour exemple $\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}$: pour réduire à un même dénominateur les deux quantités $\frac{n^2}{4m^2}$ et $\frac{p}{m}$, j'observe que leurs dénominateurs actuels ont un facteur commun m, et que par conséquent, si je multipliais les deux termes de la fraction $\frac{p}{m}$ par $4m$, qui est le second facteur du premier dénominateur, alors elle aurait le même dénominateur que cette première fraction; c'est pourquoi je change $\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}$ en $\sqrt{\frac{n^2+4pm}{4m^2}}$; or, comme le radical marque qu'il faut tirer la racine carrée de la fraction, c'est-à-dire (*Arith.* 142) du numérateur et du dénominateur, je tire celle du dénominateur qui est un carré, et j'ai $\frac{\sqrt{n^2+4pm}}{2m}$; ainsi l'équation (1), devient...

$$x=\frac{-n}{2m}\pm\frac{\sqrt{n^2+4pm}}{2m}, \text{ ou } x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4pm}}{2m}.$$

De l'extraction de la racine carrée des quantités littérales.

108. La résolution des équations du second degré conduit donc, comme nous venons de le voir, à extraire la racine carrée des quantités, soit numériques, soit littérales. Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des premières en Arithmétique. Nous allons parler des dernières.

Lorsqu'il a été question de la multiplication des quantités monomes (18), nous avons dit que le produit renfermait

toutes les lettres du multiplicande et toutes celles du multiplicateur; or, lorsqu'on élève une quantité au carré, le multiplicande et le multiplicateur sont les mêmes; donc, dans un carré monome, chacune des lettres de la racine doit être deux fois facteur; donc l'exposant de chacune des lettres d'un carré monome doit être double de celui des mêmes lettres dans la racine; donc *pour avoir la racine carrée d'une quantité monome, il faut donner à chacune des lettres de cette quantité un exposant moitié moindre.* Suivant cette règle, la racine carrée de a^2 est a, celle de a^6 est a^3, celle de $a^2b^2c^2$ est abc, celle de $a^4b^6c^8$ est $a^2b^3c^4$.

109. S'il se trouvait un exposant impair, ce serait donc un signe que la quantité proposée n'est point un carré parfait; alors, en suivant la règle, il resterait un exposant fractionnaire qui désignerait qu'il reste à tirer la racine carrée de la quantité qui aurait cet exposant. Ainsi la racine carrée de $a^2b^3c^4$ est $ab^{\frac{3}{2}}c^2$ ou $abb^{\frac{1}{2}}c^2$: car on peut considérer $a^2b^3c^4$ comme $a^2b^2bc^4$.

L'exposant fractionnaire a donc ici le même usage que le signe $\surd$; ainsi $abb^{\frac{1}{2}}c^2$, ou (ce qui est la même chose) $abc^2b^{\frac{1}{2}}$, équivaut à $abc^2\surd b$. Donc, réciproquement, si une quantité monome est affectée du signe $\surd$, on pourra supprimer ce radical, pourvu qu'on prenne la moitié de chacun des exposans.

110. Cette remarque sert à simplifier les quantités affectées du signe $\surd$, lorsque cela est possible. Par exemple, la quantité $\surd a^5b^3c$ étant la même chose que $a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, se réduit à $abb^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, ou, en remettant le radical au lieu des exposans fractionnaires, à $ab\surd bc$. De même $\surd a^5b^4c^3$ se réduit à $a^2b^2c\surd ac$, en considérant $a^5b^4c^3$ comme $a^4b^4c^2ac$, et prenant la moitié des exposans 4, 4 et 2. On trouvera de même que $\sqrt{\frac{a^3}{f}}$ se réduit à $a\sqrt{\frac{a}{f}}$; ou bien, si l'on multiplie le numé-

rateur et le dénominateur par f, cette expression se réduit à $a\sqrt{\frac{af}{f^2}}$, ou enfin à $\frac{a}{f}\sqrt{af}$.

111. On voit donc que pour faire sortir hors du radical les facteurs qui sont des carrés parfaits, il faut prendre la moitié des exposans de ces facteurs. Au contraire, pour faire entrer sous le radical un facteur qui serait au dehors, il faudra doubler l'exposant de ce facteur; c'est-à-dire élever ce facteur au carré. Ainsi $a\sqrt{b}$ peut être changé en $\sqrt{a^2b}$; $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ peut être changé en $\sqrt{\frac{a^2b}{a}}$, qui se réduit à $\sqrt{ab}$. De même $(a+b)\sqrt{c}$ peut être changé en $\sqrt{(a+b)^2c}$.

112. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coefficient. S'il y en avait un, et qu'il fût un carré parfait, on en tirerait la racine carrée selon les règles de l'Arithmétique; ainsi $\sqrt{9a^2b^3}$ devient $3ab\sqrt{b}$. De même, $\sqrt{1024a^4b^3c}$ devient $32ab\sqrt{bc}$.

113. Mais si le coefficient n'était point un carré parfait, il faudrait voir s'il ne peut pas être décomposé en deux facteurs, dont l'un soit un carré parfait dont on tirerait la racine, et on laisserait l'autre sous le radical; c'est ainsi que $\sqrt{48a^2b^3}$ se réduit à $4ab\sqrt{3b}$, parce que 48 étant égal à 16×3,

$$\sqrt{48a^2b^3}=\sqrt{16a^2b^2\times 3b}=4ab\sqrt{3b}.$$

On trouvera de même que $\sqrt{512a^3b^2}$ se réduit à $16ab\sqrt{2a}$.

114. Si la quantité affectée du signe radical est complexe et n'est point un carré parfait, il faut examiner si elle ne peut pas être décomposée en deux facteurs, dont l'un serait un carré parfait; alors on tirerait la racine de celui-ci, et on laisserait l'autre sous le radical. Lorsque le facteur carré s'il y en a . est monome, il est toujours facile à aperce-

voir. Par exemple, dans la quantité

$$\sqrt{4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5},$$

je vois que b^2 est facteur de tous les termes, en sorte que cette quantité équivaut à cette autre

$$\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3) \times b^2};$$

je tire donc la racine carrée de b^2, et j'ai

$$b\sqrt{4a^3 - 5a^2b + 6b^3}.$$

115. Mais lorsque ce facteur carré doit être complexe, ou lorsque la quantité complexe qui est sous le radical est elle-même un carré, il faut bien se garder, pour en avoir la racine, de tirer séparément la racine carrée de chacun des termes qui la composent. Par exemple, si l'on avait $a^2 + b^2$, on se tromperait beaucoup si l'on prenait $a + b$ pour cette racine, puisque le carré de $a+b$ n'est pas a^2+b^2, mais $a^2+2ab+b^2$(25). $a^2 + b^2$ n'a point de racine exacte en lettres. Voici la méthode qu'il faut suivre, lorsque la quantité complexe proposée est susceptible d'une racine exacte.

116. Soit donc la quantité $60ab + 36a^2 + 25b^2$. Pour en avoir la racine carrée, j'ordonne les termes de cette quantité par rapport à l'une de ses lettres : par rapport à a, par exemple,

$$\begin{array}{r|l} 36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \quad \text{Racine.} \\ -36a^2 & \overline{12a + 5b} \\ \hline + 60ab + 25b^2 & \\ -60ab - 25b^2 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Je prends la racine carrée du premier terme $36a^2$, laquelle est $6a$, que j'écris à côté de la quantité proposée. Je carre cette racine et j'écris le carré $36a^2$ sous le premier terme, avec le signe —, pour le retrancher. La réduction faite, il reste $+60ab + 25b^2$. Sous la racine $6a$ j'écris son

double $12a$, que j'emploie pour diviser le premier terme $60ab$ de la quantité restante $60ab + 25b^2$. Je trouve pour quotient $+5b$, que j'écris à la suite de la racine $6a$, et j'ai $6a + 5b$ pour la racine cherchée; mais pour confirmer cette opération, j'écris aussi le quotient $5b$ que je viens de trouver, à côté de $12a$, et je multiplie le total $12a + 5b$ par ce même quotient $5b$; je porte à mesure les produits sous la quantité $60ab + 25b^2$, en observant de changer les signes de ces produits; faisant ensuite la réduction, il ne reste rien; j'en conclus que la racine trouvée $6a + 5b$ est la racine carrée exacte de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Prenons pour exemple la quantité

$$9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc.$$

J'ordonne cette quantité par rapport à la lettre a, et j'ai

$$\begin{array}{l|l} 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 2a - 3b + 4c \quad \text{Rac.} \\ -4a^2 & \overline{4a - 3b} \\ \hline 1^{er}\ \text{Reste} - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 4a - 6b + 4c \\ \quad +12ab \quad -9b^2 & \\ \hline 2^e\ \text{Reste} \quad +16ac - 24bc + 16c^2 & \\ \quad -16ac + 24bc - 16c^2 & \\ \hline \text{Dernier reste} \ldots\ldots\ldots\ldots 0. & \end{array}$$

Je tire la racine carrée de $4a^2$: elle est $2a$, que j'écris à côté. Je carre $2a$, et je l'écris avec le signe —, sous $4a^2$; faisant la réduction, il reste $-12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$. Au-dessous de la racine $2a$, j'écris son double $4a$, que j'emploie pour diviser le premier terme $-12ab$ du reste : je trouve pour quotient $-3b$, que j'écris à la suite du premier terme $2a$ de la racine; je l'écris aussi à côté du double $4a$, et je multiplie le tout $4a - 3b$, par le même quotient $-3b$, écrivant les produits, après avoir changé leurs signes, sous le reste $-12ab + 16ac$, etc., et faisant la réduction, j'ai pour le second reste, $+16ac - 24bc + 16c^2$. Je considère à présent les deux termes de la racine $2a - 3b$ comme ne faisant qu'une seule quantité; je double cette quantité, et je l'écris au-dessous pour servir de diviseur au second reste; mais pour

faire cette division, je me contente, selon ce qui a été dit (36), de diviser le premier terme $+16ac$, par le premier terme $+4a$ de mon diviseur; je trouve pour quotient $+4c$, que j'écris à la suite de la racine $2a-3b$, et à la suite du double, $4a-6b$; je multiplie cette dernière somme, $4a-6b+4c$, par le nouveau terme $+4c$ de la racine; et changeant, à mesure, les signes des produits, j'écris ces mêmes produits sous le second reste; faisant la soustraction, il ne reste rien; d'où je conclus que la racine carrée est exacte.

Tout cela est fondé sur ce principe, que le carré d'une quantité composée de deux parties, contient le carré de la première, le double de la première multipliée par la seconde, et le carré de la seconde; car il suit de là, que, pour avoir la première partie, il faudra tirer la racine carrée du premier carré; que pour avoir la seconde, il faudra diviser le second terme par le double de la racine trouvée; et qu'enfin pour vérifier, il faudra multiplier le double de la première par la seconde, et la seconde par elle-même: or, c'est ce que prescrit la méthode que nous venons d'exposer. Nous invitons les commençans à s'exercer encore sur les trois quantités suivantes:

$$16a^4+40a^3b+25a^2b^2;$$
$$36b^4-60ab^3+25a^2b^2-36b^2c^2+30abc^2+9c^4;$$
$$a^6-4a^5c^3+8e^3a^3+4c^6-16c^3e^3+16e^6,$$

dont ils trouveront que les racines carrées sont

$$4a^2+5ab;\quad 6b^2-5ab-3c^2;\quad a^3-2c^3+4e^3.$$

Du Calcul des quantités affectées du signe $\surd$.

117. On fait, sur les quantités radicales dont nous venons de parler, les mêmes opérations que sur les autres quantités. Lorsque les deux quantités radicales ne sont pas semblables, on se contente, pour les ajouter ou les soustraire, de les unir par le signe $+$ ou le signe $-$. Ainsi $3a\surd b$, ajouté avec $4b\surd c$, donne $3a\surd b+4b\surd c$; de même $3a\surd b$, retranché de $4b\surd c$, donne $4b\surd c-3a\surd b$. Mais si les quantités radicales sont semblables et ne diffèrent que par le coefficient

numérique hors du radical, alors on ajoute ou l'on retranche les coefficiens, selon qu'il s'agit d'addition ou de soustraction. Par exemple, $4ab\sqrt{c}$, ajouté avec $5ab\sqrt{c}$, donne $9ab\sqrt{c}$.

Nous supposons ici qu'on a réduit les radicaux selon ce qui a été enseigné (111); car si l'on avait $4b\sqrt{a^3c}$ à ajouter avec $6a\sqrt{ab^2c}$, je commencerais par réduire le premier radical à $4ab\sqrt{ac}$, et le second à $6ab\sqrt{ac}$, lesquels, ajoutés, donnent $10ab\sqrt{ac}$.

Pour multiplier deux quantités radicales, il faut multiplier comme s'il n'y avait point de rádicaux, et affecter ensuite le produit du signe radical. Par exemple, pour multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{c}$, je multiplierais a par c, et donnant au produit ac le signe $\sqrt{}$, j'aurais $\sqrt{ac}$. Pour mutiplier $\sqrt{a^2+b^2}$ par $\sqrt{ac}$ j'aurais $\sqrt{a^3c+ab^2c}$. De même

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$; $\sqrt{a+b}\times\sqrt{a+b}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b$;
$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)^2}=-a$ (*).

On voit donc que pour carrer une quantité affectée du signe $\sqrt{}$, il n'y a autre chose à faire qu'à ôter ce signe; ainsi pour carrer $\sqrt{a^2b+b^3}$, j'aurai a^2b+b^3.

(*) Il ne faut pas confondre $\sqrt{(-a)^2}$ avec $\sqrt{-aa}$; le premier est $\sqrt{-a\times-a}$, et le second est $\sqrt{-a\times+a}$. Nous ferons, à cette occasion, une remarque que nous croyons très à propos. Puisque $-a\times-a$ donne $+a^2$, dont (95) la racine est $\pm a$, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ devrait donc donner $\pm a$; cependant nous ne donnons ici que $-a$. La raison en est simple. Quand on demande quelle est la racine de $+a^2$, on a raison d'assigner également $+a$ et $-a$, parce que rien, dans cette question, ne détermine si l'on considère $+a^2$ comme venu de $+a\times+a$, ou de $-a\times-a$; mais quand on demande quelle est la valeur de $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, quoique cette quantité, selon les règles, se réduise à $\sqrt{+a^2}$, on ne doit prendre que $-a$, parce que la question elle-même fixe ici par quelle opération est venu $+a^2$. C'est en faisant cette attention qu'on remarquera que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ doit donner $-\sqrt{ab}$, et non pas $\pm\sqrt{ab}$, parce que $\sqrt{-a}$ étant la même chose que $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, et $\sqrt{-b}$ la même chose que $\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$, donc $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ sera $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, ou $\sqrt{ab}\times\sqrt{(-1)^2}$, qui revient à $-\sqrt{ab}$, puisque $\sqrt{(-1)^2}=-1$.

118. Cette remarque peut servir à dégager une équation des signes $\surd$ qu'elle peut renfermer. Par exemple, si j'avais l'équation

$$x - 2a = b + \surd ax,$$

je laisserais $\surd ax$ seul dans un membre, et j'aurais

$$x - 2a - b = \surd ax;$$

carrant chaque membre, j'aurais

$$x^2 - 4ax - 2bx + 4aa + 4ab + bb = ax,$$

ou $$x^2 - 5ax - 2bx = -4aa - 4ab - bb.$$

119. Pour diviser une quantité radicale par une autre quantité radicale, on divisera comme s'il n'y avait pas de signe $\surd$, et l'on donnera au quotient ou à la fraction le signe radical; ainsi, pour diviser $\surd a$ par $\surd b$, on divisera a par b, ce qui donnera $\frac{a}{b}$, auquel appliquant le radical, on aura $\surd\frac{a}{b}$. Pour diviser $\surd ab$ par $\surd a$, on divisera ab par a; ce qui donnera b, et l'on aura $\surd b$ pour quotient. Pour diviser $\surd\overline{aa-xx}$ par $\surd\overline{a+x}$, on divisera $aa-xx$ par $a+x$, ce qui donnera $a-x$, et l'on aura $\surd\overline{a-x}$ pour le quotient demandé. De même $ab\surd bc$ divisé par $a\surd b$, donnera $b\surd c$, en divisant ab par a, et $\surd bc$ par $\surd b$.

120. Si le dividende ou le diviseur était rationnel, on séparerait l'un de l'autre par une barre assez longue pour faire connaître que l'un des deux n'est pas affecté du radical. Par exemple, pour diviser a par $\surd b$, on écrirait $\frac{a}{\surd b}$; pour diviser a par $\surd a$, on écrirait $\frac{a}{\surd a}$; mais lorsqu'il y a parité dans les lettres du dividende et du diviseur, il est souvent à propos de donner à la quantité rationnelle une forme de radical, parce qu'elle donne lieu à des simplifications; ainsi, dans le dernier exemple, je changerais a en $\surd a^2$, et alors

au lieu de $\frac{a}{\sqrt{a}}$, j'aurais $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}$, et par conséqu $\sqrt{a}$. De même, si j'avais $\sqrt{aa-xx}$ à diviser par $a+x$, j'écrirais $\frac{\sqrt{aa-xx}}{a+x}$ ou $\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{(a+x)^2}}$ ou $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}$; et comme le numérateur et le dénominateur peuvent être divisés chacun par $a+x$, j'aurais enfin $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

De la formation des puissances des quantités monomes; de l'extraction de leurs racines. Du calcul des radicaux et des exposans.

121. Nous avons déjà dit qu'on appelle *puissance* d'une quantité le produit de cette quantité multipliée par elle-même plusieurs fois de suite. a^3 est la troisième puissance ou le cube de a, parce que a^3 résulte de $a \times a \times a$. La quantité qu'on a multipliée est autant de fois facteur dans la puissance, qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette même puissance: ainsi dans a^5, a est cinq fois facteur; dans $(a+b)^6$, $a+b$ est six fois facteur.

122. Puisque pour multiplier les quantités littérales monomes qui ont des exposans, il suffit (20) d'ajouter l'exposant de chaque lettre du multiplicande, avec l'exposant de la lettre semblable du multiplicateur, il s'ensuit donc que *pour élever à une puissance proposée une quantité monome, il suffira de multiplier l'exposant actuel de chacune de ces lettres, par le nombre qui marque à quelle puissance on veut élever cette quantité.* Nous appellerons ce nombre *l'exposant de la puissance.* Ainsi, pour élever a^2b^3c à la quatrième puissance, j'écrirai $a^8b^{12}c^4$; en multipliant les exposans 2, 3 et 1 de a, b, c, par l'exposant 4 de la puissance à laquelle on veut élever a^2b^3c. En effet, pour élever a^2b^3c à la quatrième puissance, il faudrait multiplier a^2b^3c par a^2b^3c, puis le produit par a^2b^3c, et ce dernier produit par a^2b^3c; or, pour faire ces multiplications, il faut (20) ajouter les exposans; puis donc

qu'ils sont les mêmes dans chaque facteur, il faut ajouter chaque exposant à lui-même trois fois, c'est-à-dire le multiplier par 4. Le raisonnement est le même à quelque autre puissance qu'on veuille élever un monome, et quels que soient les exposans actuels des lettres de ce monome.

Lorsqu'on a à faire sur les exposans des quantités, des raisonnemens ou des opérations qui ne dépendent point de certaines valeurs particulières de ces exposans, mais qui sont également applicables à toutes sortes d'exposans, on représente ces exposans par des lettres. Ainsi, pour en faire l'application à la règle que nous venons de donner, si l'on veut élever la quantité quelconque $a^m b^n c^p$ à une puissance quelconque désignée par r, on écrira $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

123. Si la quantité qu'on veut élever à une puissance proposée était une fraction, on éleverait à cette puissance le numérateur et le dénominateur; ainsi $\frac{a^2b^3}{cd^2}$ élevé à la cinquième puissance, devient $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$; pareillement $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ élevé à la puissance r, devient $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr} d^{qr}}$.

124. Si la quantité proposée avait un coefficient, on l'éleverait à la puissance proposée, en le multipliant par lui-même, selon les règles de l'Arithmétique; ainsi $4a^3b^2$ élevé à la cinquième puissance, donnerait $1024a^{15}b^{10}$. Quelquefois on se contente d'indiquer cette élévation comme pour les lettres; ainsi on peut écrire $4^5a^{15}b^{10}$.

125. A l'égard des signes, si l'exposant de la puissance à laquelle il s'agit d'élever est pair, le résultat aura toujours le signe +; mais s'il est impair, il aura le signe + ou le signe —, selon que la quantité proposée aura elle-même le signe + ou le signe —; c'est une suite immédiate de la règle donnée pour les signes (24).

126. Il suit de tout ce que nous venons de dire que, dans une puissance quelconque, l'exposant actuel de chaque lettre

contient l'exposant de sa racine, autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance que l'on considère; par exemple, dans la quatrième puissance, l'exposant de chaque lettre est quadruple de ce qu'il était dans la quantité primitive qui en est la racine.

127. Donc pour revenir d'une puissance quelconque à sa racine, c'est-à-dire *pour extraire une racine d'un degré proposé, d'une quantité monome quelconque, il faut diviser l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.* On appelle ce nombre *l'exposant de la racine.* Ainsi, pour tirer la racine troisième ou cubique de $a^{12}b^6c^3$, je diviserais chacun des exposans par 3, et j'aurais a^4b^2c. Pareillement pour tirer la racine cinquième de $a^{10}b^{15}c^5$, je diviserais chacun des exposans par 5, et j'aurais a^2b^3c. En général, pour tirer la racine du degré r de la quantité a^mb^n, j'écrirais $a^{\frac{m}{r}}\ b^{\frac{n}{r}}$.

128. Si la quantité proposée était une fraction, on tirerait séparément la racine du numérateur et celle du dénominateur.

129. S'il y avait des coefficiens, on en tirerait la racine carrée ou cubique par les méthodes données en Arithmétique, et par celle qu'on verra par la suite, lorsque cette racine est plus élevée.

130. Lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire ne divise pas exactement chacun des exposans de la quantité proposée, c'est une preuve que cette quantité n'est point une puissance parfaite du degré dont il s'agit. Alors l'exposant est fractionnaire et marque une racine qui reste à extraire. Ainsi, si l'on demande la racine cubique de $q^9b^3c^4$, on aura $a^3bc^{\frac{1}{3}}$ ou $a^3bca^{\frac{1}{3}}$, dans laquelle l'exposant $\frac{1}{3}$ désigne qu'il faut encore extraire la racine cubique de c.

131. On indique aussi les extractions des racines supérieures au second degré, en employant le signe $\sqrt{}$; mais on place dans l'ouverture de ce signe le nombre qui marque le degré

de la racine dont il s'agit. Ainsi $\sqrt[3]{a}$ marque la racine cubique de a; $\sqrt[7]{a}$ marque la racine septième de a. Il faut donc regarder ces deux expressions $\sqrt[3]{a}$ et $a^{\frac{1}{3}}$ comme signifiant la même chose; il en est de même de $\sqrt[5]{a^4}$ et $a^{\frac{4}{5}}$.

132. Lorsque la quantité est complexe, il ne faut pas diviser chacun des exposans; mais il faut considérer la totalité de ses parties comme ne faisant qu'une seule quantité dont l'exposant est naturellement 1, que l'on divise par l'exposant de la racine qu'il s'agit d'extraire; ce qui n'est, à proprement parler, qu'une indication de cette racine; par exemple, au lieu de $\sqrt[4]{a^2+b^2}$, qui est la même chose que $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^1}$, on écrit $(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$. Si la quantité totale qui est sous le radical avait déjà un exposant, on diviserait de même cet exposant par celui de la racine qu'on a dessein d'extraire. Ainsi, au lieu de $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$, on peut écrire $(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}$.

133. Les règles que nous avons données (117 et suiv.) pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des quantités radicales du second degré, s'appliquent également aux quantités radicales des degrés supérieurs, pourvu que les radicaux sur lesquels on a à opérer soient de même degré entre eux. Ainsi

$$\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a\sqrt[7]{a},$$

$$\sqrt[5]{a^2b^3} \times \sqrt[5]{a^3b^2} = \sqrt[5]{a^5b^5} = ab,$$

$$a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 b}{a}} = \sqrt[5]{a^4 b}.$$

134. S'il s'agit d'élever un radical quelconque à une puissance dont l'exposant soit le même que celui du radical, il suffira d'ôter ce radical; Ainsi $(\sqrt[5]{a})^5 = a$; ce qui est évident en général, si l'on fait attention que l'objet est alors de ramener la quantité à son premier état.

Pour élever une quantité radicale monome à une puissance quelconque, il faut élever chacun de ses facteurs à cette puissance, selon la règle donnée (122). Ainsi $\sqrt[7]{a^2b^3}$, élevé à la puissance quatrième, donne $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$ qui se réduit à $ab\sqrt[7]{ab^5}$; ce qu'on peut voir encore de cette autre manière: $\sqrt[7]{a^2b^3}$ étant la même chose (131) que $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$, pour élever celui-ci à la quatrième puissance, je multiplie ses exposans par 4, ce qui me donne

$$a^{\frac{8}{7}}b^{\frac{12}{7}} = aba^{\frac{1}{7}}b^{\frac{5}{7}} = ab\sqrt[7]{ab^5}.$$

135. Pour diviser $\sqrt[7]{a^5}$ par $\sqrt[7]{a^3}$, on divisera a^5 par a^3, et l'on donnera au quotient a^2 le signe $\sqrt[7]{}$, ce qui donne $\sqrt[7]{a^2}$; de même

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b^3}}{\sqrt[5]{a^3b}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b^3}{a^3b}} = \sqrt[5]{a^2b^2}; \quad \frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}};$$

car la racine cinquième de 1 est 1. En général, toute puissance ou toute racine de l'unité, est l'unité.

136. Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale, il faut multiplier l'exposant actuel du radical, par l'exposant de cette nouvelle racine; ainsi, pour extraire la racine troisième de $\sqrt[5]{a^4}$, on écrira $\sqrt[15]{a^4}$, en multipliant 5 par 3. En effet, $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; or (127) pour extraire la racine de celui-ci, il faut diviser son exposant par 3, ce qui donne $a^{\frac{1}{15}}$, qui est la même chose que $\sqrt[15]{a^4}$.

137. Lorsque les quantités radicales proposées ne sont pas toutes du même degré, il faut, pour pratiquer sur elles les opérations de l'addition, soustraction, multiplication et divi-

sion, les ramener au même degré, ce qui est facile par cette règle. *S'il n'y a que des radicaux, multipliez l'exposant de l'un par l'exposant de l'autre; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir les deux radicaux : élevez en même temps la quantité qui est sous chaque radical, à la puissance marquée par l'exposant de l'autre radical.* Par exemple, pour réduire à un même radical les deux quantités $\sqrt[5]{a^3}$ et $\sqrt[7]{a^4}$, je multiplie 5 par 7, et j'ai 35 pour l'exposant du nouveau radical, qui sera $\sqrt[35]{}$; j'élève a^3 à la septième puissance, et a^4 à la cinquième, ce qui me donne a^{21} et a^{20}; en sorte que les quantités proposées sont changées en $\sqrt[35]{a^{21}}$ et $\sqrt[35]{a^{20}}$.

S'il y a plus de deux quantités radicales, *multipliez entre eux les exposans de tous les radicaux; le produit commun sera l'exposant que doivent avoir tous ces radicaux. Elevez en même temps la quantité qui est sous chaque radical, à une puissance d'un degré marqué par le produit des exposans de tous les radicaux autres que celui dont il s'agit.* Par exemple, si j'avais les trois radicaux $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ et $\sqrt[8]{a^7}$, je multiplierais les trois exposans 5, 7 et 8, ce qui me donnerait 280 pour l'exposant commun des nouveaux radicaux; j'élèverais a^3 à la puissance 7×8 ou 56; a^2 à la puissance 5×8 ou 40; et a^7 à la puissance 5×7 ou 35, ce qui me donnerait $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$. La raison de cette règle est facile à apercevoir, en observant sur le premier exemple, que lorsqu'on élève, selon la règle, a^3 à la septième puissance, on rend a, 7 fois aussi souvent facteur qu'il l'était; mais en rendant l'exposant de son radical 7 fois aussi grand qu'il l'était, on rend a, 7 fois moins souvent facteur; il y a donc compensation, et il n'y a que la forme de changée.

138. On peut conclure de ce raisonnement, que lorsque l'exposant de la quantité qui est sous le radical, et celui du radical même, ont un diviseur commun, on peut en simplifier l'expression en divisant par ce diviseur commun l'un et

l'autre de ces deux exposans : par exemple $\sqrt[12]{a^8}$ peut se réduire à $\sqrt[3]{a^2}$, en divisant 12 et 8 par 4. Pareillement $\sqrt[4]{a^2}$ peut se réduire à $\sqrt{a}$; $\sqrt[6]{a^3}$ se réduit à $\sqrt{a}$.

139. Concluons encore que lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres nombres, on peut faire cette extraction successivement de cette manière : supposons qu'on demande la racine sixième de a^{24}; je puis tirer d'abord la racine carrée, puis la racine cubique, et j'aurai la racine sixième. En effet, $\sqrt[6]{a^{24}}$, se réduit (138) à $\sqrt[3]{a^{12}}$, puis à $\sqrt[1]{a^4}$ ou a^4, ce qui est la même chose que si l'on avait pris tout de suite la racine sixième de a^{24}, en divisant l'exposant 24 par 6 (127).

Au reste, comme les exposans fractionnaires tiennent lieu des radicaux, et que les premiers sont plus commodes à employer dans le calcul que les derniers, nous dirons encore un mot sur le calcul des exposans. Si j'avais $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[5]{a^4}$, je changerais cette opération en celle-ci : $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, qui (20) donne $a^{\frac{7}{5}}$ ou $aa^{\frac{2}{5}}$ qui se réduit à $a\sqrt[5]{a^2}$. Si j'avais $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[7]{a^4}$, j'écrirais $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$ ou $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, ou (en réduisant les deux fractions au même dénominateur), $a^{\frac{21+20}{35}}$ ou $a^{\frac{41}{35}}$, qui revient à $aa^{\frac{6}{35}}$ ou enfin à $a\sqrt[35]{a^6}$.

En général, $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ se change en $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$, qui revient à $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, ou (en réduisant au même dénominateur) à $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, ou enfin (131) à $\sqrt[mq]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$.

Il en est de même de la division ;

$$\sqrt[m]{a^n b^p} : \sqrt[q]{a^r b^s} = \frac{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}} = a^{\frac{qn-mr}{qm}} b^{\frac{pq-ms}{qm}}$$

$$= \sqrt[qm]{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}.$$

140. Dans ce dernier exemple, nous avons retranché l'exposant de chaque lettre du dénominateur, de l'exposant de la lettre correspondante dans le numérateur. La règle que nous avons donnée (31) pour la division, ne semble le permettre que lorsque l'exposant du dénominateur est plus petit que celui du numérateur; mais cela se peut, en général, en donnant à l'excédant le signe —, après la réduction faite; en sorte qu'on peut, en général, mettre toute fraction algébrique sous la forme d'un entier. Par exemple, au lieu de $\frac{a^3}{b^2}$ on peut écrire $a^3 b^{-2}$. En effet, suivant l'idée que nous avons donnée de la division, l'effet d'un diviseur est de détruire dans le dividende tous les facteurs qui se trouvent dans le diviseur; dans $\frac{a^5}{a^2}$, qui se réduit à a^3, ce diviseur a^2 détruit dans a^5 deux facteurs égaux à a. Pareillement dans la quantité $\frac{a^3}{b^2}$, l'effet de b^2 doit être de détruire dans a^3 deux facteurs égaux à b. Or, quoique ces facteurs n'y soient pas explicitement, on peut toujours se les représenter; car on conçoit que a contient b un certain nombre de fois, soit entier, soit fractionnaire : soit m ce nombre de fois, alors a vaut donc m fois b, ou mb; la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ sera donc $\frac{m^3 b^3}{b^2}$, qui se réduit à $m^3 b$; or, la quantité $a^3 b^{-2}$ devient, en pareil cas, $m^3 b^3 b^{-2}$, ou (20) $m^3 b^{3-2}$, c'est-à-dire $m^3 b$; donc $\frac{a^3}{b^2}$ revient au même que $a^3 b^{-2}$; donc, en général, *on peut faire*

passer une quantité du dénominateur au numérateur, en l'écrivant dans celui-ci comme facteur, mais avec un exposant de signe contraire à celui qu'elle avait dans le dénominateur.

Ainsi, au lieu de $\frac{1}{a^3}$, on peut écrire $1 \times a^{-3}$, ou simplement a^{-3}; au lieu de $\frac{1}{a^m}$, on peut écrire a^{-m}; au lieu de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$, on peut écrire $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. Au lieu de $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$, on peut écrire $(a^3 + b^3) \times (a^2 + b^2)^{-1}$; et, eu égard à tout ce qui précède,

$$\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}} = \frac{(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}} = (a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}.$$

141. Et réciproquement, *si une quantité est composée de parties qui aient des exposans négatifs, on pourra faire passer ces parties au dénominateur, en rendant leurs exposans positifs.*

Ainsi, au lieu de $a^3 b^{-4}$, on pourra écrire $\frac{a^3}{b^4}$; au lieu de a^{m-3}, qui est la même chose que $a^m \times a^{-3}$, on pourra écrire $\frac{a^m}{a^3}$, et ainsi de suite.

De la formation des puissances des quantités complexes, et de l'extraction de leurs racines.

142. Suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, il ne s'agit, lorsqu'on veut élever une quantité complexe à une puissance composée, que de multiplier cette quantité par elle-même, autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance; mais en se bornant à ce moyen, on tomberait souvent dans des calculs très longs, pour parvenir à des résultats qu'on peut avoir à bien moins de frais en réfléchissant un peu sur les propriétés des produits de quelques-unes de ces multiplications. Nous allons nous occuper des puissances des quantités binomes, parce que celles-ci conduisent à la formation des puissances des quantités plus

composées; mais pour mieux faire sentir l'étendue de ce que nous avons à dire, nous reprendrons les choses d'un peu plus haut; nous examinerons quelle est la nature des produits que l'on trouve en multipliant successivement plusieurs facteurs binomes qui auraient tous un terme commun : cette recherche, qui nous conduira directement à notre objet, nous fournira en même temps plusieurs propositions qui nous seront très utiles par la suite.

143. Soient donc $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc., plusieurs quantités binomes qui ont toutes le terme x commun, et qu'on veut multiplier les unes par les autres. En effectuant les multiplications, on trouvera

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc,$$

et ainsi de suite; ce qui nous fournit les observations suivantes: 1°. Le premier terme de chaque produit est toujours le premier terme x de chaque binome, élevé à une puissance marquée par le nombre des binomes; en sorte que si le nombre des binomes était m, le premier terme de chaque produit serait x^m. 2°. Les puissances de x vont ensuite en diminuant continuellement d'une unité jusqu'au dernier terme, qui ne renferme plus de x. 3°. Les multiplicateurs de chaque puissance de x (que nous nommerons, à l'avenir, multiplicateurs du terme, où se trouvent ces puissances) sont, pour le second terme la somme des seconds termes a, b, c, etc., des binomes; pour le troisième terme, la somme des produits de ces quantités a, b, c, etc., multipliées deux à deux; pour le quatrième, la somme des produits de ces quantités a, b, c, etc., multipliées trois à trois; et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui est le produit de toutes ces quantités. Ces conséquences sont évidentes, quel que soit le nombre des quantités $x+a$, $x+b$, etc., qu'on a multipliées.

144. Si l'on suppose maintenant que toutes les quantités a, b, c, etc., soient égales, auquel cas tous les binomes qu'on a multipliés seront égaux, les produits trouvés ci-dessus seront

donc les puissances successives de l'un quelconque de ces binomes, de $x+a$, par exemple, si l'on suppose que les quantités b, c, d, etc., sont chacune égale à a. Si l'on met donc a dans ces produits, au lieu de chacune des lettres b, c, d, etc., on aura

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$; $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$, etc.,

où l'on voit que si m est l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome, les puissances successives de x seront x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, etc. Mais on ne voit pas aussi facilement comment les coefficiens des différens termes de chaque puissance dérivent les uns des autres, ni quelle est leur dépendance de l'exposant m, car il en existe une, comme on va le voir.

145. Pour trouver la loi de ces coefficiens, il faut retourner à nos premiers produits, et remarquer que puisque le multiplicateur du second terme est la somme de toutes les quantités a, b, c, etc., il faudra, lorsque toutes ces quantités seront égales à a, qu'il soit composé de a, pris autant de fois qu'il y a de ces quantités; donc si leur nombre est m, ce multiplicateur sera m fois a, ou ma, c'est-à-dire que son coefficient m sera égal à l'exposant du premier terme de cette puissance. C'est ce que l'on voit aussi dans les puissances particulières que nous avons exposées ci-dessus. Voyons maintenant quels doivent être les multiplicateurs des autres termes. Il est évident que tous les produits ab, ac, ad, bc, bd, etc., deviennent chacun égal à a^2, dans la supposition présente. Pareillement, tous les produits abc, abd, etc., deviennent chacun égaux à a^3, et ainsi de suite. Donc le multiplicateur du troisième terme de chacun de nos premiers produits se réduit alors à a^2 pris autant de fois que les lettres a, b, c, etc., peuvent donner de produits deux à deux. Pareillement, celui du quatrième se réduit à a^3 pris autant de fois que les lettres a, b, c, etc., peuvent donner de produits trois à trois, et ainsi de suite; donc, pour avoir le coefficient numérique des troisième, quatrième, etc., termes de la puissance m du binome $x+a$, la question se

réduit à déterminer combien un nombre m de lettres a, b, c, etc., peut donner de produits deux à deux, trois à trois, etc.

146. Or, je remarque que si l'on a un nombre quelconque m de lettres, et qu'on les combine de toutes les manières imaginables deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., sans répéter une même lettre dans une même combinaison; je remarque, dis-je, 1°. que le nombre des combinaisons deux à deux sera double du nombre des produits réellement différens des deux lettres: en effet, deux lettres peuvent être combinées l'une avec l'autre de deux manières différentes; par exemple, a et b donnent les deux combinaisons ab et ba; mais ces deux combinaisons ne font pas deux produits différens; 2°. que le nombre des combinaisons de plusieurs lettres trois à trois sera sextuple du nombre des produits de trois lettres, réellement distincts : en effet, pour avoir les combinaisons des trois quantités a, b, c, il faut, après en avoir combiné deux, a et b, par exemple, ce qui donne ab et ba, combiner la troisième c avec chacune des deux premières combinaisons, c'est-à-dire lui donner toutes les dispositions possibles à l'égard des lettres a et b qui entrent dans ab et ba; or, cela donne six combinaisons de trois lettres, comme il est évident par les dispositions suivantes, abc, acb, cab, bac, bca, cba, mais ces six combinaisons ne font chacune que le même produit. Un raisonnement semblable prouvera que quatre quantités sont susceptibles de 24 combinaisons, dont chacune cependant ne fait que le même produit; donc le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres quatre à quatre, est la 24e partie du nombre total de ces combinaisons. Pareillement, le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres 5 à 5, 6 à 6, 7 à 7, etc., est la 120e, 720e, 5040e, etc., partie du nombre total de ces combinaisons, c'est-à-dire est en général exprimé par une fraction qui a pour numérateur le nombre total des combinaisons, et pour dénominateur le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4, etc., jusqu'à celui qui marque de combien de lettres chaque produit est composé.

147. Voyons donc quel est le nombre total des combinaisons que peut donner un nombre m de lettres a, b, c, etc., prises deux à deux, trois à trois, etc. Il est évident, pour les *combinaisons deux à deux*, que puisqu'une même lettre ne doit pas être combinée avec elle-même, elle ne peut l'être qu'avec les $m-1$ autres, et par conséquent elle peut donner $m-1$ combinaisons; donc puisqu'il y a m lettres en tout, elles donneront m fois $(m-1)$, ou $m(m-1)$ combinaisons. Donc, suivant ce qui vient d'être dit (146), le nombre des produits de deux lettres, réellement différens, sera $\frac{1}{2}m(m-1)$.

A l'égard des *combinaisons trois à trois*, pour les avoir, il faut que chacune des combinaisons deux à deux soit combinée avec chacune des lettres qu'elle ne renferme point, c'est-à-dire avec un nombre de lettres marqué par $m-2$; donc chacune de ces combinaisons donnera $(m-2)$ combinaisons de trois lettres; donc, puisqu'il y a $m(m-1)$ combinaisons de deux lettres, dont chacune doit donner $(m-2)$ combinaisons de trois lettres, il y aura, en tout, $m(m-1)(m-2)$ combinaisons de trois lettres; donc, puisque (146) le nombre des produits réellement distincts est la sixième partie de ce nombre total de combinaisons, il en sera $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Le même raisonnement prouvera que le nombre des produits distincts qu'on peut former en multipliant un nombre m de lettres 4 à 4, 5 à 5, etc., sera exprimé par $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, par $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$, et ainsi de suite.

148. Concluons donc de là, et de ce qui a été dit (146), que les termes successifs du binome $(x+a)$ élevé à la puissance m, ou de $(x+a)^m$, sont

$$x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3}+\text{etc.}$$

C'est-à-dire que le premier terme de la suite ou série qui exprime cette puissance, est le premier terme du binome,

élevé à la puissance m; qu'ensuite les exposans de x vont en diminuant d'une unité, et ceux de a en augmentant d'une unité, à partir du second terme où il commence à entrer. A l'égard des coefficiens m, $\frac{1}{2}m(m-1)$, etc., il faut remarquer que celui du second terme est égal à l'exposant du premier; que celui du troisième est le coefficient m du précédent multiplié par $\frac{m-1}{2}$, c'est-à-dire par la moitié de l'exposant de x dans ce terme précédent. Pareillement, le coefficient du quatrième terme est le coefficient du terme précédent, multiplié par $\frac{m-2}{3}$, c'est-à-dire par le tiers de l'exposant de x dans ce même terme précédent, et ainsi de suite. Toutes ces conséquences, que l'inspection seule fournit, nous conduisent à cette règle générale: *Le coefficient de l'un quelconque des termes se trouve en multipliant le coefficient du précédent par l'exposant de* x *dans ce même terme précédent, et divisant par le nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit.* Formons, d'après cette règle, la septième puissance de $x+a$, pour servir d'exemple. Nous aurons

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7,$$

en écrivant d'abord x^7, puis multipliant celui-ci par 7, diminuant l'exposant d'une unité et multipliant par a, ce qui donne $7ax^6$. Je multiplie celui-ci par $\frac{6}{2}$, je diminue l'exposant de x d'une unité, et j'augmente celui de a d'une unité, et j'ai $21a^2x^5$ pour le troisième terme. Je multiplie ce troisième terme par $\frac{5}{3}$, je diminue l'exposant de x d'une unité, et j'augmente celui de a d'une unité, ce qui me donne $35a^3x^4$ pour le quatrième terme; il est aisé d'achever.

Si au lieu de $x+a$, on avait $x-a$, alors les termes auraient alternativement les signes $+$ et $-$, à commencer du premier; car si dans a^4, par exemple, on substitue $-a$ au lieu de $+a$, le signe ne changera point (125); mais il changerait si l'on substituait $-a$ dans une puissance impaire de a.

La même formule que nous venons de donner peut servir à

élever à une puissance proposée, non-seulement un binome simple comme $x + a$, mais encore un binome composé, tel que $x^2 + a^2$, ou $x^2 + a$, ou $x^3 + a^3$, etc., et même à élever non-seulement à une puissance dont l'exposant serait un nombre entier positif, mais encore à une puissance dont l'exposant serait positif ou négatif, entier ou fractionnaire; mais ces usages exigent, pour plus de commodité, que nous lui donnions une autre forme.

149. Reprenons donc la formule

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m\frac{(m-1)}{2}a^2x^{m-2} + m\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)a^3x^{m-3} + \text{etc.}$$

Suivant ce que nous avons dit (141), on peut, au lieu de x^{m-1}, écrire $\frac{x^m}{x}$; au lieu de x^{m-2}, écrire $\frac{x^m}{x^2}$, et ainsi de suite. Conformément à ce principe, nous pourrons donc changer notre formule en cette autre

$$(x+a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + \frac{m(m-1)a^2x^m}{1\cdot 2\,x^2} + \text{etc.}$$

Si l'on fait attention maintenant que tous les termes ont pour facteur commun x^m, on pourra donner à la formule cette autre forme,

$$(x+a)^m = x^m\left\{1 + m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} + \text{etc.}\right\}$$

De là nous concluons la règle suivante pour former d'une manière commode la *suite* ou *série* des termes qui doivent composer la puissance m du binome $(x + a)$.

150. Écrivez sur une première ligne, comme il suit, les quantités

$$m,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m-3}{4},\ \frac{m-4}{5},\ \text{etc.}$$

$$1 + m\frac{a}{x} + m\left(\frac{m-1}{2}\right)\frac{a^2}{x^2} + m\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{3}\right)\frac{a^3}{x^3} + \text{etc.}$$

Et ayant écrit l'unité au-dessous et à une place plus avant sur la gauche, formez la suite inférieure par cette loi. Multipliez cette unité par le premier terme de la partie supérieure et par $\frac{a}{x}$, et vous aurez le second terme de la série inférieure. Multipliez ce second terme par le second terme de la suite supérieure, et encore par $\frac{a}{x}$, et vous aurez le troisième terme de la série inférieure, et ainsi de suite. Réunissez tous ces termes de la série inférieure, et multipliez la totalité par x^m, vous aurez la valeur de $(x+a)^m$.

151. Si, au lieu de $x+a$, on avait x^2+a^2, ou x^3+a^3, ou etc., au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, on multiplierait par $\frac{a^2}{x^2}$ dans le premier cas; par $\frac{a^3}{x^3}$ dans le second, et, en général, par le second terme du binome divisé par le premier; et l'on multiplierait la totalité, dans le premier cas, par x^2 élevé à la puissance m, et dans le second cas, par x^3 élevé à la puissance m, c'est-à-dire, en général, par le premier terme du binome, élevé à la puissance proposée.

Enfin, si le second terme du binome, au lieu d'avoir le signe +, avait le signe —, au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, lorsqu'on a $x+a$, ou par $\frac{a^2}{x^2}$, lorsqu'on a x^2+a^2, on multiplierait successivement par $-\frac{a}{x}$, ou par $-\frac{a^2}{x^2}$, et ainsi de suite.

152. Si, au lieu d'un binome, on avait un trinome à élever à une puissance proposée; si l'on avait, par exemple, $a+b+c$ à élever à la troisième puissance, on ferait $b+c=m$, et l'on aurait $a+m$ à élever à la troisième puissance, qui, selon les règles qu'on vient de donner, serait $a^3+3a^2m+3am^2+m^3$. Remettant maintenant, au lieu de m, sa valeur $b+c$, on aurait..... $a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$. Or les puissances $(b+c)$, $(b+c)^2$, $(b+c)^3$, étant toutes des puissances de binomes, se trouveront également par les règles précédentes; il ne s'agira plus que de les multiplier respectivement par

$3a^2 \cdot 3a = 9a^3$. En achevant le calcul, on trouvera

$$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$

153. Mais en réfléchissant un peu sur la règle de l'élévation des binomes, on verra qu'on peut former la puissance d'un polynome quelconque d'une manière plus commode, en observant la règle suivante.

Supposons qu'on veut élever le trinome $a + b + c$ à la troisième puissance. Faisons $b + c = p$, et alors il s'agit d'élever $a + p$ à la puissance 3, ce qui donnera

$$a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3.$$
$$1 \quad 2 \quad 3$$

J'écris sous chaque terme de cette quantité l'exposant de p ; je multiplie chaque terme par le nombre qui lui correspond, et je change un p en b, ce qui donne

$$3a^2b + 6abp + 3bp^2.$$
$$1 \quad 2 \quad 3$$

J'écris sous cette quantité la moitié de chaque exposant de p, et je multiplie chaque terme par le nombre correspondant; changeant encore un p en b, j'ai

$$3ab^2 + 3b^2p.$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}$$

J'écris sous chaque terme de celle-ci le tiers de l'exposant de p, je multiplie comme ci-devant, et je change un p en b, j'ai b^3.

Enfin, je réunis toutes ces quatre lignes, en changeant p en c, et j'ai

$$a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 + 3a^2b + 6abc + 3bc^2 + 3ab^2 + 3b^2c + b^3,$$

de même que ci-dessus. Ainsi on multipliera chaque terme de la première ligne par l'exposant de p ; chaque terme de la seconde par la moitié de l'exposant de p dans cette seconde ; chaque terme de la troisième par le tiers de l'exposant de p dans cette troisième, et ainsi de suite, observant à chaque ligne, à commencer de la seconde, de changer un p en b, et à la fin on changera tous les p restans en c. Cette règle s'applique de même aux quatrinomes, quintinomes, etc.

De l'extraction des Racines des quantités complexes.

154. Lorsqu'une fois on est en état de trouver tous les termes dont une puissance proposée d'un binome doit être composée, il est aisé d'en conclure la méthode d'extraire une racine d'un degré proposé, soit que la quantité dont il s'agit soit littérale, soit qu'elle soit numérique : ce que nous allons dire sur la racine cinquième suffira pour faire comprendre comment on doit se conduire dans les autres degrés. On a

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

De ces six termes, les deux premiers suffisent pour établir la

règle que nous cherchons. Le premier est la cinquième puissance du premier terme du binome, et le second est le quintuple de la quatrième puissance de ce même premier terme, multipliée par le second terme; donc pour avoir le premier terme de la racine, il faut, après avoir ordonné tous les termes de la puissance donnée, extraire la racine cinquième du premier terme de cette puissance; et pour avoir le second terme de la racine, il faut diviser le second terme de la quantité proposée, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine qu'on vient de trouver par la première opération. En effet, il est évident que la racine cinquième de a^5 est a, qui est le premier terme du binome, dont la quantité..... $a^5 + 5a^4b +$ etc., est la cinquième puissance; et il est également évident que $\frac{5a^4b}{5a^4}$ donne b qui est le second terme de ce binome. Mais comme il pourrait se faire que la quantité proposée ne fût pas une puissance parfaite du cinquième degré, après avoir ainsi trouvé le second terme de la racine, il faudra vérifier cette racine en l'élevant au cinquième degré et retranchant le résultat de la quantité proposée; voici un exemple. On demande la racine cinquième de

$$\begin{array}{l|l} 32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & \text{Racine} \\ -32a^5 & 2a+3b \\ \hline \text{Reste } +240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & 80a^4 \end{array}$$

Je tire la racine cinquième de $32a^5$; elle est $2a$, que j'écris à la racine. J'élève $2a$ à la cinquième puissance; et j'écris le produit $32a^5$, avec un signe contraire, sous le premier terme $32a^5$ de la quantité proposée, ce qui le détruit. J'élève la racine $2a$ à la quatrième puissance; ce qui me donne $16a^4$, que je quintuple, et j'ai $80a^4$ que j'écris sous la racine $2a$; je m'en sers pour diviser le premier terme $240a^4b$ du reste: la division faite, j'ai pour quotient $3b$, que j'écris à la racine; en sorte que j'ai $2a + 3b$ pour la racine cherchée; mais pour m'en assurer, j'élève $2a + 3b$ à la cinquième puissance, je retrouve les mêmes termes que dans la quantité proposée; faisant la

soustraction, il ne reste rien ; d'où je conclus que la racine est exactement $2a + 3b$.

S'il devait y avoir encore un autre terme à la racine, alors il y aurait un reste après cette première opération : je regarderais $2a + 3b$ comme une seule quantité, avec laquelle j'opérerais pour trouver le troisième terme, comme j'ai opéré avec $2a$ pour trouver le second.

155. A l'égard des quantités numériques, la règle est absolument la même ; la seule chose qu'il faille éclaircir, est à quel caractère on reconnaîtra ce qui répond au premier terme a^5, et ce qui répond au terme $5a^4b$,

Pour se conduire dans cette recherche, il n'y a qu'à imaginer que dans le binome $a + b$, a marque les dixaines, et b les unités ; alors il est évident que a^5 sera des centaines de mille, parce que la cinquième puissance de 10 est 100000 ; donc le premier terme a^5, ou la quantité dont il faudra tirer la racine cinquième, pour avoir le premier chiffre de la racine, ne peut faire partie des cinq derniers chiffres sur la droite ; on séparera donc les cinq derniers chiffres, et, supposé qu'il en reste cinq seulement ou moins de cinq sur la gauche, on en cherchera la racine cinquième, qui sera facile à trouver, ne pouvant avoir qu'un seul chiffre. Quand on aura trouvé le premier chiffre de la racine, et qu'on aura retranché sa cinquième puissance de la quantité qui a servi à trouver cette racine, on abaissera, à côté du reste, les cinq chiffres séparés ; et pour avoir la partie qu'il faut diviser par $5a^4$, c'est-à-dire par le quintuple de la quatrième puissance des dixaines trouvées, il faudra séparer quatre chiffres sur la droite, et ne diviser que la partie restante à gauche ; car $5a^4b$, qui est la partie qu'on doit diviser par $5a^4$ pour avoir b, ne peut faire partie des quatre derniers chiffres, puisque étant le produit de $5a^4$ par b, elle doit être au moins des dixaines de mille, puisque a^4 est des dixaines de mille. Ces éclaircissemens posés, le procédé est le même que pour l'extraction littérale ; voici un exemple.

On demande la racine cinquième de.....

38o2.o4o32 { 52 Racine.
3125 {

6770.4032
3125
38020403 2

o

Je sépare les cinq derniers chiffres o4o32, et je cherche la racine cinquième de 3802 qui, ayant moins de cinq chiffres, ne peut donner qu'un chiffre pour cette racine; elle est 5, que j'écris à côté. J'élève 5 à la cinquième puissance, et j'écris le produit sous 3802 pour l'en retrancher; il reste 677, à côté duquel j'abaisse les cinq chiffres séparés d'abord; du total, je sépare quatre chiffres sur la droite, et je divise la partie restante 6770, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine trouvée 5, c'est-à-dire par 5 fois 625, ou 3125. Je trouve pour quotient 2, que j'écris à côté du premier chiffre trouvé 5. Pour vérifier cette racine 52, je l'élève à la cinquième puissance, et je trouve le nombre même proposé, d'où je conclus que 52 est exactement la racine. S'il y avait un *reste*, et qu'on voulût approcher plus près de la racine, on mettrait 5 zéros, et l'on continuerait pour avoir le troisième chiffre, qui serait une décimale, comme on a fait pour avoir le second.

En général, pour tirer une racine de degré quelconque m, il faut séparer en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, dont la plus à gauche peut en avoir moins; tirer la racine du degré m de cette dernière tranche : cette racine n'aura jamais qu'un seul chiffre; à côté du reste, descendre la tranche suivante, en séparer $m-1$ chiffres sur la droite, et diviser la partie restante, à gauche, par m fois la racine qu'on vient de trouver, élevée à la puissance $m-1$, et ainsi de suite. Cela est fondé sur ce que les deux premiers termes d'un binome $a+b$ élevé à la puissance quelconque m, sont $a^m + ma^{m-1}b$, et sur ce que si a marque des dixaines et b des

unités, a^m ne peut faire partie des m derniers chiffres, et $ma^{m-1}b$ ne peut faire partie des $m-1$ derniers.

De la manière d'approcher de la racine des puissances imparfaites des quantités littérales.

156. Lorsque la quantité complexe proposée n'est point une puissance parfaite du degré dont on demande la racine, alors il n'y a point de racine exacte à espérer : il faut se borner à en approcher aussi près que peut l'exiger la question pour laquelle cette extraction est nécessaire. On pourrait y parvenir en suivant la méthode que nous venons d'exposer pour les puissances parfaites; elle donnerait une suite de termes fractionnaires dont la valeur décroissant continuellement, permet de se borner à un nombre limité de termes, et de négliger les autres; mais l'opération serait longue et pénible. On peut parvenir au même résultat par une voie beaucoup plus courte, en employant la règle que nous avons donnée ci-dessus (150) pour élever un binome à une puissance proposée. Pour cet effet, il faut se rappeler (132) que toute racine peut être représentée par une puissance fractionnaire. Ainsi, demander la racine carrée de $a+b$, ou évaluer $\sqrt{a+b}$, c'est demander d'élever $a+b$ à la puissance $\frac{1}{2}$, puisque (143)..... $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b}$. Donc, suivant la règle donnée (150), j'écris la suite

$$\frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \text{etc.},$$

qui se réduit à $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, etc.

Et posant 1 pour premier terme de la seconde suite, je forme la suivante :

$$1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}-\text{etc.}$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier terme $\frac{1}{2}$ de la première suite, et par $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire par le second

terme du binome $a+b$, divisé par le premier, j'ai $\frac{1}{2}\frac{b}{a}$ pour le second terme. Je forme de même le troisième, en multipliant ce second par le second terme $-\frac{1}{4}$ de la première suite, et par $\frac{b}{a}$; ce qui me donne $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ pour le troisième terme, et ainsi de suite. Enfin je multiplie la totalité de ces termes par le premier terme du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, et j'ai

$$\sqrt{a+b} = a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\text{etc.}\right).$$

157. Nous verrons, par la suite, l'usage de ces sortes d'approximations. Pour le présent, nous nous contenterons de faire voir, par un exemple en nombre, comment on peut les employer pour approcher des racines des quantités numériques. Supposons qu'on veut avoir la racine carrée de 101. Je partagerai 101 en deux parties dont l'une soit un carré, le plus grand qu'il sera possible; par exemple, je le partage en ces deux parties 100 et 1; je prends la première pour a, et la seconde pour b, en sorte que je suppose $a=100$, et $b=1$; par conséquent

$$a^{\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10, \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

donc la série qui exprime $\sqrt{a+b}$, c'est-à-dire ici $\sqrt{101}$, deviendra, en mettant pour $a^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{b}{a}$ leurs valeurs,

$$10\left(1+\frac{0{,}01}{2}-\frac{(0{,}01)^2}{8}+\frac{(0{,}01)^3}{16}-\frac{5(0{,}01)^4}{128}+\frac{35(0{,}01)^5}{1280}-\text{etc.}\right).$$

Supposons qu'on veut avoir cette racine jusqu'à un dix-millième près seulement, alors il suffit de prendre les trois premiers termes, car le quatrième qui est $\frac{(0{,}01)^3}{16}$ revient à

$\frac{0,000001}{16}$, c'est-à-dire à 0,0000000625; et quoiqu'il doive être multiplié par 10 qui doit multiplier tous les termes de la série, il ne produira que 0,000000625, qui est bien au-dessous d'un dix-millième. Les termes suivans sont, à plus forte raison, beaucoup au-dessous, puisque étant continuellement multipliés par 0,01, qui est une fraction, ils doivent diminuer continuellement; car en multipliant par une fraction, on ne prend (*Arith.* 120) qu'une partie du multiplicande. La valeur de $\sqrt{101}$ se réduit donc à $10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}\right)$, ou.....,

10(1+0,005—0,0000125), ou $10\times 1,0049875$, ou 10,049875, c'est-à-dire 10,0499, en se bornant aux dix-millièmes.

Cette méthode peut s'appliquer à toutes sortes de racines et à toutes sortes de quantités; nous en donnerons encore un exemple sur $\sqrt[5]{a^5-x^5}$. Je change donc cette quantité en $(a^5-x^5)^{\frac{1}{5}}$, et procédant comme ci-dessus, j'écris

$$\frac{1}{5},\ \frac{\frac{1}{5}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{5}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{5}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{5}-4}{5},\ \text{etc.},$$

ou $$\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{7}{10},\ -\frac{19}{25},\ \text{etc.};$$

et posant 1 pour premier terme de la seconde suite, je forme la suivante :

$$1-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{a^5}-\frac{2}{25}\cdot\frac{x^{10}}{a^{10}}-\frac{6}{125}\cdot\frac{x^{15}}{a^{15}}-\frac{42}{1250}\cdot\frac{x^{20}}{a^{20}}-\frac{798}{31250}\cdot\frac{x^{25}}{a^{25}}-\text{etc.},$$

en multipliant le premier terme 1 par le premier terme $\frac{1}{5}$, de la suite supérieure, et par $-\frac{x^5}{a^5}$, c'est-à-dire par le second terme du binome, divisé par le premier, ce qui donne $-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}$ pour second terme de la série. Pour avoir le troisième, je multiplie celui-ci par le second terme $-\frac{2}{5}$, de la suite

supérieure, et par $-\frac{x^5}{a^5}$, ce qui me donne $\frac{-2x^{10}}{25a^{10}}$. En calculant de même les suivans jusqu'au sixième, et multipliant le tout par le premier terme a^5 du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire (122) par $a^{5\times\frac{1}{5}}$, ou par a, j'ai pour valeur approchée de $\sqrt[5]{a^5-x^5}$, la quantité

$$a\left(1-\frac{x^5}{5a^5}-\frac{2x^{10}}{25a^{10}}-\frac{6x^{15}}{125a^{15}}-\frac{42x^{20}}{1250a^{20}}-\text{etc.}\right).$$

158. Observons, à l'égard de ces séries et de toutes les autres qu'on peut former de la même manière, qu'on doit toujours prendre pour premier terme de la quantité proposée le plus grand terme; par exemple, dans $\sqrt{a+b}$, nous avons pris ci-dessus a pour premier terme; mais si b était plus grand que a, il aurait fallu prendre b pour premier terme. La raison en est que lorsque b est plus grand que a, la première série $a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}\right)$ est trompeuse; car $\frac{b}{a}$ étant alors plus grand que l'unité, les termes suivans qui sont continuellement multipliés par $\frac{b}{a}$ vont toujours en augmentant; en sorte qu'on n'a aucune raison de s'arrêter après un certain nombre de termes. Mais si, dans ce même cas, on forme la série en prenant b pour premier terme, on aura..... $b^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a}{b}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}+\text{etc.}\right)$, dans laquelle les termes vont en décroissant. —

Les séries dont les termes vont en augmentant de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine, s'appellent *séries divergentes;* et au contraire on appelle *séries convergentes* celles dont les termes diminuent de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine.

159. Nous avons vu (140) que toute fraction algébrique pouvait être mise sous la forme d'un entier, en faisant passer

son dénominateur au numérateur avec un exposant négatif. Cette observation nous fournit le moyen de réduire en série toute fraction dont le dénominateur serait complexe; ce qui sera utile par la suite. Par exemple, si j'avais $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$, au lieu de cette quantité, j'écrirais $a^2 \times (a^2 - x^2)^{-1}$, et alors j'éleverais $a^2 - x^2$ à la puissance -1, selon la règle donnée (150), c'est-à-dire que je poserais d'abord la série

$$-1, \frac{-1 \cdot -1}{2}, \frac{-1 \cdot -2}{3}, \frac{-1 \cdot -3}{4}, \text{ etc.},$$

ou $-1, \quad +1, \quad -1, \quad +1$, etc.

et je formerais la série suivante :

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{etc.}$$

en multipliant le premier terme 1 de cette seconde par le premier terme -1 de la série supérieure, et par $-\frac{x^2}{a^2}$, ce qui donnerait $+\frac{x^2}{a^2}$; multipliant celui-ci par le second terme -1 de la série supérieure, et par $-\frac{x^2}{a^2}$; et ainsi de suite. Après quoi je multiplierais la totalité par le premier terme a^2 élevé à la puissance -1, c'est-à-dire (122) par $a^2 \times a^{-1}$ ou a^{-2}; ce qui me donnerait $a^{-2}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{etc.}\right)$ pour valeur de $(a^2 - x^2)^{-1}$; donc pour avoir $a^2(a^2 - x^2)^{-1}$, il ne s'agit plus que de multiplier par a^2; or $a^{-2} \times a^2$ donnant a^{2-2} (20), ou a^0, qui se réduit à 1, on aura donc

$$a^2(a^2 - x^2)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{etc.}$$

On s'y prendrait de même pour réduire en série $\frac{a^4}{(a^2 + x^2)^3}$; on considérerait cette quantité comme $a^4(a^2 + x^2)^{-3}$.

160. Nous avons supposé que la même formule qui servait pour former les puissances parfaites d'un binôme, pouvait aussi servir pour en former les puissances imparfaites. Comme les principes sur lesquels cette formule est fondée supposent que l'exposant est un nombre entier positif, on pourrait douter qu'on pût l'appliquer légitimement au cas où cet exposant est fractionnaire positif ou négatif. Voici comment on peut se convaincre que la même formule peut servir dans tous ces cas. Si l'on considère la puissance $\frac{m}{n}$ de $(a+b)$, la fraction $\frac{m}{n}$ étant positive, on aura (156),

$$(1)\ldots (a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\left[1+\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}\right].$$

Soit

$$(2)\ldots p=\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}$$

Il viendra $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}(1+p)$.

Élevant chaque membre à la puissance n, on aura

$(a+b)^m = a^m(1+p)^n$. Mais $(a+b)^m = a^m\left\{1+m\frac{b}{a}+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}\right\}$.

Si donc $a^m(1+p)^n$ revient à $a^m\left(1+m\frac{b}{a}+\text{etc.}\right)$, ce sera une preuve, la dernière équation ayant lieu, que toutes celles dont elle est déduite ont lieu, et que par conséquent la formule (1) est exacte. Voyons donc si $a^m(1+p)^n$ revient à $(a+b)^m$. Or,

$$(3)\ldots (1+p)^n = 1+np+\frac{1}{2}n(n-1)p^2+\frac{1}{2.3}n(n-1)(n-2)p^3+\text{etc.}$$

Substituant la valeur de p dans le second membre de l'équation (3), et ne tenant compte que des puissances inférieures à la quatrième, on trouvera

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.};\quad p^3 = \frac{m^3}{n^3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}$$

La formule (3) deviendra

$$(1+p)^n = 1+m\frac{b}{a}+\frac{1}{2}m\left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{2}m\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{n-1}{1}\right)\frac{b^2}{a^2}+\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{n-1}{1}\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}$$
$$+\frac{m^3}{n^3}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}$$

et l'on trouvera, toutes réductions faites,

$$(1+p)^n = 1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.};\ \text{d'où}$$

$$a^m(1+p)^n = a^m\left(1+m\frac{b}{a}+\text{etc.}\right) = a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2+\text{etc.}$$

Mais (150)... $a^m+ma^{m-1}b+\text{etc.} = (a+b)^m$. Donc $a^m(1+p)^n = (a+b)^m$.

La formule (1) est donc vraie. Donc, *la formule qui sert à élever à une puissance dont l'exposant est un nombre entier positif, peut servir aussi à élever à une puissance dont l'exposant est un nombre fractionnaire positif.*

Pour démontrer que *la même formule peut être employée lorsque l'exposant est négatif*, on remarquera qu'en représentant par T la totalité des termes que donnerait $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$, en le développant suivant la même règle, on aura

$$(4)\ldots\ T = (a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}\left\{1-\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\frac{b^2}{a^2}-\text{etc.}\right\}.$$

Mais

$$T = (a+b)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}};\ \text{d'où (5)}\ldots\ T\times(a+b)^{\frac{m}{n}} = 1.$$

Il suffit donc de vérifier l'exactitude de cette dernière égalité. Or on a démontré l'exactitude de la formule (1). Multipliant donc les équations (1) et (4), membre à membre, et se bornant aux deux premières puissances de $\frac{b}{a}$, on trouvera

$$T\times(a+b)^{\frac{m}{n}} = 1-\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\frac{b^2}{a^2}-\text{etc.}$$
$$+\frac{m}{n}\frac{b}{a}-\frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\frac{b^2}{a^2}-\text{etc.}$$

Si l'on calcule les coefficiens des diverses puissances de $\frac{b}{a}$, on verra que tous ces coefficiens se réduisent identiquement à zéro; ce qui démontre l'exactitude de la formule (5). *La formule du binôme peut donc servir dans tous les cas.*

Des Équations à deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

161. Une équation à une seule inconnue est dite du troisième, du quatrième, du cinquième, etc. degré, lorsque la plus haute

puissance de l'inconnue est la troisième, la quatrième, la cinquième, etc.; mais outre cette puissance, une équation peut encore renfermer toutes les puissances inférieures; ainsi... $x^3=8$, $x^3+5x^2=4$, $x^3+6x^2-9x=7$, sont toutes des équations du troisième degré. Une équation à deux ou à un plus grand nombre d'inconnues est dite passer le premier degré, non-seulement lorsque l'une de ces inconnues passe le premier degré, mais encore lorsque quelques-unes de ces mêmes inconnues sont multipliées entre elles; et, en général, le degré s'estime par la plus forte somme que puissent faire les exposans dans un même terme: l'équation $x^3+y^3=a^2b$ est du troisième degré; l'équation $bx^2+x^2y+ay^2=ab^2$ est aussi du troisième degré, parce que les exposans de x et de y dans le terme x^2y font 3; dans les autres termes, les exposans sont moindres.

162. Pour résoudre les questions qui conduisent à des équations à plusieurs inconnues, et au-delà du premier degré, il faut, comme pour celles du premier degré, réduire ces équations à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnue.

Si l'on a deux équations et deux inconnues, et que, dans l'une de ces équations, l'une de ces inconnues ne passe pas le premier degré, *prenez la valeur de cette inconnue, comme si tout le reste était connu; substituez cette valeur dans l'autre équation, et vous aurez une nouvelle équation qui ne renfermera plus qu'une inconnue.* Par exemple, si l'on proposait cette question : *Trouver deux nombres dont la somme soit* 12 *et dont le produit soit* 35; en représentant ces deux nombres par x et y, j'aurais

$$x+y=12, \quad \text{et} \quad xy=35.$$

De la première je tire $x=12-y$; substituant dans la seconde équation cette valeur de x, j'aurai

$$(12-y)y=35, \quad \text{ou} \quad 12y-y^2=35;$$

équation du second degré, qui, étant résolue suivant les règles établies (89 et suiv.), donnera

$$y=6\pm\sqrt{1}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad y=7, \quad \text{ou} \quad y=5;$$

et puisque $x = 12 - y$, on aura $x = 5$, ou $x = 7$; c'est-à-dire que les deux nombres cherchés sont 5 et 7 ou 7 et 5.

Pareillement, si j'avais les équations

$$x + 3y = 6 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 12.$$

De la première je tirerais $x = 6 - 3y$; substituant dans la seconde, j'aurais

$$(6 - 3y)^2 + y^2 = 12; \quad \text{d'où} \quad 10y^2 - 36y + 24 = 0;$$

équation du second degré, qu'on peut résoudre.

Prenons, pour troisième exemple, les deux équations

$$xy + y^2 = 5 \quad \text{et} \quad x^3 + x^2y = y^3 + 7.$$

La première donne $x = \frac{5 - y^2}{y}$; substituant dans la seconde, on a

$$\left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^3 + \left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^2 y = y^3 + 7,$$

ou

$$\frac{(5 - y^2)^3}{y^3} + \frac{(5 - y^2)^2}{y^2} y = y^3 + 7.$$

Pour chasser les fractions, il suffit ici de multiplier le second terme par y et le second membre par y^3, ce qui donne

$$(5 - y^2)^3 + (5 - y^2)^2 y^2 = y^5 + 7y^3.$$

Faisant les opérations indiquées, on a

$$125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6 + 25y^2 - 10y^4 + y^6 = y^5 + 7y^3;$$

passant tout dans le premier membre et réduisant, on a

$$y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0;$$

équation qui ne renferme plus que y, mais qui est du cinquième degré.

163. A l'occasion de cet exemple, nous ferons remarquer que lorsque quelques-uns des dénominateurs de l'équation ont quelques facteurs communs entre eux, on peut faire disparaître ces dénominateurs plus simplement que par la règle générale, en examinant par quelle quantité il faudrait multiplier ces

dénominateurs pour qu'ils devinssent égaux. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite (48) au sujet des fractions. Par exemple, si j'avais l'équation $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, je la changerais en $\frac{c^2x + bdx}{abc} = e$, en multipliant les deux termes de la première fraction par c, et les deux termes de la deuxième par b; alors chassant le dénominateur, j'aurais $c^2x + bdx = abce$.

164. *Si dans l'une des équations, l'une des deux inconnues ne passe pas le second degré, prenez dans celle-ci la valeur du carré de l'inconnue la moins élevée, et substituez-la dans l'autre, à la place du carré de cette même inconnue et de ses puissances, et continuez de substituer jusqu'à ce que cette inconnue ne se trouve plus qu'au premier degré. Alors tirez de cette dernière équation la valeur de cette même inconnue, et substituez-la dans la première.* Par exemple, si j'avais

$$(1) \quad x^3 + 3y^2 = 6x \quad \text{et} \quad 2x^3 - 3y^3 = 8,$$

je prendrais, dans la première, la valeur de $2x$; la substituant dans la seconde, j'aurais

$$2(6x - 3y^2)x - 3y^3 = 8, \quad \text{ou} \quad 12x^2 - 6xy^2 - 3y^3 = 8.$$

Comme il y a encore x^2 dans celle-ci, j'y substitue de nouveau la même valeur de x^2 que ci-dessus, et j'ai

$$72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^3 = 8;$$

équation dans laquelle x n'est plus qu'au premier degré. J'en tire la valeur de x, je substitue cette valeur dans l'équation $x^3 + 3y^2 = 6x$: il vient

$$\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)^3 + 3y^2 = 6\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right), \quad \text{ou}$$

$$(39y^2 + 8)^3 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2);$$

équation dans laquelle il n'y a plus à faire que des multiplications et les réductions ordinaires.

165. Lorsque les équations sont de degrés plus élevés, on peut, en suivant une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer, arriver aussi à l'équation qui ne renferme plus qu'une inconnue; mais il est difficile d'éviter un inconvénient qui accompagne alors cette méthode : cet inconvénient est de faire monter l'équation à un degré plus élevé qu'elle ne doit être. Nous allons exposer un procédé qui n'est pas sujet à cette difficulté.

166. Toute équation à deux inconnues peut être toujours mise sous cette forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + T = 0,$$

m marquant le degré auquel x est élevé. En effet, on peut toujours faire une totalité des différens termes composés de y et des quantités connues qui multiplient chaque puissance de x, et représenter cette totalité par une seule lettre; par exemple; dans l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

qui peut généralement représenter toutes les équations du second degré à deux inconnues (car il ne peut s'y trouver d'autres puissances de ces inconnues), on peut rassembler les termes de cette manière :

$$ax^2 + (d + by)x + cy^2 + ey + f = 0,$$

et pour abréger, écrire ainsi :

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

sauf à remettre, au lieu de A, B, C, ce que ces lettres représentent, après qu'on aura fait de l'équation l'usage pour lequel on lui donne cette forme. Cela posé, soient donc

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots + T = 0,$$

et

$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \ldots + T' = 0,$$

les deux équations proposées dont il s'agit de chasser ou éliminer x. Je les suppose d'abord du même degré; nous verrons ensuite ce qu'il faut faire quand elles sont de différens degrés. On multipliera la première par A', la seconde par A, et l'on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une équation du degré $m-1$. On multipliera la première par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, et l'on retranchera le second produit du premier; ce qui donnera une seconde équation du degré $(m-1)$. On multipliera la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la seconde par $Ax^2 + Bx + C$, on retranchera le second produit du premier, ce qui donnera une troisième équation du degré $(m-1)$. On continuera de même jusqu'à ce que le multiplicateur soit de m du degré $m-1$. Cela posé, on aura m équations, chacune du degré $m-1$. On considérera dans chacune les différentes puissances x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, etc., comme si elles étaient autant d'inconnues du premier degré. Par le moyen des $m-1$ premières équations, ou, en général, par le moyen d'un nombre $m-1$ de ces équations, on déterminera

(84) les valeurs de ces inconnues que l'on substituera dans la dernière. Cette opération donnera une équation sans x, dans laquelle mettant pour A, B, C, etc., A', B', C', etc., les quantités que ces lettres représentent, et qui peuvent d'ailleurs renfermer telles puissances de y qu'on voudra, on aura l'équation en y. Par exemple, si j'avais les deux équations

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad A'x^2 + B'x + C' = 0,$$

qui peuvent représenter toutes les équations à deux inconnues, dans lesquelles l'une seulement des deux inconnues ne passe pas le second degré ; en multipliant la première par A', la seconde par A, retranchant le second produit du premier, et réduisant, j'aurais

$$(1)\ldots \quad (A'B - AB')x + A'C - AC' = 0.$$

Multipliant la première équation par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, retranchant le second produit du premier, et réduisant, j'aurais

$$(2)\ldots \quad (A'C - AC')x + B'C - BC' = 0.$$

Prenant donc dans l'équation (1) la valeur de x, et la substituant dans l'équation (2), j'aurai

$$(A'C - AC')\left(\frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}\right) + B'C - BC' = 0,$$

ou

$$-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0,$$

Si l'on avait les deux équations

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \quad A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0$$

multipliant la première par A', la seconde par A, retranchant et réduisant, on aurait

$$(A'B - AB')x^2 + (A'C - AC')x + A'D - AD' = 0,$$

multipliant la première par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, retranchant et réduisant, on aurait

$$(A'C - AC')x^2 + A'D - AD' + (B'C - BC')x + B'D - BD' = 0;$$

enfin, multipliant la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la seconde par $Ax^2 + Bx + C$, retranchant et réduisant, on aurait

$$(A'D - AD')x^2 + (B'D - BD')x + C'D - CD' = 0.$$

Il ne s'agit plus maintenant, en considérant x^2, x, comme des inconnues au premier degré, que de déterminer leurs valeurs à l'aide de deux quelconques de ces trois équations du second degré, et de substituer ces valeurs dans la troisième.

167. Si les deux équations proposées n'étaient pas du même degré pour x, alors on opérerait comme il suit. Soient m et n les deux exposans, et m

le plus grand. On multipliera l'équation du degré n par x^{m-n}, ce qui les mettra toutes deux au même degré. Alors on opérera, comme dans le cas précédent, en continuant les multiplications jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré $n-1$, ce qui donnera n équations, chacune du degré $m-1$. On substituera dans chacune et dans toutes les puissances supérieures à x^n, la valeur x^n tirée de l'équation du degré n, et on continuera de substituer, jusqu'à ce que la plus haute puissance restante soit x^{n-1}, ce qui sera toujours possible; alors on aura n équations, chacune du degré $n-1$. En employant $n-1$ de ces équations, on déterminera les valeurs de x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, etc., considérées comme autant d'inconnues au premier degré, et on les substituera dans la dernière.

Cette méthode est générale. Elle peut être simplifiée dans beaucoup de cas que nous ne nous arrêterons pas à détailler. Nous nous contenterons de remarquer que dans les multiplications successives par A' et A, $A'x+B'$ et $Ax+B$, etc., on peut se dispenser de multiplier le premier, les deux premiers, etc., termes des deux équations proposées, et, en général, autant des premiers termes qu'il entre de termes dans le multiplicateur, parce que le produit qu'ils donneront s'anéantira par la soustraction.

168. Si l'on détermine les valeurs des différentes puissances de x d'après la règle que nous avons donnée pour les équations du premier degré à plusieurs inconnues, l'équation finale en y ne montera jamais à un degré plus haut que mn, en supposant que le plus haut exposant de x, ainsi que celui de y, soit m dans l'une des équations et n dans l'autre. Mais si les exposans de x et de y sont inégaux dans chaque équation, en sorte que ceux de x dans la première et dans la seconde étant toujours m et n, ceux de y soient $m+p$ et $n+q$, l'équation finale en y ne passera jamais le degré $mn+mq+np$, (*Voy.*, pour la démonstration, les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, *ann.* 1764. *Voy.* aussi les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, *ann.* 1748, et l'*Analyse des lignes courbes* de Cramer.)

Des Équations à plus de deux inconnues; lorsqu'elles passent le premier degré.

169. L'orsqu'on a plus de deux équations et plus de deux inconnues, trois, par exemple, on peut s'y prendre de la même manière, en éliminant d'abord une des inconnues, par le moyen de la première et de la seconde équation, traitées selon la méthode précédente; et en éliminant encore la même inconnue par le moyen de la première et de la troisième, ou de la seconde et de la troisième. On aura, par ce moyen, deux équations qui ne renfermeront plus que deux inconnues, que l'on traitera selon la méthode précédente. Mais nous ne devons pas dissimuler que cette méthode, qui conduit sûrement, lorsqu'on n'a que deux équations et deux inconnues, tombe néanmoins dans l'inconvénient de mener à des équations plus élevées qu'il ne faut, lorsque le nombre des équations proposées est plus grand que 2.

Le moyen d'éviter cet inconvénient est d'éliminer en combinant les équations, non pas deux à deux, mais trois à trois, lorsqu'il y en a trois; quatre à quatre, lorsqu'il y en a quatre, etc. Mais ce dernier procédé exige encore un choix particulier, dont le détail nous mènerait trop loin. On le trouvera dans les *Mém. de l'Acad. des Sciences pour l'année 1764*. On y trouvera aussi plusieurs recherches sur le degré où doit monter l'équation finale résultante de l'élimination de plusieurs inconnues. Au reste, quoique ces méthodes, auxquelles nous renvoyons, abaissent considérablement le degré auquel conduiraient celles qu'on a eues jusqu'ici, et autant qu'il est possible en n'éliminant qu'une inconnue à la fois, il y a lieu de croire cependant qu'il peut être diminué; mais probablement on n'y parviendra que quand on aura trouvé une méthode pour éliminer à la fois toutes les inconnues hors une; ce que je ne sache pas qu'on puisse encore pratiquer généralement sur d'autres équations que sur celles du premier degré.

Des Équations à deux termes.

170. On appelle *équations à deux termes*, celles dans lesquelles il n'entre qu'une seule puissance de l'inconnue, parce qu'elles peuvent toujours être réduites à deux termes. Par exemple, l'équation $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, est une équation à deux termes, parce qu'en la mettant sous cette forme $(a+b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, on voit que a et b étant des quantités connues, on pourra toujours réduire $a+b$ à une seule quantité, et $a^4b^2 - a^3b^3$ pareillement à une seule quantité; en sorte que cette équation peut être représentée par cette autre $px^5 = q$. Ces équations sont très faciles à résoudre; car il est évident, qu'après avoir dégagé la puissance de l'inconnue, par les mêmes règles que dans les autres équations, il ne reste plus qu'à tirer la racine du degré marqué par l'exposant de l'inconnue. Par exemple, l'équation $px^5 = q$ deviendrait $x^5 = \frac{q}{p}$, et tirant la racine cinquième, $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

(*) Cette méthode, nous l'avons trouvée depuis: si l'on consulte l'ouvrage que nous avons publié en 1779, sous le titre *Théorie générale des équations algébriques*, Paris, *in*-4°, on trouvera tout ce que l'on peut désirer de savoir sur le degré de l'équation finale résultante de tant d'équations qu'on voudra, et sur les moyens de l'obtenir la plus simple qu'il soit possible.

171. Lorsque l'exposant est impair, il n'y a jamais qu'une seule valeur réelle. Par exemple, si l'on avait cette équation $x^5 = 1024$, on aurait $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; il est évident qu'il n'y a qu'un seul nombre réel qui, élevé à la cinquième puissance, puisse produire 1024.

Si le second membre de l'équation avait le signe —, la valeur de x aurait le signe —, parce que — combiné, par multiplication, avec —, un nombre impair de fois, donne —; mais lorsque l'exposant est pair, l'inconnue a deux valeurs, l'une positive et l'autre négative, et qui peuvent être ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires. Ce dernier cas aura lieu si le second membre a le signe —. Si l'on avait l'équation $x^4 = 625$, on en conclurait $x = \sqrt[4]{625} = 5$; mais puisque — multiplié par —, un nombre pair de fois, donne la même chose que + multiplié par +, — 5 peut satisfaire aussi bien que + 5; ainsi il faut écrire $x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5$ comme dans les équations du second degré. Si, au contraire, on avait eu $x^4 = -625$, on aurait conclu $x = \pm\sqrt[4]{-625}$; mais ces deux valeurs sont imaginaires, parce qu'il n'y a aucun nombre positif ou négatif qui, multiplié par lui-même un nombre pair de fois, puisse produire une quantité négative. Appliquons ces équations à une question. Supposons qu'on demande de *trouver deux moyennes proportionnelles entre* 5 et 625. En nommant x et y ces inconnues, on aura $5 : x : y : 625$, qui donne ces deux proportions

$$5 : x :: x : y, \quad \text{et} \quad x : y :: y : 625;$$

d'où l'on déduit ces deux équations

$$5y = x^2 \quad \text{et} \quad 625x = y^2.$$

La première donne $y = \frac{x^2}{5}$; substituant dans la seconde, on

a $625x = \frac{x^4}{25}$; divisant par x et multipliant par 25, on a

$$x^3 = 15625, \quad x = \sqrt[3]{15625} = 25;$$

donc $y = \frac{5^6}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

Des équations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré.

172. Ces équations ne doivent renfermer que deux puissances différentes de x, mais dont l'une est un exposant double de celui de l'autre. Par exemple,

$$x^3 + 5x^2 = 8 \quad \text{et} \quad x^6 + 5x^3 = 8$$

sont dans ce cas. Ces équations se résolvent comme celles du second degré : après avoir rendu le plus haute puissance positive, si elle ne l'est pas, et après avoir dégagé cette même puissance des quantités qui la multiplient ou la divisent, on prend la moitié de ce qui multiplie la puissance inférieure de l'inconnue, et l'on ajoute à chaque membre le carré de cette moitié, ce qui rend le premier membre un carré parfait. Alors on tire la racine carrée de chaque membre, en donnant à celle du second le double signe $\pm$. L'équation est réduite à une équation à deux termes. Par exemple, si l'on demandait de *trouver deux nombres dont la somme des cubes fût* 35 *et dont le produit fût* 6, on aurait ces deux équations

$$x^3 + y^3 = 35, \quad \text{et} \quad xy = 6.$$

Cette dernière donnerait $y = \frac{6}{x}$; valeur qui, substituée dans la première, donne

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35; \quad \text{d'où} \quad x^6 + 35x^3 = -216.$$

Je prends donc la moitié de 35, j'en ajoute le carré à chaque membre, et j'ai

$$x^6 + 35x^3 + \left(\frac{35}{2}\right)^2 = \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216 = \frac{361}{4};$$

tirant la racine carrée de chaque membre,

$$x^3 - \frac{35}{18} = \pm\frac{19}{6}; \quad \text{d'où} \quad x^3 = \frac{35}{6} \pm \frac{19}{6}.$$

Cette dernière donne $x = 3$ et $x = 2$. Mais $y = \frac{6}{x}$; donc $y = 2$ et $y = 3$.

Lorsque le plus haut exposant est 4 ou un multiple de 4, il peut y avoir jusqu'à quatre racines réelles.

De la composition des équations.

193. Nous venons de voir que les équations à deux termes ne donnaient pour l'inconnue qu'une seule valeur réelle lorsqu'elles sont de degré impair, et deux lorsqu'elles sont de degré pair : elles en donnent, outre cela, plusieurs autres qui sont imaginaires, mais qui ne sont pas moins utiles, ainsi que nous le verrons lors de la résolution des équations, et ailleurs. En général, *une équation quelconque donne toujours autant de valeurs pour l'inconnue qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette équation.* De ces valeurs qu'on nomme aussi *racines* de l'équation, les unes peuvent être positives, les autres négatives; les unes réelles, les autres imaginaires.

194. Pour rendre toutes ces vérités sensibles, il faut observer que lorsque, dans une équation, on fait passer tous les termes dans un seul membre, et que l'on a ordonné toutes les puissances de x ou de l'inconnue, on peut toujours considérer ce membre comme le résultat de la multiplication de plusieurs facteurs binômes simples, qui auraient tous pour terme commun x. Par exemple, lorsque l'équation

$$x^3 + 7x = 8x^2 + 9$$

a été mise sous la forme suivante,

$$x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0,$$

on conçoit que $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$ peut résulter de la multiplication de trois facteurs binômes simples $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$. En effet, si l'on multiplie ces trois facteurs, on aura

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0.$$

Or, pour que ces deux équations soient les mêmes, il ne s'agit que de trouver pour a, b, c, des valeurs telles que

$$a+b+c=8, \quad ab+ac+bc=7, \quad \text{et} \quad abc=9.$$

Pour trouver chacune de ces quantités, a par exemple, il faut, après avoir multiplié la première équation par a^2 et la seconde par a, il faut,

dis-je, retrancher la seconde de la première, et y ajouter la troisième; ce qui donne

$$a^3=8a^2-7a+9, \quad \text{ou} \quad a^3-8a^2+7a-9=0.$$

On trouvera de la même manière, que les équations qui donneraient b et c seraient

$$b^3-8b^2+7b-9=0, \quad c^3-8c^2+7c-9=0;$$

ce qui nous fournit les propositions suivantes.

175. 1°. Puisque l'équation qui doit donner a est la même que celle qui doit donner b, et la même que celle qui doit donner c, et que d'ailleurs il est facile de voir que les valeurs de a, b, c, ne peuvent être égales, il faut donc que l'une quelconque de ces trois équations puisse donner les valeurs de a, de b et de c: donc chacune de ces équations doit avoir trois racines, dont l'une sera la valeur de a; la seconde, la valeur de b; et la troisième, la valeur de c.

2°. Chacune de ces équations est la même que l'équation (1) proposée, à la seule différence près que a; ou b, ou c, est changé en x. Donc celle-ci doit avoir trois racines, et ces trois racines doivent être les trois valeurs de a, b, c. Donc les quantités qu'il faut mettre pour a, b, c, dans $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, pour produire l'équation (1), par la multiplication de ces facteurs simples, sont les racines mêmes de cette équation.

176. Si les coefficiens des différentes puissances de x, au lieu d'être 8, 7, 9, étaient d'autres nombres, et si l'équation, au lieu d'être du troisième degré, était du quatrième, du cinquième, etc., les conséquences que nous venons de tirer seraient encore de même nature. Ainsi, si l'on avait, en général

$$(2)\ldots\quad x^3-px^2+qx-r=0,$$

p, q, r, étant des nombres connus, on pourrait de même considérer cette équation comme formée du produit des trois binomes $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$; car ce produit étant

$$(3)\ldots\quad x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0,$$

pour que les équations (2) et (3) soient les mêmes, il suffit que a, b, c, soient tels, que l'on ait

$$(4)\ldots\quad a+b+c=p, \quad ab+ac+bc=q, \quad abc=r.$$

On en déduit $a^3-pa^2+qa-r=0$,

$$b^3-pb^2+qb-r=0, \text{ et } c^3-pc^2+qc-r=0.$$

Ainsi l'équation qui donnera a doit aussi donner b et c; elle doit donc avoir trois racines qui seront les valeurs des quantités a, b, c. Et comme chacune de ces équations est la même que l'équation (2) les quantités a, b, c, qu'il faut prendre pour produire cette dernière par la multiplication des facteurs simples $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, sont donc les racines mêmes de cette équation.

177. Donc en général, 1°. *une équation de degré quelconque peut toujours être considérée comme formée du produit d'autant de facteurs binomes simples, qui ont tous pour terme commun la lettre qui représente l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue;* 2°. *les seconds termes de ces binomes sont les racines de cette équation, chacune étant prise avec un signe contraire.*

178. Si l'équation, au lieu d'avoir ses termes alternativement positifs ou négatifs, comme nous l'avons supposé, avait toute autre succession de signes, par exemple, si elle était

$$x^3 + px^2 - qx + r = 0,$$

on n'en démontrerait pas moins, et de la même manière, qu'elle peut toujours être représentée par $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)$, a, b, c, étant les racines de cette dernière équation.

179. Puisque a, b, c, sont les racines de l'équation (2), il suit des équations (4), 1°. que dans toute équation *le coefficient* $-p$ *du second terme, pris avec un signe contraire, c'est-à-dire* $+p$, *est égal à la somme de toutes les racines;* 2°. que *le coefficient* q *du troisième terme est égal à la somme des produits de ces racines multipliées deux à deux;* 3°. que *celui du quatrième, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines multipliées trois à trois*, et ainsi de suite, et qu'*enfin le dernier terme est le produit de toutes les racines.* Cela est général, quels que soient les différens signes des termes de l'équation, prenant toujours avec un signe contraire le coefficient de chaque terme de numéro pair.

180. D'où il suit que, *dans une équation qui n'a pas de second terme, il y a sûrement des racines positives et des racines négatives, et que la somme des unes est égale à la somme des autres.* Ainsi, dans l'équation

$$x^3 + 23x - 60 = 0,$$

la somme des trois racines est -2; la somme de leurs produits, deux à deux, est -23; la somme de leurs produits, trois à trois, ou le produit des trois racines, est $+60$. En effet, les trois racines sont $+5$, -4, -3, ainsi qu'on peut le voir en mettant chacun de ces nombres au lieu de x, dans l'équation, car chacun réduit le premier membre à zéro. Or, il est évident que la somme de ces trois nombres, c'est-à-dire $+5-4-3$, est -2; que la somme de leurs produits deux à deux, ou $-20-15+12$, est -23; et que le produit des trois est $5\times-4\times-3$, c'est-à-dire $+60$.

Pareillement, dans l'équation

$$x^3 - 19x + 30 = 0,$$

comme le second terme manque, je conclus qu'il y a des racines positives et des racines négatives, et que la somme des unes est égale à la somme des autres; en effet, les trois racines sont $+2$, $+3$ et -5.

En considérant une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs binomes simples, on se rend aisément raison comment il peut se faire qu'il y ait plusieurs nombres différens qui satisfassent à une équation. Par exemple, si l'on proposait cette question : *Trouver un nombre tel, que si l'on retranche 5, et qu'à ce même nombre on ajoute successivement les nombres 3 et 4, les deux sommes multipliées entre elles, et par le reste, fassent zéro ;* on aura, en nommant x ce nombre, $x-5$ pour le reste, et $x+4$, $x+3$ pour les deux sommes; il faut donc que

$$(x+4) \times (x+3) \times (x-5) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0;$$

or, on voit que ce produit ou son égal $(x+4) \times (x+3) \times (x-5)$ peut devenir zéro dans trois cas différens, savoir, si $x=-4$, si $x=-3$, et si $x=5$. Or, quand on propose une équation telle que l'équation (5), rien ne détermine à prendre -4 plutôt que -3 ou plutôt que $+5$, puisque chacun réduisant également le premier membre à zéro, satisfait également à l'équation.

181. Nous placerons encore ici une remarque qui peut avoir son utilité. Les équations (4) du n° 178 nous ont toutes conduit à la même équation, soit pour avoir a, soit pour avoir b, soit pour avoir c. La raison en est que a, b, c, étant toutes disposées de la même manière dans chaque équation, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par aucune opération différente de celles qui détermineraient l'autre; donc, en général, *si dans la recherche de plusieurs quantités inconnues, on est obligé d'employer pour chacune les mêmes raisonnemens, les mêmes opérations et les mêmes quantités connues, toutes ces quantités seront nécessairement racines d'une même équation, et par conséquent cette question conduira à une équation composée.*

182. Puisqu'on peut considérer une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on peut aussi la considérer comme formée du produit de plusieurs facteurs composés; ainsi une équation du troisième degré peut être considérée comme formée du produit d'un facteur du second degré, tel que x^2+ax+b, par un facteur du premier, tel que $x+c$; en effet, x^2+ax+b peut toujours représenter le produit des deux autres facteurs simples. De même, une équation du cinquième degré peut être considérée comme formée ou du produit de cinq facteurs simples, ou de deux facteurs du second degré et d'un facteur du premier, ou d'un facteur du troisième et d'un facteur du second, ou enfin d'un facteur du quatrième et d'un facteur du premier.

183. Nous avons vu qu'une équation du second degré pouvait avoir des racines imaginaires; puis donc qu'une équation de degré quelconque peut avoir été formée par le concours d'un ou de plusieurs facteurs du second

degré, elle peut aussi avoir des racines imaginaires. Mais il peut y en avoir de formes bien différentes de celles du second degré.

184. Quand on considère une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on voit qu'elle ne peut avoir que m diviseurs du premier degré, m marquant le degré.

185. Et en considérant une équation comme formée du produit du facteur du second degré, le nombre des diviseurs du second degré qu'elle peut avoir est exprimé par $\frac{1}{2}m(m-1)$, m marquant le degré de cette équation. En effet, chaque facteur du second degré étant le produit de deux facteurs simples, dont chacun peut diviser l'équation, doit aussi pouvoir diviser l'équation. Or, nous avons vu (167) qu'il y a $\frac{1}{2}m(m-1)$ manières différentes de multiplier, deux à deux, un nombre m de quantités; il y aura donc $\frac{1}{2}m(m-1)$ différens diviseurs du second degré. Par exemple, l'équation (3) du n° 176 admet ces trois diviseurs du second degré:

$$(x-a)(x-b),\quad (x-a)(x-c),\quad (x-b)(x-c).$$

Ainsi, une équation du troisième degré peut avoir trois différens diviseurs du second, et, en général, une équation du degré m peut avoir $\frac{1}{2}m(m-1)$ différens diviseurs du second degré.

Concluons donc de là, que si l'on demande quelles devraient être les valeurs de g et de h, pour que x^2+gx+h fût diviseur d'une équation proposée du degré m, on peut être assuré que g et h ne peuvent être déterminés chacun que par une équation du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$. Car x^2+gx+h est aussi propre à représenter l'un des diviseurs du second degré que tout autre; donc h doit être susceptible de $\frac{1}{2}m(m-1)$ valeurs; il en est de même de g, qui est la somme des deux racines de l'équation. Chacune de ces quantités doit donc être donnée par une équation du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$.

On prouvera de même qu'en considérant une équation comme formée du produit de facteurs du troisième degré, chaque facteur du troisième degré est susceptible de $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ valeurs différentes; en sorte que si x^3+gx^2+hx+k représente l'un de ces facteurs, k ne pourra être déterminé que par une équation du degré $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$. On

voit assez les conséquences analogues qu'il y a à tirer pour les facteurs de tous les degrés.

186. Concluons de tout ce qui précède, que lorsqu'on a trouvé une racine d'une équation, on peut, pour avoir les autres, diviser l'équation par x moins cette racine, c'est-à-dire par $x-a$, en représentant cette racine par a; la division se fera exactement, et donnera pour quotient une quantité où x sera moins élevé d'un degré; cette quantité étant égalée à zéro, sera l'équation qu'il faut résoudre pour avoir les autres racines. On voit de même que si l'on connaît deux racines, que je représente par a et b, il n'y a qu'à diviser l'équation par $(x-a)\times(x-b)$, et ainsi de suite.

Des transformations qu'on peut faire subir aux Équations.

187. On peut faire subir aux équations différentes transformations dont il est à propos que nous parlions avant de passer à la résolution de ces mêmes équations.

188. *Si l'on change dans une équation les signes des termes qui renferment des puissances impaires de* x, *les racines positives de cette équation seront changées en négatives, et les négatives en positives.* En effet, pour changer les signes des racines de l'équation, il suffit de mettre $-x$ au lieu de $+x$; or, cette substitution ne change point les signes des termes qui renferment des puissances paires de x, et change, au contraire, les signes de ceux qui renferment des puissances impaires.

189. *Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, et cela sans donner un coefficient au premier terme,* il faut substituer, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue divisée par le produit de tous les dénominateurs, et multiplier ensuite toute l'équation par le dénominateur qu'aura alors le premier terme. Par exemple, si j'ai

$$x^3+\frac{a}{m}x^2+\frac{c}{n}x+\frac{d}{p}=0,\quad \text{je ferai } x=\frac{y}{mnp};$$

d'où

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{a}{m}\cdot\frac{y^2}{m^2n^2p^2}+\frac{c}{n}\cdot\frac{y}{mnp}+\frac{d}{p}=0;$$

multipliant par $m^3n^3p^3$, et réduisant, j'ai

$$y^3+anpy^2+m^2np^2cy+m^3n^3p^3d=0.$$

190. Si m, n et p étaient égaux, il suffirait de faire $x=\frac{y}{m}$. D'où il suit que pour changer une équation dont tous les coefficiens sont des nombres entiers, mais dont le terme a un coefficient, en une autre dans laquelle celui-ci n'ait plus, et où les autres aient néanmoins des entiers

pour coefficiens, il faut faire $x = \frac{y}{m}$, m marquant ce coefficient du premier terme. En effet, si j'ai l'équation $mx^3 + ax^2 + bx + c = d$; en divisant par m, j'aurai $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, où tous les dénominateurs sont égaux.

191. *Pour faire disparaître le second terme d'une équation, il faut substituer, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue augmentée du coefficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire, et divisé par l'exposant du premier.* En effet, représentons, en général, cette équation par

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + k = 0.$$

Si l'on suppose $x = y + s$, on aura deux équations et trois inconnues; on sera donc maître de déterminer l'une d'entre elles, par telle condition que l'on voudra. Or, si l'on substitue, dans chaque terme, au lieu de la puissance de x qu'il renferme, une puissance semblable de $y + s$, on aura (148) une suite de termes, telle que celle-ci :

$$y^m + (ms + a)y^{m-1} + \ldots + k = 0.$$

Si donc nous regardons y comme l'inconnue, il est évident que cette équation sera sans second terme, si s est telle que l'on ait $ms + a = 0$, c'est-à-dire si l'on prend $s = \frac{-a}{m}$. Or, nous venons de voir que nous pouvions prendre pour s telle valeur que nous jugerions à propos; puis donc que $\frac{-a}{m}$ est la valeur qu'il lui faut donner pour que l'équation en y soit sans second terme, il s'ensuit que pour changer l'équation proposée en une autre qui n'ait point de second terme, il faut faire $x = y - \frac{a}{m}$. Ce qui démontre la règle que nous venons de donner. Par exemple, pour faire disparaître le second terme de l'équation

$$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0, \text{ je fais } x = y - \frac{6}{3} = y - 2;$$

substituant cette valeur de x, et réduisant, il vient $y^3 - 15y + 26 = 0$; équation qui n'a point le second terme y^2.

De la résolution des Équations composées.

192. Nous supposerons, dans tout ce que nous allons dire, qu'on ait fait passer dans un seul membre tous les termes de l'équation. Nous

avons déjà dit (54) ce qu'on doit entendre par ces mots : *résoudre une équation* ; mais il faut fixer plus particulièrement ce que l'on entend par *résolution générale d'une équation*. Résoudre généralement une équation d'un degré quelconque, telle que

$$(1)\ldots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + k = 0,$$

c'est trouver pour l'inconnue autant de valeurs qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette inconnue, et dont chacune soit exprimée par les lettres p, q, etc., k, combinées entre elles de quelque manière que ce soit, telle cependant que chacune de ces valeurs substituée au lieu de x dans l'équation, réduise le premier membre à zéro, indépendamment de toute valeur particulière de p, q, etc. Par exemple, la règle que nous avons donnée (99) pour les équations du second degré, résout généralement ces équations. En effet,

$$(2)\ldots x^2 + px + q = 0,$$

peut représenter toute équation du second degré, parce que par p et q on peut entendre toutes sortes de nombres positifs ou négatifs ; or, cette équation résolue suivant cette même règle, donne

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Que l'on substitue maintenant l'une de ces deux valeurs, la première, par exemple, au lieu de x, dans le premier membre de l'équation (2), on aura

$$\left(-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right)^2 + p\left(-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right) + q,$$

qui se réduit à zéro. Il en serait de même, si l'on substituait la 2e valeur de x.

Cette expression générale des différentes valeurs de x dans une équation est d'autant plus difficile à trouver, que le degré de l'équation est plus élevé, et il est aisé de sentir que cela doit être, si l'on fait les réflexions suivantes.

Quelle que puisse être la forme des valeurs de l'inconnue dans une équation de degré quelconque, il est certain que la résolution générale d'une équation d'un degré déterminé doit renfermer la résolution des équations générales de tous les degrés inférieurs. En effet, la résolution générale d'une équation du cinquième degré, par exemple, telle que

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

doit donner pour x cinq valeurs, dont chacune doit nécessairement renfermer toutes les lettres p, q, r, s, t. Or, lorsque t est zéro, cette équation se réduit à

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx = 0,$$

qui étant le produit de ces deux facteurs $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ et x, donne

1°. $x = 0$; 2°. (3)... $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$.

Donc des cinq valeurs de x que donnera la résolution générale, l'une doit alors se réduire à zéro, et les quatre autres doivent être les racines de l'équation (3). Or, celle-ci n'étant que du quatrième degré, ses racines ne peuvent avoir que la forme de celles du quatrième degré : donc, puisqu'elles sont en même temps comprises dans celles du cinquième degré, il faut que la résolution de celle-ci comprenne la résolution du quatrième. On prouvera de même que la résolution du quatrième doit comprendre celle du troisième, et ainsi de suite. Donc la résolution d'une équation de degré quelconque doit comprendre la résolution de tous les degrés inférieurs.

De là on peut conclure que l'expression de l'une quelconque des racines doit renfermer toutes les espèces de radicaux depuis son degré jusqu'au premier (*). En effet, il est facile de voir que, dans quelque degré que ce soit, il doit y avoir des radicaux de ce degré, puisque, dans le cas particulier où tous les termes, excepté le premier et le dernier, manqueraient, l'expression des valeurs de x renfermerait un pareil radical, car l'équation étant alors $x^m + h = 0$, on aurait $x = \sqrt[m]{-h}$; donc puisque la forme générale des racines doit comprendre la forme de celles de tous les degrés inférieurs, elle doit renfermer tous les radicaux depuis son degré jusqu'au premier.

193. Après ces réflexions sur la forme des racines, voyons la méthode qu'on peut employer pour les trouver. Celle que nous allons exposer, consiste à considérer l'équation qu'il s'agit de résoudre, comme le résultat de deux équations à deux inconnues. Nous avons vu ci-dessus (166) comment on parvenait à réduire ces deux-ci à une seule, qui ne renferme plus qu'une inconnue. Il s'agit donc de les choisir telles, que l'élimination produise une équation que l'on puisse supposer la même que l'équation proposée. Nous allons voir ce qu'elles doivent être pour cet effet. Quoique cette méthode n'exige pas qu'on fasse disparaître le second terme de l'équation proposée, cependant les calculs étant plus simples lorsqu'il n'y a pas de second terme, nous supposerons qu'on a fait évanouir celui-ci, par la méthode donnée (191). Ainsi, nous supposerons que

$$(4)\ldots\quad x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + \ldots + sx + t = 0,$$

est en général l'équation à résoudre. On prendra les deux équations

$$(5)\ldots\quad y^{m-1} + z^{m-1} = 0, \qquad (6)\ldots\quad ay^{m-1} + by^{m-2} + \ldots + x = 0,$$

(*) Lorsque l'exposant de l'équation est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres, il peut arriver, selon la méthode qu'on emploiera pour résoudre, que l'expression générale des racines ne renferme pas explicitement les radicaux de ce degré ; mais ils n'y sont pas moins implicitement. Par exemple, dans le quatrième degré, au lieu des $\sqrt{}$, on trouve, par certaines méthodes, des quantités telles que $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, mais on voit que celles-ci comprennent les premières.

a, b, c, etc., étant des quantités inconnues que l'on déterminera comme il va être dit. Par le moyen de ces deux dernières, on éliminera y; ce qui conduira à une équation en x qui sera du degré m, et n'aura point de second terme. Les coefficiens (*) des différentes puissances de x seront composés de a, b, c, etc., et leurs puissances. On égalera chaque coefficient au coefficient de pareille puissance de x dans l'équation (4); ce qui donnera autant d'équations pour déterminer a, b, c, etc., qu'il y a de ces quantités. Lorsque a, b, c, etc., auront été déterminés, on aura toutes les racines ou valeurs de x, en substituant dans l'équation (6), ces valeurs de a, b, c, etc., et mettant successivement pour y, chacune des racines de l'équation (5), qui sont faciles à déterminer, comme nous le verrons par la suite.

Application au troisième degré.

194. Soit donc (7).. $x^3+px+q=0$, l'équation à résoudre.

Je prends.. (8).. $y^3-1=0$, $ay^2+by+x=0$.

Pour chasser y, je multiplie cette dernière par y, et mettant pour y^3 sa valeur 1, tirée de l'équation (8), j'ai $by^2+xy+a=0$. Je multiplie de même celle-ci par y, et mettant encore pour y^3 sa valeur 1, j'ai $xy^2+ay+b=0$. J'ai donc

$$ay^2+by+x=0;\quad by^2+xy+a=0,\quad xy^2+ay+b=0.$$

Par le moyen des deux premières, je prends la valeur de y^2, et celle de y selon la méthode des équations du premier degré à deux inconnues; j'ai

$$y^2=\frac{xx-ab}{bb-ax}\quad\text{et}\quad y=\frac{aa-bx}{bb-ax}.$$

Je substitue ces valeurs dans la troisième équation; ce qui me donne

$$(9)\ldots\ x^3-3abx+a^3+b^3=0.$$

Pour que les équations (7) et (9) soient les mêmes, il faut que

$$-3ab=p\quad\text{et}\quad a^3+b^3=q;$$

ce sont là les deux équations qui donneront a et b (**). La première donne

---

(*) Le mot *coefficient* est pris ici dans un sens plus étendu que par le passé. Il signifie, en général, la totalité des quantités, soit numériques, soit littérales, qui multiplient l'une quelconque des puissances de x. Ainsi, dans px^{m-s}, p est le coefficient de x^{m-s}.

(**) On pourrait peut-être demander s'il est nécessaire, pour que les deux équations deviennent les mêmes, de les égaler terme à terme, et s'il ne suffirait pas d'écrire $x^3+px+q=x^3-3abx+a^3+b^3$? Voici la réponse.

Il est indispensable d'égaler terme à terme, parce que pour que les deux

$b = -\frac{p}{3a}$; substituant dans la seconde, on a

$$a^3 - \frac{1}{27}\frac{p^3}{a^3} = q, \quad \text{d'où} \quad a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3.$$

Cette dernière équation, résolue comme une équation du second degré, donne (172)

$$(11)..a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\,; \text{ d'où } a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}\ (*);$$

cette valeur de a, substituée dans $a^3 + b^3 = q$, donne

$$b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Or l'équation $ay^2 + by + x = 0$ donne $x = -ay^2 - by$; on a donc

$$(10)..\ x = -y^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - y\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}},$$

qui renferme les trois racines. Il ne s'agit donc plus que de connaître les valeurs de y. Or, l'équation $y^3 - 1 = 0$ donne $y = 1$. Pour avoir les deux autres racines, je divise (186) $y^3 - 1$ par $y - 1$, et j'ai $y^2 + y + 1$, qui, étant égalé à zéro, donne l'équation qui renferme les deux autres racines. Cette équation résolue (79), donne $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$. Substituant successivement ces trois valeurs de y dans la formule (10), on trouvera, toutes réductions faites,

$$x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}},$$

équations soient les mêmes, il faut que les trois racines soient les mêmes dans chacune : or, cette condition exige : 1°. que la somme des racines soit la même, ce qui a lieu; 2°. que la somme $-3ab$ des produits de ces racines deux à deux, dans l'une, soit la même que la somme p des mêmes produits dans l'autre; 3°. que le produit $a^3 + b^3$ des trois racines de l'une, soit le même que le produit q des trois racines de l'autre.

(*) Je ne donne ici qu'un seul signe au second radical, parce que je n'ai besoin que d'une valeur de a; il importe peu laquelle, chacune satisfaisant également, comme nous le verrons ci-après.

$$x=\frac{\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}};$$

$$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

Si l'on suppose dans l'équation $x^3+px+q=0$, que $q=0$, l'équation se réduit alors à $x^3+px=0$, ou $(x^2+p)\times x=0$; donc l'une des racines est $x=0$, et les deux autres se trouvent en résolvant l'équation $x^2+p=0$, qui donne $x=+\sqrt{-p}$, et $x=-\sqrt{-p}$; c'est aussi ce que donne la formule générale des racines.

195. Comme l'équation $a^6-qa^3=\frac{1}{27}p^3$, d'où nous avons déduit la valeur de a, a six racines, on pourrait peut-être demander si chacune peut être également employée; et si, dans le cas où elles seraient toutes également admissibles, il n'en résulterait pas 18 valeurs différentes pour x, puisque chacune en donnerait trois. Chacune des six valeurs de a est également bonne, mais l'une quelconque donne pour x les mêmes valeurs que toute autre. En voici la preuve : faisons, pour simplifier le calcul,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=m, \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=n;$$

alors l'équation (11) se changera en ces deux autres : $a^3=m^3$ et $a^3=n^3$; la première donne $a=m$, et en divisant a^3-m^3, par $a-m$, on aura a^2+ma+m^2, qui, étant égalé à zéro, donnera les deux autres valeurs de a, que l'on trouvera être $a=\frac{1}{2}m(-1\pm\sqrt{-3})$. On verra de même que l'équation $a^3=n^3$ donne $a=n$ et $a=\frac{1}{2}n(-1\pm\sqrt{-3})$. Or, puisqu'on a $a^3+b^3=q$, on aura $m^3+b^3=q$ et $n^3+b^3=q$, et en mettant pour m^3 et n^3 leurs valeurs

$$b^3=\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3} \quad \text{et} \quad b^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3},$$

c'est-à-dire $b^3=n^3$ et $b^3=m^3$; donc les valeurs de b sont telles, que $ab=mn$; en sorte que les valeurs de a et b, qui doivent aller l'une avec l'autre, sont les suivantes :

$$a=m \text{ et } b=n; \quad a=\frac{1}{2}m(-1\pm\sqrt{-3}) \text{ et } b=\frac{1}{2}n(-1\mp\sqrt{-3}),$$

$$a=n \text{ et } b=m; \quad a=\frac{1}{2}n(-1\pm\sqrt{-3}) \text{ et } b=\frac{1}{2}m(-1\mp\sqrt{-3}).$$

Substituez maintenant l'une quelconque de ces six combinaisons dans $x=-ay^2-by$, en mettant successivement pour y ses trois valeurs, et vous aurez toujours ces trois racines

$$x=-m-n,\quad x=\frac{1}{2}m(1+\sqrt{-3})+\frac{1}{2}n(1-\sqrt{-3}),$$

$$x=\frac{1}{2}m(1-\sqrt{-3})+\frac{1}{2}n(1+\sqrt{-3}).$$

196. En considérant les trois valeurs de x que nous avons trouvées ci-dessus, on voit que tant que p sera positif, la quantité $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ sera toujours positive, parce que $\frac{1}{4}q^2$, qui est le carré de $\frac{1}{2}q$, sera toujours positif, quand même q serait négatif. Cette même quantité sera encore positive, tant que $\frac{1}{2}q^2$ sera plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, p étant négatif. Dans ces deux cas, les deux dernières valeurs de x sont imaginaires: car les deux radicaux cubes étant alors des quantités réelles et inégales, leurs produits par les quantités $\sqrt{-3}$ et $-\sqrt{-3}$ de signes contraires, ne se détruiront pas mutuellement; ainsi il restera de l'imaginaire dans chacune de ces deux valeurs de x. Il n'y a donc alors que la première valeur de x qui soit réelle.

197. Mais si p étant négatif, $\frac{1}{27}p^3$ se trouvait plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, alors $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3$ serait une quantité négative, et la quantité..... $\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}$ serait imaginaire; néanmoins les trois valeurs de x sont alors réelles. Pour s'en convaincre, il faut d'abord observer que..... $\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}$ qu'on a alors au lieu de $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$, est la même chose que $\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2\right)}\times\sqrt{-1}$, ou que $\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}\times\sqrt{-1}$; ainsi, pour abréger, je suppose

$$\frac{1}{2}q=m,\quad \text{et}\quad \sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}=n;$$

la quantité $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$ deviendra $\sqrt[3]{m+n}\sqrt{-1}$, et la quantité $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$ deviendra $\sqrt[3]{m-n}\sqrt{-1}$. Or, ces

quantités étant la même chose (132) que $(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ et $(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ si on les réduit en série, par la méthode donnée (150), on aura pour la première

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}+\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1}+\text{etc.}\right),$$

et pour la seconde

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}+\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1}+\text{etc.}\right);$$

or, les trois valeurs de x se changent alors en

$$x=-\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}};$$

$$x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}},$$

$$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}}.$$

Substituant, au lieu des deux radicaux cubes, les séries qui en sont les valeurs, on trouvera, toutes réductions faites,

$$x=-\left(2+\frac{2}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{20}{243}\frac{n^4}{m^4}+\text{etc.}\right)\sqrt[3]{m},$$

$$x=\left(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\text{etc.}\right)\sqrt[3]{m}-\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\text{etc.}\right)\sqrt{3}\sqrt[3]{m},$$

$$x=\left(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\text{etc.}\right)\sqrt[3]{m}+\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\text{etc.}\right)\sqrt{3}\sqrt[3]{m},$$

quantités dans lesquelles il n'y a pas d'imaginaires. On n'a pu trouver, jusqu'à présent, que cette manière de donner, dans ce cas, une valeur algébrique réelle aux trois racines; ainsi on ne peut les avoir alors sous une forme réelle que par approximation. Ce cas singulier a fort exercé les algébristes, et on lui a donné le nom de *cas irréductible.*

Donnons maintenant quelques exemples. Supposons qu'on demande les racines de l'équation..... $y^3+6y^2-3y+4=0$; je fais disparaître (191) son second terme, en faisant $y=x-2$; cela réduit l'équation à $x^3-15x+26=0$; or, nous avons représenté toute équation du troi-

sième degré, sans second terme, par $x^3+px+q=0$; nous avons donc $p=-15$, $q=26$; donc

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{169-125}=\sqrt{44}.$$

Les trois valeurs de x seront donc

$$x=-\sqrt[3]{13+\sqrt{44}}-\sqrt[3]{13-\sqrt{44}},$$

$$x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13+\sqrt{44}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13-\sqrt{44}},$$

$$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13+\sqrt{44}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{13-\sqrt{44}};$$

c'est-à-dire que la première est négative et les deux autres imaginaires.

Prenons, pour second exemple, l'équation $x^3-9x-10=0$. Dans ce cas, on a $p=-9$, $q=-10$; par conséquent, $\frac{1}{27}p^3=-27$, et $\frac{1}{4}q^2=25$; donc $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=-2$; cette équation est donc dans le cas irréductible. Ainsi, si l'on veut avoir les valeurs de x, il faut faire usage des séries ci-dessus. Pour cet effet, on remarquera qu'on a supposé $m=\frac{1}{2}q$ et $n=\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}$, donc $m=-5$ et $n=\sqrt{2}$. Pour faire les substitutions, on commencera par évaluer $\sqrt{2}$, qu'on trouvera être 1,4142; donc $\frac{n}{m}=\frac{1,4142}{-5}=-0,2828$; on évaluera aussi $\sqrt{m}$ ou $\sqrt[3]{-5}$ ou $-\sqrt[3]{5}$, et l'on aura $\sqrt[3]{m}=-1,7099$; alors il n'y a plus qu'à substituer: nous nous bornerons à substituer dans la première, qui deviendra

$$x=+1,7099\left\{2+\frac{2}{9}(0,2828)^2-\frac{20}{243}(0,2828)^4+\text{etc.}\right\};$$

quantité dans laquelle il ne s'agit plus que de faire les multiplications indiquées. Mais il est bon d'observer, en finissant, que ces séries ne sont d'un usage utile qu'autant que m est plus grand que n; s'il était plus petit, on en formerait d'analogues pour ce cas, en observant ce qui a été dit (158). Au reste, lorsque m et n diffèrent peu, on est dans la nécessité de calculer un grand nombre de termes. Nous verrons par la suite comment on peut approcher autrement des valeurs de x.

198. Concluons de ce qui précède, que toute équation de cette forme $y^{2n} + py^{n} + qy^{n} + r = 0$, est résoluble, puisqu'en faisant $y^{n} = x$, on a $y^{2} + px^{2} + qx + r = 0$, c'est-à-dire une équation du troisième degré.

Application au quatrième degré.

199. Représentons toute équation du quatrième degré, sans second terme, par

$$x^{4} + px^{2} + qx + r = 0.$$

Selon la règle donnée ci-dessus, je prends les deux équations

$$y^{4} - 1 = 0 \text{ et } ay^{3} + by^{2} + cy + x = 0.$$

Pour éliminer, je multiplie celle-ci trois fois de suite par y, et je substitue à mesure, au lieu de y^{4}, sa valeur 1 tirée de l'équation $y^{4} - 1 = 0$; ce procédé me donne (en comprenant la seconde équation) les quatre équations suivantes :

$$ay^{3} + by^{2} + cy + x = 0, \quad by^{3} + cy^{2} + xy + a = 0,$$
$$cy^{3} + xy^{2} + ay + b = 0, \quad xy^{3} + ay^{2} + by + c = 0.$$

Si, à l'aide des trois premières, on tire les valeurs de y^{3}, y^{2}, et y, et si l'on substitue ces valeurs dans la dernière, on trouvera une équation en x du quatrième degré. Égalant les coefficiens de cette équation à ceux de la proposée $x^{4} + px^{2} + qx + r = 0$, il viendra

$$-4ac - 2b^{2} = p, \quad 4a^{2}b + 4bc^{2} = q, \quad -a^{4} - c^{4} + b^{4} + 2a^{2}c^{2} - 4ab^{2}c = r;$$

ce sont ces trois équations qui doivent faire connaître a, b et c. Pour avoir l'équation qui donnera b, je prends dans la seconde, la valeur de $a^{2} + c^{2}$, et j'ai $a^{2} + c^{2} = \frac{q}{4b}$; je carre cette équation, ce qui me donne

$$a^{4} + 2a^{2}c^{2} + c^{4} = \frac{qq}{16b^{2}}, \quad \text{ou} \quad a^{4} + c^{4} = \frac{qq}{16b^{2}} - 2a^{2}c^{2};$$

je substitue cette valeur de $a^{4} + c^{4}$ dans la troisième équation, et j'ai

$$-\frac{qq}{16b^{2}} + 4a^{2}c^{2} + b^{4} - 4ab^{2}c = r.$$

De la première équation je tire la valeur de ac; substituant dans l'équation précédente, on trouve

$$(1)\ldots\ 64b^{6} + 32pb^{4} + 4(p^{2} - 4r)b^{2} - q^{2} = 0;$$

équation du sixième degré, mais qui n'a que la difficulté de celles du troisième, en regardant b^{2} comme l'inconnue. On appelle cette équation

la réduite, parce que c'est à sa résolution que se *réduit* celle des équations du quatrième degré.

200. Si l'on fait attention que le dernier terme q^2 de cette équation a le signe —, on verra que b^2 doit avoir au moins une valeur positive ; car dans ce cas l'équation ne peut avoir été produite que par la multiplication de trois facteurs tels que (b^2-l), (b^2-m), (b^2-n), ou de trois facteurs tels que (b^2+l), (b^2+m), (b^2-n) ; il n'y a que ces deux combinaisons qui puissent donner le signe — au dernier terme ; il y aura donc au moins un facteur de cette forme b^2-n ; donc (197) $b^2=n$, c'est-à-dire que b^2 aura au moins une valeur positive ; donc, puisque cette équation donne $b=\pm\sqrt{n}$, b aura au moins deux valeurs réelles.

201. Déterminons maintenant a et c. Les deux équations

$$-4ac-2b^2=p, \quad \text{et} \quad 4a^2b+4bc^2=q$$

trouvées ci-dessus, donnent

$$2ac=-\frac{1}{2}p-b^2 \quad \text{et} \quad a^2+c^2=\frac{q}{4b}.$$

Ajoutant la première à la seconde, et la retranchant aussi de la seconde, on aura les deux équations suivantes :

$$a^2+2ac+c^2=\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2;$$

$$a^2-2ac+c^2=\frac{q}{4b}+\frac{1}{2}p+b^2;$$

tirant la racine carrée de chacune, on aura

$$a+c=\pm\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2}, \quad a-c=\pm\sqrt{\frac{q}{4b}+\frac{1}{2}p+b^2};$$

les deux signes de chaque équation pouvant être pris dans tel ordre que l'on voudra. De là il est aisé de déduire a et c ; mais nous allons voir qu'on n'a besoin que de $a+c$ et de $a-c$. Développons auparavant les quatre valeurs de x. L'équation

$$ay^3+by^2+cy+x=0, \quad \text{donne} \quad x=-ay^3-by^2-cy;$$

il s'agit donc d'avoir les quatre valeurs de y que donne l'équation..... $y^4-1=0$, ou $y^4=1$. Or, en tirant la racine quatrième, on a $y=\pm 1$. Ayant trouvé ces deux valeurs de y, il faut (186), pour avoir les deux autres, diviser y^4-1, par le produit y^2-1 des deux facteurs $y-1$ et $y+1$; ce qui donne y^2+1 pour quotient ; égalant ce quotient à zéro (186), on aura $y^2+1=0$, pour l'équation qui doit donner les deux autres racines, que l'on trouvera être $y=\pm\sqrt{-1}$. Les quatre valeurs de x seront donc

$$x=-b\pm(a+c), \quad x=b\pm(a-c)\sqrt{-1}.$$

Substituant pour $(a+c)$ et $(a-c)$, leurs valeurs trouvées ci-dessus, on aura

$$x=-b\pm\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\quad x=-b\mp\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},$$
$$x=b\pm\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\quad x=b\mp\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2};$$

équations dans lesquelles il est facile de voir que des deux signes + et —, soit qu'on prenne le signe supérieur, soit qu'on prenne le signe inférieur, on aura toujours les quatre mêmes valeurs de x, l'une quelconque d'entre elles ne faisant alors que se changer en l'une des autres. Ainsi, pour une même valeur de b, on n'aura jamais que quatre valeurs de x; savoir :

$$x=-b-\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\quad x=-b+\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},$$
$$x=+b+\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},\quad x=+b-\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2}.$$

202. Puisque l'équation du sixième degré qui doit donner b, donne trois valeurs de b^2, on aura donc trois valeurs de b qui auront le signe +, et trois qui auront le signe —: or, il est facile de voir que, soit qu'on mette $+b$, soit qu'on mette $-b$ dans les quatre dernières valeurs de x, il en résulte toujours les quatre mêmes valeurs. Il ne s'agit donc plus que de faire voir que chacune des trois valeurs de b qui auront le signe +, ne donnera jamais aussi que les mêmes quatre valeurs de x. Pour le démontrer, reprenons les équations

$$-4ac-2b^2=p,\quad 4a^2b+4bc^2=q,$$
et
$$-a^4-c^4+b^4+2a^2c^2-4ab^2c=r.$$

Carrons la deuxième de ces équations, nous aurons $16b^2(a^2+c^2)^2=qq$; mettons, au lieu de b^2, sa valeur tirée de la première; il viendra

$$-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2=qq.$$

Substituons de même, au lieu de b^2, sa valeur dans la troisième équation, et nous aurons, après les réductions faites,

$$-a^4-c^4+\frac{p^2}{4}+4pac+14a^2c^2=r.$$

Substituant ces valeurs de q^2 et de r dans l'équation (1) du n° 199, il viendra

$$(2)\ldots\quad\left\{\begin{array}{r}8b^6+4pb^4+2(a^4+c^4-4pac-14a^2c^2)b^2\\+(p+4ac)(a^2+c^2)^2\end{array}\right\}=0.$$

Or, puisqu'on a trouvé $2b^2 = -p - 4ac$, il s'ensuit (186) que..... $2b^2 + p + 4ac$ doit diviser l'équation (2) ; ce qui a lieu en effet. Si l'on fait la division, et qu'on égale ensuite à zéro le quotient, pour avoir les deux autres valeurs de b^2, on aura

$$4b^4 - 8acb^2 + a^4 + c^4 + 2a^2c^2 = 0.$$

Cette équation étant résolue comme une équation du second degré, donne

$$4b^2 = 4ac \pm 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}.$$

Or, le dernier membre est (*) le carré de $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$; donc

$$4b^2 = [(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]^2 ;$$

d'où

$$(**)\quad 2b = (a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1};$$

ainsi, puisqu'on a trouvé ci-dessus, $b^2 = -\frac{1}{2}p - 2ac$, les trois valeurs positives de b sont

$$b = +\sqrt{\frac{-p-4ac}{2}}, \quad b = \frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}.$$

Représentons la seconde de ces valeurs par b' et la troisième par b'' ; alors en ajoutant et retranchant, on aura

$$a + c = b' + b'' \quad \text{et} \quad (a-c)\sqrt{-1} = b' - b''.$$

Si l'on substitue les valeurs de $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ dans les quatre premières valeurs trouvées ci-dessus, elles se réduiront à

$$x = -b - b' - b'', \quad x = +b + b' + b'' - 2b,$$
$$x = \quad b + b' + b'' - 2b', \quad x = b + b' + b'' - 2b'',$$

où l'on voit qu'il ne peut y avoir que quatre valeurs de x ; car si l'on change, par exemple, b en b', il faut changer en même temps b' en b, puisqu'on voit que les trois racines b, b', b'', entrent toutes à la fois dans chacune de ces valeurs de x. Or, ce changement donne les quatre mêmes valeurs pour x.

203. Revenons maintenant à la première expression des valeurs de x, c'est-à-dire aux valeurs

$$x = -b(\pm a + c), \quad x = b \pm (a-c)\sqrt{-1}.$$

(*) Il ne faut autre chose, pour s'en assurer, que carrer la quantité $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$. Mais si l'on demande comment on a trouvé cela, on le verra dans la suite.

(**) Nous ne prenons ici que le signe + pour la racine du second membre, parce que nous avons vu, ci-dessus, que la valeur négative de b menerait aux mêmes conclusions.

Elle nous offre trois cas : ou $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, ou elles sont toutes deux imaginaires, ou enfin l'une des deux est réelle, et l'autre imaginaire. Or, j'observe d'abord que lorsqu'elles sont imaginaires, elles peuvent toujours être réduites à des imaginaires de cette forme, $\sqrt{m}\times\sqrt{-1}$, m étant une quantité réelle ; car puisqu'on a

$$a+c=\sqrt{\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},$$

et

$$(a-c)\sqrt{-1}=\sqrt{-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2},$$

b ayant toujours (200) au moins une valeur réelle que l'on peut toujours employer, elles ne peuvent devenir imaginaires que lorsque la quantité qui est sous le radical actuel sera négative.

204. Cela posé, si $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, auquel cas les quatre valeurs de x seront réelles, puisque b a toujours une valeur réelle, il est évident que les deux autres valeurs de $4b^2$, savoir..... $[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{-1}]^2$ seront réelles et positives.

205. Si, au contraire, $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux imaginaires, auquel cas les quatre valeurs de x seront imaginaires, alors si l'on représente $a+c$ par $k\sqrt{-1}$, et $(a-c)\sqrt{-1}$ par $l\sqrt{-1}$, k et l seront des quantités réelles (203) ; on aura donc

$$4b^2=[(k\pm l)\sqrt{-1}]^2=-(k\pm l)^2,$$

c'est-à-dire que les deux autres valeurs de b^2 seront réelles, mais négatives.

206. Enfin, si des deux quantités $a+c$ et $(a-c)\sqrt{-1}$, l'une seulement est réelle, il est évident que des quatre valeurs de x, deux seront réelles et deux imaginaires ; or, dans ce cas, on voit aussi que les deux valeurs de b, données par l'équation $4b^2=[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{-1}]^2$ seront imaginaires.

207. Donc, *si la réduite, considérée comme équation du troisième degré, a ses trois racines réelles et positives, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines réelles ; si la réduite, ayant ses trois racines réelles, n'en a qu'une positive, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines imaginaires ; enfin, de ces quatre racines, deux seront réelles et deux seront imaginaires, si la réduite n'a qu'une racine réelle.*

208. Puisque la formule des racines d'une équation du troisième degré ne donne ces racines sous une forme réelle que lorsqu'il n'y a qu'une racine réelle (196), il faut conclure qu'on n'aura les racines d'une équation du qua-

trième degré, sous une forme réelle, que lorsqu'il n'y aura que deux de ces racines qui seront réelles.

209. Voyons quelques exemples. Supposons qu'on demande les racines de l'équation

$$x^4+3x^3-52x+48=0.$$

Nous aurons

$$p=3, \quad q=-52, \quad r=48, \quad qq=2704.$$

La réduite sera donc

$$64b^6+96b^4-732b^2-2704=0,$$

ou (en faisant, pour simplifier, $4b^2=u$),

$$u^3+6u^2-183u-2704=0.$$

Pour faire disparaître le second terme, je fais $u=z-2$; ce qui me donne

$$z^3-195z-2322=0.$$

Selon ce qui a été dit (nos 194, 197) sur les équations du troisième degré, on trouvera que z n'a qu'une valeur réelle, qui est

$$z=-\sqrt[3]{-1161+\sqrt{1073296}}-\sqrt[3]{-1161-\sqrt{1073296}}=18.$$

Donc $u=z-2=16, \quad 4b^2=u=16, \quad b=2.$

Substituant cette valeur de b et celles de p, q et r, dans les valeurs de $a+c$ et de $(a-c)\sqrt{-1}$, trouvées ci-dessus, on aura

$$a+c=\sqrt{-12} \quad \text{et} \quad (a-c)\sqrt{-1}=1.$$

De sorte que les quatre valeurs de x seront

$$x=-2\pm\sqrt{-12}, \quad x=3 \quad \text{et} \quad x=1.$$

Dans cet exemple, les nombres se sont trouvés tels, qu'il a été possible d'évaluer exactement chaque radical; mais ces cas sont fort rares. Le plus souvent, lorsqu'on veut avoir la valeur numérique dégagée des radicaux, il faut évaluer chaque radical par approximation.

Prenons pour second exemple l'équation

$$y^4+4y^3+9y^2+12y+3=0.$$

Je commence par faire disparaître le second terme, en faisant (192)..... $y=x-1$: j'ai pour nouvelle équation

$$x^4+3x^2+2x-3=0; \quad \text{donc}, \quad p=3, \quad q=2, \quad r=-3;$$

la réduite devient

$64b^6+96b^4+84b^2-4=0$, ou, en faisant $4b^2=u$, $u^3+6u^2+21u-4=0$.

Je fais disparaître le second terme, en posant $u=z-2$, ce qui donne... $z^3+9z-30=0$; équation qui (196) n'a qu'une racine réelle; et qui annonce, par conséquent (206), que l'équation du quatrième degré n'en aura que deux réelles. Appliquant donc les formules données (194), on trouvera

$$z=\sqrt[3]{15-\sqrt{252}}+\sqrt[3]{15+\sqrt{252}};$$

donc $$u=z-2=-2+\sqrt[3]{15-\sqrt{252}}+\sqrt[3]{15+\sqrt{252}}.$$

Or $$b=\frac{1}{2}\sqrt{u}=\frac{1}{2}\sqrt{-2+\sqrt[3]{15-\sqrt{252}}+\sqrt[3]{15+\sqrt{252}}}.$$

Substituant cette valeur de b, et celles de p et de q, dans les formules des quatre valeurs générales de x, on trouvera deux racines réelles et deux imaginaires.

Réflexions sur la méthode précédente, et sur son application aux équations de degrés supérieurs au quatrième.

210. L'équation qui nous a donné la valeur de b pour le quatrième degré n'a monté qu'au sixième degré; mais si nous avions cherché directement l'équation qui doit donner a, ou celle qui doit donner c, nous serions parvenus à une équation du 24e degré, ainsi qu'on peut s'en convaincre de la manière suivante. Nous avons trouvé ci-dessus (202),

$$(1)\ldots\ -8(p+4ac)\times(a^2+c^2)^2=qq,$$

et $$(2)\ldots\ -a^4-c^4+\frac{pp}{4}+4pac+14a^2c^2=r.$$

Si l'on multiplie cette dernière équation par $8(p+4ac)$, et que du produit on retranche la première, on aura, après les réductions faites,

$$(3)\ldots\ 512a^3c^3+256pa^2c^2+8(5p^2-4r)ac+2p^3-8pr+q^2=0;$$

équation qui, étant combinée avec l'équation (2), pour éliminer c, donnera (168) une équation du 24e degré. Mais sans se donner la peine de faire ce calcul, on peut s'en assurer encore de cette autre manière. L'équation (1) donne

$$(4)\ldots(a^2+c^2)^2=-\frac{qq}{8(p+4ac)},\text{ et par conséquent}$$

$$(5)\ldots a^4+c^4=-\frac{q^2}{8(p+4ac)}-2a^2c^2.$$

Or, si l'on résout l'équation (3), qui, en considérant ac comme l'inconnue, est du troisième degré, on aura une valeur de ac, qui, étant substituée

dans le second membre de l'équation (5), en fera une quantité toute connue, que j'appelle A ; si l'on représente maintenant par B, cette valeur de ac, on aura $c = \frac{B}{a}$; donc l'équation $a^4 + c^4 = A$ deviendra $a^8 - Aa^4 = -B^4$, qui, ayant huit racines, donnera huit valeurs de a. Or ac à trois valeurs ; on aura donc trois équations du huitième degré, et par conséquent 24 valeurs pour a ; donc l'équation en a sera du 24e degré.

211. Mais on voit, en même temps, que les exposans de toutes les puissances de a, que cette équation renfermera, seront des multiples de 4, puisque (182) elle sera le produit de trois quantités de la forme de..... $a8 - Aa^4 + B^4$, devant renfermer les 24 racines que ces trois-ci fournissent. Donc si l'on y fait $a^4 = u$, on aura en u une équation du sixième degré. Or je dis que cette équation ne peut renfermer que des radicaux carrés et des radicaux cubes, ce qui est évident en résolvant l'équation..... $a^8 - Aa^4 = -B^4$ comme une équation du second degré ; car alors on aura $a^4 = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}AA - B^4}$; quantité dans laquelle A et B ne peuvent être composés que de radicaux carrés et de radicaux cubes, puisqu'ils ne dépendent que d'une équation du troisième degré.

212. Si l'on se rappelle maintenant ce que nous avons vu sur le troisième degré, où la réduite était $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$, il est clair que a^3 ne peut renfermer que des radicaux carrés. Enfin, il est évident que dans l'équation du second degré, sans second terme, $x^2 + p = 0$, en faisant, comme ci-dessus, $y^2 - 1 = 0$ et $ay + x = 0$, la réduite fera $a^2 + p = 0$, qui ne donne qu'une valeur pour a^2 ; ainsi la réduite du second degré ne donne pour a^2 qu'un radical du premier degré, c'est-à-dire une quantité sans radical. Donc, en remontant, on conclura par analogie, que si la réduite du cinquième degré ne renferme d'autres puissances de a que celles qui sont des multiples de 5, la valeur de a ne renfermera que des radicaux quatrièmes, des radicaux cubes et des radicaux carrés ; donc si l'on démontre que, par la méthode actuelle, cette réduite ne peut renfermer que des puissances de a, dont les exposans soient des multiples de 5, il s'ensuivra que cette même méthode réduit la difficulté des équations du cinquième degré à celle des degrés inférieurs. Or, voici comment on peut s'assurer que la réduite n'aura pas d'autres puissances de a.

213. Supposons que $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ représente généralement toute équation du cinquième degré. En prenant, selon la méthode, les deux équations

$$y^5 - 1 = 0, \quad \text{et} \quad ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + x = 0,$$

on aura, après avoir chassé y de la même manière qu'on l'a pratiqué dans les troisième et quatrième degrés, on aura, dis-je,

$$(1)\ldots\begin{cases} x^5 - 5adx^3 + 5bd^2x^2 - 5cd^3x + a^5 \\ \quad - 5bcx^3 + 5a^2cx^2 - 5a^3bx + b^5 \\ \quad\quad + 5c^2dx^2 - 5b^2dx + c^5 \\ \quad\quad + 5ab^2x^2 - 5ac^2x + d^5 \\ \quad\quad\quad + 5a^2d^2x - 5a^2ed \\ \quad\quad\quad + 5b^2c^2x - 5ab^2c \\ \quad\quad\quad - 5abcdx - 5abd^2 \\ \quad\quad\quad\quad - 5bc^2d \\ \quad\quad\quad\quad + 5a^2bc^2 \\ \quad\quad\quad\quad + 5a^2b^2d \\ \quad\quad\quad\quad + 5b^2c^2d \\ \quad\quad\quad\quad + 5ac^2d^2 \end{cases} = 0.$$

Ayant donc égalé le coefficient de x^3 à p, celui de x^2 à q, celui de y à r, et enfin la totalité des termes sans x à s, on aura quatre équations, lesquelles, en supposant $b = ga^2$, $c = ha^3$, $d = ka^4$, ce qui est très permis, se changeront en quatre autres qui renfermeront g, h, k et a; mais il n'y aura d'autres puissances de a que a^5, a^{10}; donc, si l'on conçoit qu'on ait éliminé g, h et k, l'équation finale ne renfermera pas d'autres puissances de a que celles dont les exposans seront des multiples de 5.

214. On voit donc, d'après tout ce qui précède, qu'à l'égard de a, c'est-à-dire à l'égard du premier coefficient dans l'équation..... $ay^{m-1} + by^{m-2} + \text{etc.}... + x = 0$, la réduite est du second degré ou du degré 1.2, pour le second degré. Dans le troisième, elle est du sixième degré ou du degré 1.2.3. Dans le quatrième, elle est du vingt-quatrième, ou du degré 1.2.3.4. Il y a donc bien lieu de croire que, dans le cinquième, elle sera du degré 1.2.3 4 5, c'est-à-dire du 120e: et ainsi de suite. Et quoique, dans le quatrième degré, on trouve une réduite qui n'est que du sixième degré, c'est une simplification accidentelle qui, probablement, aura lieu d'une manière analogue dans les équations dont l'exposant est un nombre composé, mais non dans celles dont l'exposant est un nombre premier. En effet, il est facile de voir, pour le quatrième degré, que cette simplification est due à ce que b, dans chacune des équations où il entre, a des relations semblables à l'égard de a et à l'égard de c; au lieu que a n'est pas disposé de la même manière à l'égard de b qu'à l'égard de c. Mais, dans le cinquième degré, il n'y a aucune des quantités a, b, c, d, dont on puisse dire ce que nous venons de dire de b, dans le quatrième; ce qui est facile à voir par les coefficiens de l'équation (1) du n° 213.

215. Quoi qu'il en soit, puisque la réduite du cinquième degré ne peut renfermer d'autres puissances de a que celles dont les exposans sont des

multiples de 5, il paraît donc qu'en y faisant $a^5 = u$, l'équation du 24e degré qu'on aura alors ne peut plus renfermer que des $\sqrt[4]{}$, des $\sqrt[3]{}$ et des $\sqrt{}$, puisque l'équation $a^5 = u$, donnant $a = \sqrt[5]{u}$, met en évidence les radicaux cinquièmes que doit renfermer l'équation proposée.

On voit par là ce qu'il y a à dire sur les degrés plus élevés. Ceux qui désireront plus de détails sur cette matière, peuvent consulter les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, ann. 1762 et 1765, où l'on trouvera, en même temps, plusieurs classes d'équations qui admettent une résolution algébrique facile, ainsi qu'une autre méthode déduite de celle que nous venons d'exposer, laquelle simplifie le travail dans les équations dont l'exposant n'est pas un nombre premier.

216. Notre méthode suppose, comme on le voit, qu'on puisse toujours avoir toutes les racines de l'équation à deux termes $y^n - 1 = 0$. Or, c'est ce qui ne souffre aucune difficulté, puisqu'en ayant toujours au moins une, par une simple extraction de la racine du degré n, c'est-à-dire ayant toujours $y = 1$, lorsque n est impair, et $y = 1$, $y = -1$, lorsque n est pair. La difficulté d'avoir les autres est tout au plus de résoudre une équation du degré $n - 1$; ce qu'on est censé savoir déjà lorsqu'on passe à la résolution d'une équation générale du degré n. Mais la difficulté n'est pas même de ce degré, elle n'est en général que du degré $\frac{1}{2}(n-1)$ lorsque n est impair, et du degré $\frac{1}{2}(n-2)$ lorsque n est pair, parce qu'après avoir divisé l'équation $y^n - 1$ par sa racine $y - 1$ lorsque n est impair, ou par $(y-1)(y+1)$, c'est-à-dire par $y^2 - 1$ lorsque n est pair, le quotient, ou l'équation qui doit donner les autres racines sera toujours de cette forme $y^k + y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} + \text{etc.} \ldots + 1 = 0$, k étant un nombre pair. Or, cette équation est décomposable en un nombre $\frac{1}{2}k$ de facteurs du second degré, tels que $y^2 + hy + 1$; et l'équation qui donnera h ne montera jamais qu'au degré $\frac{1}{2}k$. Je ne m'arrête pas à démontrer en détail cette dernière proposition; on s'en assurera, par exemple, pour..... $y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$, en prenant une quantité telle, que $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + dy^2 + ey + 1$, la multipliant par $y^2 + hy + 1$, et égalant le produit, terme à terme, à $y^8 + y^7 + \text{etc.}$, on aura des équations dont il sera facile de tirer a, b, c, d, e; et l'équation en h sera du quatrième degré. (*Voy.*, pour la démonstration générale, le tome VI des *Mémoires de Pétersbourg.*)

Des diviseurs commensurables des équations.

217. On voit, par ce qui précède, que l'expression générale des racines des équations étant un composé de radicaux de différens degrés et différemment mêlés entre eux, il peut très bien arriver que, quoique la valeur

d'une ou de plusieurs racines soit un nombre commensurable, néanmoins elle se présente sous une forme incommensurable, et c'est ce qui arrive en effet dans le troisième et le quatrième degré, et, plus probablement encore, dans les degrés supérieurs. Il est donc utile d'avoir une méthode pour trouver ces diviseurs commensurables, lorsqu'il y en a. Comme le dernier terme d'une équation est le produit de toutes les racines (179), aucun nombre ne peut donc être la valeur commensurable de x dans une équation, qu'autant qu'il sera diviseur exact du dernier terme. On pourrait donc prendre successivement tous les diviseurs du dernier terme, et les substituer successivement, tant en + qu'en — (car x peut avoir aussi bien des valeurs négatives que positives), au lieu de x dans l'équation ; alors le diviseur qui, substitué ainsi, réduirait toute l'équation à zéro, serait la valeur de x; bien entendu que nous supposons ici qu'on a fait passer tous les termes de l'équation dans un seul membre. Mais cette opération serait souvent très longue, nous allons faire voir à quel caractère on distingue ceux qu'on doit admettre et ceux qu'on doit rejeter ; mais auparavant, il faut exposer comment on trouve tous les diviseurs d'un nombre.

218. Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, il faut le diviser successivement par les nombres premiers par lesquels il pourra être divisé, en commençant par les plus simples, et continuer de diviser par le même nombre, tant que cela se pourra. Alors on écrit à part, et sur une même ligne, tous les nombres premiers, et chacun autant de fois qu'il a pu diviser. On les multiplie ensuite deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc ; ces produits, les nombres premiers qu'on a trouvés, et l'unité, forment tous les diviseurs cherchés. Par exemple, veut-on avoir tous les diviseurs de 60 ; je divise 60 par 2, ce qui me donne 30; je divise 30 par 2, ce qui me donne 15; je divise 15 par 3, ce qui me donne 5; enfin je divise 5 par 5, ce qui me donne 1. Ainsi, les diviseurs premiers sont 2, 2, 3, 5; je les multiplie deux à deux, ce qui me donne 4, 6, 10, 6, 10, 15. Je les multiplie trois à trois, et j'ai 12, 20, 30, 30; enfin les multipliant quatre à quatre, j'ai 60. Rassemblant tous ces diviseurs, en rejetant cependant ceux qui se trouvent répétés, j'ai, en y comprenant l'unité qui est diviseur de tout nombre,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

219. Supposons maintenant qu'on veuille avoir les diviseurs commensurables d'une équation, lorsqu'elle en a ; par exemple, d'une équation du quatrième degré, représentée généralement par.....

(1)... $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Soit $x+a$ ce diviseur; alors l'équation proposée peut donc (182) être considérée comme ayant été formée de la multiplication de $(x+a)$ par un facteur du troisième degré; tel que x^3+kx^2+mx+n; multiplions donc ces deux facteurs l'un par l'autre, nous aurons

(2)... $x^4+(a+k)x^3+(m+ak)x^2+(am+n)x+an=0$.

Les équations (1) et (2) devant être les mêmes, on a

$$a+k=p,\quad m+ak=q,\quad am+n=r,\quad an=s;$$

d'où (3)... $n=\frac{s}{a}$, $m=\frac{r-n}{a}$, $k=\frac{q-m}{a}$, $1=\frac{p-k}{a}$.

Supposons donc maintenant qu'ayant pris pour a un des diviseurs du dernier terme, je veux savoir s'il peut être admis; les équations (3) me disent : Divisez le dernier terme de l'équation par ce diviseur; retranchez le quotient du coefficient de x et divisez le reste par ce même diviseur; retranchez ce second quotient du coefficient de x^2 et divisez le reste, encore par le même diviseur, et continuez toujours de même, jusqu'à ce que vous soyez arrivé au coefficient du second terme de l'équation, pour lequel vous devez trouver 1 pour quotient. Si le diviseur que vous avez pris satisfait à toutes ces divisions, il peut sûrement être pris pour a; mais si l'une seulement de ces divisions ne peut être faite exactement, le nombre que vous avez choisi doit être rejeté.

Comme l'unité est toujours diviseur de tout nombre, il est visible qu'il faudra aussi tenter l'unité, tant en $+$ qu'en $-$; mais on aura plus tôt fait, pour celle-ci, de l'examiner en substituant successivement $+1$ et -1 au lieu de x, dans l'équation; substitution qui est très facile, puisque toute puissance de $+1$ est $+1$, et que toute puissance paire de -1 est $+1$, et toute puissance impaire, -1. Si ni l'une ni l'autre de ces deux substitutions ne donne 0 pour résultat, alors a ne peut être ni $+1$, ni -1.

Cela posé, voici comment on procédera à l'examen de tous les diviseurs du dernier terme, autres que l'unité. Supposons qu'on demande si l'équation

$$(4)\ldots\quad x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0$$

a quelque diviseur commensurable; je cherche les diviseurs du dernier terme 15, autres que l'unité; les ayant trouvés, je les écris par ordre de grandeur (en les prenant tant en $+$ qu'en $-$), comme on le voit ici à la première ligne des nombres.

Diviseurs de 15...	$+15$,	$+5$,	$+3$,	-3,	-5,	-15
	$+1$,	$+3$,	$+5$,	-5,	-3,	-1
	-21,	-23,	-25,	-15,	-17,	-19
				$+5$		
				$+18$		
				$+6$		
				-3		
				$+1$		

Je divise le dernier terme $+15$ par chacun des nombres de la première ligne, et j'écris les quotiens pour seconde ligne. Je retranche chaque terme de la seconde ligne du coefficient de x, c'est-à-dire de -20, et j'écris le reste pour troisième ligne. Je divise chaque terme de celle-ci par le terme

correspondant de la première ligne, et à mesure que je trouve un quotient exact, je l'écris. Ici je n'en trouve qu'un, savoir, $+5$; ainsi je suis sûr qu'il ne peut y avoir qu'un diviseur commensurable. Mais soit qu'il n'y ait qu'un quotient exact, soit qu'il y en ait plusieurs, on continuera de cette manière. Je retranche chaque quotient du coefficient 23 de x^2, et j'écris les restes pour cinquième ligne; c'est ici 18. Je divise, de même que ci-devant, chacun de ces restes par le terme correspondant de la première ligne, et j'écris chaque quotient au-dessous; c'est ici -6. Je retranche chacun de ces nouveaux quotiens du coefficient -9. de x^3; j'écris les restes au-dessous; c'est ici -3. Enfin, je divise ceux-ci encore, par le terme correspondant de la première suite. Je trouve pour quotient $+1$; d'où je conclus que le terme correspondant -3, dans la première ligne, est a, et que par conséquent le diviseur $x+a$ est $x-3$; c'est-à-dire que $x-3$ divise l'équation; donc $x=3$ est la valeur commensurable de x dans l'équation proposée.

Non-seulement, par cette méthode, on trouve le diviseur de l'équation, mais on trouve encore le quotient. Il n'y a qu'à prendre dans la colonne qui a satisfait, les nombres qui se trouvent sur les lignes du numéro pair, à compter de la première; ces nombres formeront le dernier terme, et les coefficiens successifs de x, x^2, x^3, etc., dans le second facteur de l'équation. Ici, par exemple, on trouve -5, $+5$, -6, $+1$; j'en conclus que le second facteur est x^3-6x^2+5x-5; en sorte que l'équation proposée est le produit de $x-3$ par x^3-6x^2+5x-5.

Nous prendrons pour second exemple l'équation suivante..... $x^3+2x^2-33x+14=0$. En opérant, comme dans l'exemple précédent, on ne trouve que les diviseurs 7 et 2 qui soutiennent l'épreuve jusqu'à la dernière ligne; mais le second, c'est-à-dire 2, ne peut satisfaire, parce que le dernier quotient qu'il donne est 11, au lieu qu'il doit être 1. Ainsi il n'y a qu'un diviseur commensurable, $x+7$.

220. Cette méthode s'applique également aux équations littérales. Si elles ont le même nombre de dimensions dans chaque terme, alors on n'écrira, en première ligne, que ceux des diviseurs du dernier terme de l'équation qui ne sont que d'une dimension. Si le nombre des dimensions de chaque terme n'est pas le même, on le rendra tel, en introduisant une lettre dont les puissances complètent ce nombre de dimensions. Quand le nombre des dimensions est le même dans chaque terme d'une équation, on dit alors que l'équation est homogène.

221. Nous avons supposé que le premier terme n'avait aucun coefficient; s'il en avait un, le diviseur, au lieu d'être simplement $x+a$, serait en général $mx+a$, et m serait quelqu'un des facteurs du coefficient du premier terme. Alors, si l'on voulait faire usage de la méthode précédente, il faudrait, pour chaque facteur, au lieu de la seconde ligne, employer cette seconde ligne multipliée par m; au lieu de la quatrième, employer cette quatrième multipliée par m, et ainsi de suite, et n'admettre, pour a, que

les termes de la première qui auront pour correspondans, dans la dernière, le second facteur du premier terme de l'équation proposée; mais il suffira de prendre en + les nombres que l'on essaiera pour m. Au reste, on peut ramener ce cas au précédent, en faisant évanouir ce coefficient par la méthode donnée (190).

222. Lorsqu'une équation n'a pas de diviseurs commensurables de premier degré, elle peut néanmoins en avoir du second. On peut trouver ceux-ci par une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer; mais les calculs deviennent très longs. On aura aussitôt fait de cette manière : représentez ce facteur par $x^2 + mx + n$; multipliez-le par un autre facteur convenable, pour produire une quantité du degré de l'équation proposée, c'est-à-dire par un facteur du troisième degré, tel que $x^3 + ax^2 + bx + c$, si l'équation proposée est du cinquième; égalez le produit, terme à terme, avec l'équation, vous aurez autant d'équations particulières que d'inconnues..... a, b, c, m, n. De ces équations vous tirerez aisément les valeurs de a, b, c, que vous substituerez dans les équations restantes; alors vous aurez deux équations qui ne renfermeront plus d'inconnues que m et n. Chassez m par les règles données (166), et cherchez les diviseurs commensurables de l'équation en n. Vous aurez la valeur de n, par le moyen de laquelle et de la valeur de m en n, qui résulte de l'élimination, vous déterminerez m, et par conséquent le facteur $x^2 + mx + n$. On voit par là comment on doit s'y prendre pour trouver les facteurs commensurables des troisième, quatrième, etc., degrés.

De l'extraction des Racines des Quantités en partie commensurables, et en partie incommensurables.

223. Les équations qui se résolvent à la manière de celles du second degré (172) conduisent à des expressions de cette forme $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$, ou $\sqrt{26 + 15\sqrt{3}}$, ou, etc. Ces quantités peuvent souvent être ramenées à ne renfermer que des quantités rationnelles et de simples radicaux carrés, ou seulement des radicaux carrés, ou encore des radicaux carrés multipliés ou divisés par un radical simple de même degré que le radical supérieur. Voyons comment on doit s'y prendre pour les quantités de la forme $\sqrt{C + \sqrt{D}}$; je représente cette quantité par $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, m et n étant deux inconnues. J'aurai donc

$$\sqrt{C + \sqrt{D}} = \sqrt{m} + \sqrt{n};$$

en carrant, il vient

$$C + \sqrt{D} = m + n + 2\sqrt{mn}.$$

Comme j'ai deux inconnues et une seule équation, je suis le maître de déterminer l'une de ces inconnues par telle condition que je voudrai; je puis

donc supposer $2\sqrt{mn} = \sqrt{D}$, et alors l'équation se réduit à $C = m+n$; je carre ces deux équations, et j'ai

$$4mn = D, \quad \text{et} \quad m^2 + 2mn + n^2 = C^2;$$

je retranche la première de ces deux équations de la seconde, et j'ai $m^2 - 2mn + n^2 = C^2 - D$: d'où l'on voit que pour que m et n soient commensurables, il faut que la valeur $C^2 - D$ soit un carré. Tirant donc la racine carrée, on aura $m - n = \sqrt{C^2 - D}$; or, nous avions ci-dessus $m + n = C$; ajoutant et retranchant ces deux équations et divisant par 2, on aura

$$m = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}, \quad \text{et} \quad n = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D};$$

donc

$$\sqrt{C + \sqrt{D}} = \sqrt{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}} + \sqrt{\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}};$$

or, quoique chacun des deux termes du second membre renferme deux radicaux, cependant chacun n'en aura véritablement qu'un seul, lorsque $\sqrt{C + \sqrt{D}}$ sera réductible, puisqu'alors $C^2 - D$ sera un carré, ainsi que nous venons de le voir. Prenons pour exemple la quantité $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$: ici, $C = 7$, $\sqrt{D} = \sqrt{48}$, et par conséquent $D = 48$; donc $C^2 - D = 1$, et $\sqrt{C^2 - D} = 1$; on aura donc, en substituant dans la formule que nous venons de trouver,

$$\sqrt{7 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Si l'on avait $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$; en faisant passer 6 sous le second radical (112), on aurait $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$, que l'on trouvera de même se réduire à.... $3 + \sqrt{2}$. Pour troisième exemple, nous prendrons.....

$\sqrt{4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}}$ que nous avons dit ci-dessus (202) valoir $(a+c) + (a-c)\sqrt{-1}$. Si l'on fait passer $2(a+c)(a-c)$ sous le radical $\sqrt{-1}$, la quantité proposée devient.....

$\sqrt{4ac + \sqrt{-4.(a+c)^2(a-c)^2}}$; donc

$$C = 4ac \quad \text{et} \quad \sqrt{D} = \sqrt{-4(a+c)^2(a-c)^2},$$

ou $D = -4(a+c)^2 \times (a-c)^2 = -4a^4 + 8a^2c^2 - 4c^4$;

donc $C^2 - D = 16a^2c^2 + 4a^4 - 8a^2c^2 + 4c^4 = 4a^4 + 8a^2c^2 + 4c^4$;

donc $$\sqrt{C^2 - D} = 2(a^2 + c^2);$$

donc la formule devient alors $\sqrt{2ac+a^2+c^2}+\sqrt{2ac-a^2-c^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{(a+c)^2}+\sqrt{(a-c)^2\times-1}$, qui se réduit à..... $(a+c)+(a-c)\sqrt{-1}$.

Si, au lieu de $\sqrt{C+\sqrt{D}}$; on avait $\sqrt{C-\sqrt{D}}$, au lieu de..... $\sqrt{\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}+\sqrt{\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}$, on aurait..... $\sqrt{\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}-\sqrt{\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{C^2-D}}$.

224. Voyons maintenant les quantités de la forme $\sqrt[3]{C+\sqrt{D}}$. Si l'on peut tirer exactement la racine cubique de la quantité représentée par $C+\sqrt{D}$, cette racine ne peut être qu'une quantité de cette forme $m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}\sqrt{n}$; car si l'on supposait qu'elle pût renfermer deux radicaux carrés, le cube en renfermerait deux aussi, ainsi qu'on peut le voir en cubant $\sqrt{g}+\sqrt{h}$. Mais on voit, par le même moyen, qu'elle peut renfermer un radical cube, tel que $\sqrt[3]{k}$. Cela posé, faisons donc

$$\sqrt[3]{C+\sqrt{D}}=m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}\sqrt{n};$$

nous aurons, en cubant,

$$C+\sqrt{D}=m^3k+3m^2k\sqrt{n}+3mkn+kn\sqrt{n}=m^3k+3mkn+(3m^2k+kn)\sqrt{n};$$

égalant les parties irrationnelles et les parties rationnelles, on aura les équations

$$\sqrt{D}=(3m^2k+kn)\sqrt{n},\quad C=m^3k+3mkn;$$

carrant la première et la seconde, il viendra

$$D=9m^4k^2n+6m^2k^2n^2+k^2n^3,\quad \text{et}\quad C^2=m^6k^2+6m^4k^2n+9m^2k^2n^2;$$

retranchant la première de ces deux équations de la seconde, on a

$$C^2-D=m^6k^2-3m^4k^2n+3m^2k^2n^2-k^2n^3;$$

ou, multipliant par k,

$$C^2k-Dk=m^6k^3-3m^4k^3n+3m^2k^3n^2-k^3n^3;$$

tirant la racine cubique, il vient

$$m^2k-nk=\sqrt[3]{C^2k-Dk},\quad \text{d'où}\quad m^2-n=\frac{\sqrt[3]{(C^2-D)}}{k}k;$$

donc, pour que m^2-n soit rationnel, et par conséquent, pour que $C+\sqrt{D}$ ait une racine cubique, il faut que $(C^2-D)k$ soit un cube exact, ce que l'on peut toujours obtenir en prenant pour k un nombre convenable; car k est absolument arbitraire; en sorte que si C^2-D est un cube parfait, on

fera $k=1$. Faisons donc, pour abréger, $\frac{\sqrt[3]{(C^2-D)k}}{k}=p$, nous aurons $m^2-n=p$, et par conséquent $n=m^2-p$, substituant cette valeur dans l'équation $C=m^3k+3mkn$, il viendra, après les réductions faites..... $4km^3-3pkm-C=0$. Afin donc que m et n soient rationnels, il faut que la valeur de m tirée de cette dernière équation soit rationnelle; il faudra donc chercher les diviseurs commensurables de cette équation (219), qui ne peut manquer d'en avoir, si m et n peuvent être rationnels, c'est-à-dire si la quantité proposée est susceptible d'une racine cubique de la forme $m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$. Prenons pour exemple la quantité $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$; nous avons donc ici $C=20$, $\sqrt{D=14\sqrt{2}}$, et par conséquent $C^2-D=8$, c'est-à-dire un cube: je puis donc faire $k=1$. Cela posé, j'aurai donc

$$\frac{\sqrt[3]{(C^2-D)k}}{k}=\frac{\sqrt[3]{8\times 1}}{1}=\sqrt{8}=2,$$

et par conséquent aussi $p=2$. L'équation $4km^3-3pkm-C=0$, deviendra donc $4m^3-6m-20=0$, ou, en divisant par 2, $2m^3-3m-10=0$; je fais maintenant $m=\frac{y}{2}$ pour faire disparaître (190) le coefficient du premier terme, et j'ai, toute réduction faite, $y^3-6y-40=0$, qui (219) a pour diviseur commensurable $y-4$; donc $y=4$, et par conséquent $m=2$; or, l'équation $n=m^2-p$ donne $n=4-2=2$; donc.....

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}.$$

De la manière d'approcher des Racines des Équations composées.

225. La méthode que nous allons exposer pour approcher de la valeur de l'inconnue dans les équations, suppose qu'on ait déjà une valeur de cette racine, approchée seulement jusqu'à sa dixième partie près. Voyons donc comment on peut se procurer cette première valeur. Prenons pour exemple l'équation

$$(1)\ldots. x^3-5x+6=0.$$

Je substitue dans cette équation, au lieu de x, plusieurs nombres, tant positifs que négatifs, jusqu'à ce que deux substitutions consécutives me donnent deux résultats de signes contraires. Lorsque j'en ai rencontré deux qui sont tels, je conclus que la valeur de x est entre les deux nombres qui, substitués au lieu de x, ont donné ces deux résultats; en sorte que si ces deux nombres ne diffèrent l'un de l'autre que de la dixième partie de l'un d'entre eux, j'ai la valeur approchée que je cherche, en prenant l'un ou l'autre,

ou un milieu entre eux. Mais s'ils diffèrent davantage, alors j'opère comme on va le voir. Je substitue dans l'équation (1) les nombres 0, 1, 2, 3, etc.; mais je m'aperçois bientôt qu'ils donnent tous les résultats positifs, et que cela irait toujours de même à l'infini. C'est pourquoi je substitue les nombres 0, —1, —2, —3, etc., ce qui me donne les résultats..... +6, +10, +8, —6. Je m'arrête donc à ces deux derniers, et je conclus que l'une des racines est entre —2 et —3. Mais comme ces nombres diffèrent de 1, qui est plus grand que la dixième partie de chacun, je prends un milieu entre les deux nombres, c'est-à-dire que je prends la moitié — 2,5 de leur somme —5. Je substitue —2,5, au lieu de x dans l'équation, et je trouve pour résultat +2,875, c'est-à-dire une quantité positive; je conclus donc que la racine est entre —2,5 et —3. Je prends un milieu entre —2,5 et —3, c'est —2,7, en négligeant au-delà des dixièmes. Je substitue —2,7 dans l'équation, au lieu de x; je trouve pour résultat —0,183, c'est-à-dire une quantité négative. Donc, puisque —2,5 a donné un résultat positif, et que —2,7 en donne un négatif, la valeur de x est entre —2,5 et —2,7; or, ces deux nombres ne diffèrent que de 0,2, qui est plus petit que le dixième de chacun d'eux; donc la valeur de x est (en prenant un milieu entre deux) —2,6 à moins d'un dixième près. Ayant ainsi trouvé un nombre qui ne diffère pas de x d'un dixième de la valeur de cette même quantité, je suppose x égal à ce nombre plus une nouvelle inconnue z; c'est-à-dire ici, je suppose $x=-2,6+z$, et je substitue cette quantité, au lieu de x, dans l'équation; mais comme z est tout au plus un dixième de la quantité 2,6; que par conséquent son carré sera tout au plus la centième partie du carré de celui-ci, son cube tout au plus la millième partie du cube de celui-ci, et ainsi de suite, je néglige dans cette substitution toutes les puissances de z au-dessus de la première; et afin de ne pas faire de calculs inutiles, je n'admets dans la formation du cube de $-2,6+z$ (et des autres puissances s'il y en avait) que les deux premiers termes que doit donner la règle donnée (148). Pour substituer avec ordre, j'écris, comme on le voit ici,

$$x^3=(-2,6+z)^3=(-2,6)^3+3(-2,6)^2z,$$

$$-5x=-5(-2,6+z)=-5(-2,6)-5z, \quad +6=+6.$$

Le résultat de la substitution est

$$(-2,6)^3+3(-2,6)^2z-5(-2,6)-5z+6=0,$$

ou, en faisant les opérations indiquées et les réductions,

$$15,28z+1,424=0; \quad \text{d'où} \quad z=-\frac{1,424}{15,28}=-0,09 \text{ etc.},$$

quantité dans laquelle je ne pousse la division que jusqu'à un chiffre significatif seulement. En général, il ne faut la pousser que jusqu'à autant de chiffres significatifs (y compris le premier qu'on trouve), qu'il y a de

place entre celui-ci et le premier chiffre de la première valeur approchée de x : ici, entre 9 (qui est le premier chiffre significatif du quotient 0,09) et 2 (qui est le premier chiffre de 2,6), première valeur approchée de x, il n'y a qu'une place; c'est pourquoi je m'arrête au premier chiffre significatif 9. La valeur de x, savoir, $x = -2{,}6 + z$, devient donc

$$x = -2{,}6 - 0{,}09 = -2{,}69.$$

Pour avoir la valeur de x plus exactement, je suppose actuellement $x = -2{,}69 + t$; substituant dans l'équation (1), on trouve $t = 0{,}000904$. La valeur de x, savoir $x = -2{,}69 + t$, devient donc

$$x = -2{,}69 + 0{,}000904 = -2{,}689096.$$

Si l'on veut pousser plus loin, on fera $x = -2{,}689096 + u$, et l'on se conduira de la même manière.

Prenons, pour second exemple, l'équation

$$(2)\ldots. \quad x^4 - 4x^3 - 3x - 27 = 0.$$

En s'y prenant comme ci-dessus, on trouvera que la valeur de x, approchée à moins d'un dixième près, est 2,3. Je fais donc $x = 2{,}3 + z$. Substituant et négligeant z^2, z^3, z^4, on trouve $z = -0{,}03$. Je me borne aux centièmes, par la même raison que ci-dessus. La valeur de x est donc

$$x = 2{,}3 - 0{,}03 = 2{,}27.$$

Pour approcher davantage, je fais $x = 2{,}27 + t$, et substituant, j'aurai, toutes réductions faites, $t = -0{,}0025$; d'où $x = 2{,}2675$.

Réflexions sur la méthode précédente.

226. La méthode que nous venons d'exposer, et qui est due à *Newton*, exige, comme on vient de le voir, que l'on trouve deux nombres qui, substitués dans l'équation, donnent deux résultats, dont l'un soit positif et l'autre négatif. Nous avons dit qu'il y aurait toujours une racine de l'équation qui serait comprise entre les deux nombres qui ont donné ces deux résultats, et cela est facile à voir. Car si l'on suppose que la plus petite valeur de x soit représentée par a, et que celle qui est immédiatement plus grande, soit b, en sorte que $x - a$ et $x - b$ soient deux facteurs de l'équation, il est visible que si, au lieu de x, on substitue un nombre positif plus petit que a, $x - a$ devient négatif, et si l'on substitue un nombre positif plus grand que a, mais plus petit que b, $x - a$ deviendra positif, et le produit des autres facteurs sera de même signe que dans le premier cas; donc, puisqu'il n'y a que le facteur $x - a$ qui a changé de signe, alors le produit total changera sûrement de signe. On démontrerait la même chose si le plus petit facteur, au lieu d'être $x - a$, était $x + a$, mais en substituant des nombres négatifs. Mais ne peut-il pas arriver qu'il n'y ait aucune valeur réelle, soit positive, soit négative, qui, substituée pour x, donne

deux résultats de signes contraires. Cela peut arriver dans trois cas : 1°. lorsque les racines sont égales deux à deux, quatre à quatre, etc. ; 2° lorsque toutes les racines sont imaginaires ; 3° lorsqu'elles sont en partie imaginaires et en partie égales deux à deux. Par exemple, une équation qui serait formée de ces quatre facteurs $x-a$, $x-a$, $x-b$, $x-b$, c'est-à-dire l'équation $(x-a)^2 \times (x-b)^2 = 0$, ne change jamais de signe, quelque valeur qu'on mette pour x, soit positive, soit négative. En effet, soit que $x-a$ soit positif, soit qu'il soit négatif, son carré est toujours positif. Il en est de même de $x-b$. Quant au cas où toutes les racines sont imaginaires, il est évident qu'il n'y a aucun nombre réel à substituer pour x, qui puisse donner deux résultats de signes contraires ; car si cela arrivait, la valeur de x serait donc entre ces deux nombres réels ; elle serait donc réelle, ce qui est contre la supposition. Enfin, le troisième cas suit immédiatement les deux que nous venons d'examiner. Que doit-on faire alors pour avoir des racines ? C'est ce que nous allons examiner.

De la manière d'avoir les Racines égales des Équations.

227. Pour avoir les racines égales qu'une équation peut renfermer, *multipliez chaque terme par l'exposant de* x *dans ce même terme, et diminuez cet exposant d'une unité, vous aurez une nouvelle équation ; cherchez le plus grand commun diviseur entre cette dernière et l'équation proposée ; il sera composé des racines égales de celles-ci, mais élevées à une puissance moindre d'une unité.* Voici la démonstration de cette règle. Nous avons vu (149) que

$$(x+b)^m = x^m + m.x^{m-1}b + m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}b^2 + \text{etc.}$$

Concevons que, dans le second membre, on multiplie chaque terme par l'exposant de x, et qu'on diminue cet exposant d'une unité, on aura

$$mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2}b + \frac{1}{2}m(m-1)x^{m-3}b^2 + \text{etc.}$$

Or, cette quantité n'est autre chose que

$$m\left[x^{m-1} + (m-1)x^{m-2}b + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)x^{m-3}b^2 + \text{etc.}\right],$$

c'est dire (149) qu'elle est précisément $m(x+b)^{m-1}$.

Concluons donc que lorsqu'on multiplie les termes qui composent la puissance m du binome $x+b$, chacun par l'exposant de x, dans ce terme, et qu'on diminue cet exposant d'une unité, le nouveau produit est précisément la puissance immédiatement inférieure, multipliée par l'exposant de la puissance actuelle. La règle est donc démontrée pour le cas où toutes les racines sont égales.

Supposons actuellement que l'on ait $(x+b)^m \times (x+d)^n$: après avoir développé $(x+b)^m$, $(x+d)^n$ et fait le produit des deux résultats l'un par l'autre, si vous multipliez chaque terme par l'exposant de x, et qu'ensuite vous retranchiez l'unité de cet exposant, vous trouverez de même, par le calcul, que le résultat n'est autre chose que..... $m(x+b)^{m-1} \times (x+d)^n + n(x+b)^m \times (x+d)^{n-1}$, dont le commun diviseur avec $(x+b)^m \times (x+d)^n$ est $(x+b)^{m-1} \times (x+d)^{n-1}$, et ainsi de suite quel que soit le nombre des facteurs $x+b$, $x+d$, etc.

Recherche des Racines imaginaires des Equations.

228. Quoique les racines imaginaires des équations soient susceptibles de bien des formes différentes, selon le degré de l'équation, néanmoins on peut les ramener toutes à cette forme $x = a + b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles positives ou négatives. La démonstration rigoureuse de cette proposition nous menerait trop loin : on la trouvera dans les *Mém. de l'Acad. de Berlin*, année 1746, où M. d'Alembert, auteur de cette démonstration, fait voir qu'en même temps qu'une des valeurs de x peut être représentée par $a+b\sqrt{-1}$, il y en a une autre qui doit être exprimée par $a-b\sqrt{-1}$, d'où il suit, 1°. qu'il n'y a que les équations de degrés pairs qui puissent avoir toutes leurs racines imaginaires ; 2°. qu'une équation qui a toutes ses racines imaginaires est décomposable en facteurs du second degré de cette forme $(x-a-b\sqrt{-1}) \times (x-a+b\sqrt{-1})$, c'est-à-dire en facteurs réels du second degré, puisqu'en faisant la multiplication, on a $x^2 - 2ax + aa + bb$, quantité où il n'y a plus d'imaginaires. Donc, lorsqu'une équation a toutes ses racines imaginaires, si l'on cherche à la décomposer en facteurs du second degré, tels que $x^2 + gx + h$ [ce que l'on fera de la manière qui a été indiquée (222)], l'équation en h aura sûrement quelques racines réelles ; donc on pourra toujours avoir ces racines au moins par approximation. Donc, dans quelque équation que ce soit, on peut toujours avoir les racines, soit réelles, soit imaginaires, au moins par approximation.

SECONDE SECTION.

Dans laquelle on applique l'Algèbre à l'Arithmétique et à la Géométrie.

229. Dans le petit nombre d'applications que nous avons données dans la section précédente, on a dû remarquer que lorsqu'une fois une question a été mise en équation, ce qui reste à faire pour parvenir à la résolution, est uniforme pour toutes les questions du même degré. Tout se réduit à dégager l'inconnue ou les inconnues ; et cela se fait par des règles qui sont toujours les mêmes, quelque différentes que puissent être d'ailleurs les quantités que l'on a à considérer dans chaque question, et quelque différentes que soient elles-mêmes ces questions, pourvu qu'elles soient du même degré. Ces règles dispensent de beaucoup de raisonnemens qu'on aurait à faire si l'on voulait se passer du secours des équations ; raisonnemens qui, indépendamment de leur nombre, seraient encore souvent, par leur nature, au-dessus des efforts ordinaires de l'esprit. Nous avons fait pressentir aussi, par quelques exemples, combien il est avantageux de représenter, par des signes généraux, chacune des quantités qui entrent dans une question, ainsi que les opérations que l'on a à faire sur elles ; mais indépendamment des avantages que nous avons vus devoir résulter de cette méthode, il en est encore un grand nombre d'autres que nous allons faire connaître, en présentant les équations sous un point de vue plus étendu que nous ne l'avons fait jusqu'ici.

Lorsque l'on a représenté d'une manière générale chacune des quantités soit connues, soit inconnues, qui entrent dans une question, et que l'on a exprimé, par des équations, toutes

les conditions qu'elle renferme, on peut alors abandonner totalement de vue la question, pour s'occuper uniquement de ces équations et de l'application des règles qui leur conviennent. Alors si l'on a bien présent à l'esprit ce que l'on est convenu d'entendre, soit par les signes, soit par la disposition des lettres, chaque équation devient comme un livre où l'on peut lire, avec plus de facilité, les différens rapports qui lient les quantités les unes aux autres. On peut, par différentes applications des règles exposées dans la première section, donner à ces équations de nouvelles formes qui rendent encore ces rapports plus faciles à saisir. En un mot, on peut les considérer comme le dépôt des propriétés de ces quantités, et des solutions générales d'un grand nombre de questions qu'on n'avait point en vue, qu'on ne soupçonnait pas même tenir de si près à la question principale. En effet, puisque les règles qui servent à trouver les valeurs des inconnues ont toutes pour objet de ramener chaque quantité inconnue à former seule le premier membre d'une équation dont le second serait composé de toutes les autres quantités, et que ces règles sont évidemment applicables à chacune des quantités qui entrent dans ces équations, il est visible qu'on peut toujours, par ces mêmes règles, parvenir à avoir seule, dans un membre, l'une quelconque des quantités qui entrent dans une équation, et n'avoir que les autres dans le second membre. Alors on est dans le même cas que si l'on avait eu à résoudre la question où toutes ces dernières seraient connues, et celle-là, seule, inconnue. On voit donc qu'une même équation résout autant de questions différentes qu'elle renferme de quantités différentes. rendons cela sensible par des exemples.

Propriétés générales des Progressions arithmétiques.

230. Nous avons vu (*Arith.* 206) *qu'un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante était composé du premier, plus autant de fois la différence commune, qu'il y a de termes avant celui qu'on considère.* Si donc on représente par a la valeur numérique du premier terme; par u celle

du terme dont il s'agit; par d la différence commune, ou la raison de la progression; et enfin par n le nombre total des termes; alors le nombre des termes qui précèdent le terme u sera exprimé par $n-1$; et la proposition que nous venons de citer pourra se traduire en langage algébrique par cette équation,

$$(1)\ldots\ u = a + (n-1)\,d,$$

qui résout la question où, connaissant la raison d d'une progression, le nombre n des termes et la valeur a du premier, on demanderait quelle doit être la valeur du dernier u. Mais puisqu'il entre quatre quantités dans cette équation, je dis qu'elle résout quatre questions générales. En effet, 1°. si l'on regarde a comme l'inconnue, et que l'on en cherche la valeur, suivant les règles de la première section, on aura

$$a = u - (n-1)\,d,$$

qui nous apprend que le premier terme d'une progression arithmétique croissante se trouve en retranchant du dernier u la différence d prise $n-1$ fois, c'est-à-dire la différence prise autant de fois, moins une, qu'il y a de termes en tout.

2°. Si l'on regarde n comme l'inconnue, l'équation (1) donne $n = \frac{u-a}{d} + 1$, qui m'apprend que, connaissant le premier terme a, le dernier u et la raison d d'une progression arithmétique, je saurai combien il y a de termes en retranchant le premier du dernier, divisant le reste par la raison d, et ajoutant une unité au quotient. Par exemple, si je sais que le premier terme d'une progression est 5, le dernier 37, et la différence 2; de 37 je retranche 5, ce qui me donne 32, qui, étant divisé par la différence 2, donne 16, auquel ajoutant 1, j'ai 17 pour le nombre des termes de cette progression.

3°. Enfin si je regarde d comme l'inconnue dans l'équation (1), j'aurai $d = \frac{u-a}{n-1}$, qui m'apprend que pour connaître la différence qui doit régner dans une progression arithmétique, dont

le premier terme, le dernier et le nombre des termes sont connus, il faut retrancher le premier du dernier, et diviser le reste par le nombre des termes moins un. Cette règle revient à celle que nous avons donnée (*Arith.* 209) pour trouver un nombre déterminé de moyennes proportionnelles entre deux quantités données : nous avons dit qu'il fallait retrancher la plus petite de la plus grande, et diviser le reste par le nombre des moyennes, augmenté d'une unité, ce qui est évidemment la même chose, puisque le nombre des moyennes est moindre de deux unités que le nombre total des termes de la progression.

La seule équation (1) nous donne donc la résolution de quatre questions générales, c'est-à-dire nous met en état de résoudre celle-ci qui les comprend toutes quatre : *de ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes, et la différence d'une progression arithmétique, trois quelconques étant connues, trouver la quatrième.*

231. Toute autre propriété générale, énoncée aussi d'une manière générale, nous conduira, par les mêmes moyens, à la résolution d'autant de questions différentes qu'il entrera de quantités dans l'énoncé de cette propriété.

Par exemple, c'est encore une propriété des progressions arithmétiques, que *pour avoir la somme de tous les termes de quelque progression arithmétique que ce soit, il faut ajouter le premier terme avec le dernier, et multiplier le résultat par la moitié du nombre des termes.* Ainsi, pour avoir la somme des cent premiers termes de la progression : 1 .3.5.7, etc., dont le centième est 199, au dernier 199 j'ajouterais le premier terme 1, et je multiplierais le résultat 200 par 50, qui est la moitié de 100, nombre des termes, ce qui me donne 10000 pour la somme des 100 premiers nombres impairs. Nous allons démontrer cette propriété dans un instant ; mais pour ne point perdre de vue notre objet, si, en conservant les mêmes dénominations que ci-devant, nous nommons, de plus, s la somme

de tous les termes, nous aurons pour la traduction algébrique de cette propriété,

$$(2)\ldots\ s = (a + u) \times \frac{n}{2}.$$

Cette équation nous met en état de résoudre cette question générale qui en comprend quatre : *De ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes et la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, trois étant connues, trouver la quatrième.* En effet, 1°. si l'on connaît a, u et n, l'équation donne immédiatement la valeur de s; 2°. si l'on connaît a, u et s, l'équation (2) donnera $n = \frac{2s}{a+u}$, équation où n est connu, puisqu'on suppose que l'on connaît les quantités, a, u et s qui entrent dans sa valeur; 3°. et 4°. si l'on connaît a, s et n, ou u, s et n, et que l'on veuille avoir u ou a, on reprendra l'équation (2) qui donnera $u = \frac{2s}{n} - a$, qui satisfait à la première question; et $a = \frac{2s}{n} - u$, qui satisfait à la seconde.

Démontrons maintenant la propriété que nous venons de supposer. Il est évident que si nous continuons de représenter le premier terme par a et la différence par d, nous pouvons représenter toute progression arithmétique croissante par la suivante :

$$\div a.a + d.a + 2d.a + 3d.a + 4d.a + 5d.a + 6d, \text{ etc.}$$

Concevons que, sous cette progression arithmétique, on fasse répondre, terme pour terme, la même progression, mais dans un ordre renversé, on aura

$$\begin{array}{l} \div a.a + d.a + 2d.a + 3d.a + 4d.a + 5d.a + 6d. \\ \div a + 6d.a + 5d.a + 4d.a + 3d.a + 2d.a + d.a. \end{array}$$

Comme ces deux progressions sont égales, il est évident que la somme des termes de l'une des deux est la moitié des deux

réunies; or, si l'on y fait attention, on voit que les deux termes correspondans font et doivent toujours faire une même somme, et que cette somme est celle du premier et du dernier terme de la première progression, réunis; donc la totalité des deux progressions se trouvera en ajoutant le premier et le dernier terme de l'une, et prenant ce résultat autant de fois qu'il y a de termes; donc pour l'une seulement de ces deux progressions, il faudra ajouter le premier et le dernier, prendre ce résultat seulement moitié autant de fois qu'il y a de termes, c'est-à-dire le multiplier par la moitié du nombre des termes.

232. Les huit questions générales que nous venons de résoudre tiennent donc à deux principes seulement, savoir, celui que nous avons énoncé (230) et celui que nous avons énoncé (231); et puisque leur résolution se tire immédiatement des deux équations qui sont la traduction algébrique de ces deux énoncés, on voit comment, à l'aide de l'Algèbre, on peut faire découler d'une même source toutes les vérités qui en dépendent. Quoique ces propriétés ne soient pas toutes également utiles, cependant, par leur simplicité, elles sont très propres à bien faire sentir l'usage des équations; c'est pourquoi nous les ferons encore servir à la recherche de quelques autres propriétés semblables.

Dans ce que nous venons d'exposer, nous n'avons considéré qu'une seule équation à la fois. Mais si deux ou un plus grand nombre d'équations qui expriment des propriétés différentes de quelques quantités, se trouvent avoir quelques-unes de ces quantités qui leur soient communes, alors on peut encore en déduire un très grand nombre d'autres propriétés, et cela avec une très grande facilité. Par exemple, les deux équations fondamentales des progressions arithmétiques, savoir:

$$(3)\ldots\ u = a + (n-1)\,d \text{ et } s = (a+u)\times\frac{n}{2},$$

ont trois quantités communes entre elles, qui sont a, u et n. Si l'on prend successivement dans chacune de ces deux équations la valeur de l'une quelconque de ces trois quantités, et si l'on égale ensuite ces deux valeurs, on aura une nouvelle

équation, dans laquelle cette quantité ne sera plus, et qui exprimera le rapport que les quatre autres ont entre elles, indépendamment de celle-là. Par exemple, si je prends dans chaque équation la valeur de a, j'aurai ces deux valeurs

$$a = u - (n-1)\,d, \text{ et } a = \frac{2s}{n} - u;$$

donc

$$u - (n-1)\,d = \frac{2s}{n} - u;$$

équation de laquelle, en considérant successivement u, n, d et s comme inconnues, je tirerai, comme ci-dessus, quatre nouvelles propriétés générales des progressions arithmétiques. Par exemple, en regardant s comme inconnue, je tirerai.... $s = nu - \frac{1}{2}n(n-1)\,d$, qui me donne le moyen de connaître la somme d'une progression arithmétique par le moyen du dernier terme, de la différence et du nombre des termes, puisqu'il n'entre que ces trois quantités et des nombres connus, dans le second membre.

Si, au lieu de chasser ou d'éliminer a, nous eussions éliminé u ou n, nous aurions eu, de même, pour chaque élimination, une nouvelle équation qui aurait renfermé quatre des cinq quantités a, u, n, d, s; et en considérant successivement chacune de ces quatre quantités comme inconnue, on tirerait de chaque nouvelle équation quatre nouvelles formules, qui sont autant d'expressions différentes des quantités..... a, u, n, d, s; expressions dont chacune a son utilité particulière, selon que, dans la question qu'on proposera relativement aux progressions arithmétiques, on connaîtra telles ou telles de ces quantités. Par exemple, si l'on me demandait la somme de tous les termes d'une progression arithmétique dont on me ferait connaître le premier, la différence et le nombre des termes; alors, comme le dernier terme m'est inconnu, j'éliminerais u et j'aurais une équation qui, ne renfermant plus que a, n, d et s, me ferait aisément connaître s. Concluons de là que les deux équations (3) donnent la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur

les progressions arithmétiques, lorsqu'on y connaît immédiatement trois des cinq quantités a, u, n, d, s. Donnons ici quelques applications des progressions arithmétiques.

233. Supposons qu'on demande combien la base d'une pile triangulaire de boulets, dont le côté serait de 6, contiendrait de ces boulets. Il est facile de voir, 1°. que le nombre des boulets de chaque bande parallèle au côté 6 (fig. 2), va en diminuant continuellement de 1, et se réduit enfin à 1; 2°. que le nombre des bandes est 6. Donc il s'agit de trouver la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier est 1, le dernier 6, et le nombre des termes 6. J'ajoute donc le premier 1 avec le dernier 6, et je multiplie le résultat 7 par 3, moitié du nombre des termes, ce qui me donne 21 pour le nombre des boulets de la base de la pile.

234. Nous avons vu en Géométrie, que pour avoir la surface d'un trapèze, il fallait ajouter les deux côtés parallèles, et multiplier la moitié de leur somme par la hauteur de ce trapèze. On peut démontrer cette même proposition par le principe que nous venons de donner pour sommer une progression arithmétique: en effet, on peut se représenter le trapèze ABDC (fig. 3) comme composé d'un nombre infini de trapèzes infiniment petits, tels que *bcih*, *cdki*. Or, il est facile de voir qu'en supposant tous ces petits trapèzes de même hauteur, chacun diffère de son voisin, toujours d'une même quantité, savoir, du petit parallélogramme *oefg*, en tirant *ce* et *bf* parallèles à *hk*; car *gfki* est égale à *bgih*, et *cde* est égal à *bcg*, en sorte que le trapèze *cdki* a de plus que le trapèze *bcih*, le petit parallélogramme *cefg*, qui sera toujours de même grandeur, tant qu'on supposera ces trapèzes de même hauteur. Cela étant, tous ces trapèzes forment donc une progression arithmétique dont le premier terme est le trapèze contigu à AB, et le dernier est le trapèze contigu à CD; donc pour avoir la totalité de ces trapèzes, ou la surface du trapèze ABDC, il faut prendre les deux petits trapèzes extrêmes et les multiplier par la moitié du nombre de tous les trapèzes,

mais comme on les suppose infiniment petits, on peut prendre, à la place des deux trapèzes extrêmes, les deux lignes AB et CD, tandis que la hauteur IH représentera le nombre total des trapèzes; il faut donc multiplier la somme des deux lignes AB et CD par la moitié de la hauteur IH, ou la moitié de la somme des deux lignes AB et CD par la hauteur IH. D'où l'on voit que si AB est zéro, auquel cas le trapèze dégénère en triangle, il faudra multiplier la base de ce triangle par la moitié de sa hauteur, ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons démontré en Géométrie.

De la sommation des Puissances des termes d'une Progression arithmétique quelconque.

235. On vient de voir que le principe de la sommation des termes d'une progression arithmétique peut avoir quelques applications en Géométrie. Il en a encore dans plusieurs autres rencontres. Il est, par exemple, la base de la sommation des carrés, des cubes, etc., des termes d'une progression arithmétique, et la sommation de ces puissances a aussi son utilité. Nous allons nous en occuper un moment; mais, auparavant, il est à propos de faire observer que, quand on se propose de sommer une suite de quantités qui croissent ou qui décroissent suivant une loi connue, l'objet est de déterminer la somme de ces quantités par la connaissance de quelques-unes d'entre elles, de leur nombre, et de la quantité qui marque la loi de leur augmentation ou de leur diminution. Pour résoudre cette question, on peut toujours, comme pour toute autre, faire usage du principe que nous avons donné (67). Mais comme ce principe suppose que si l'on connaissait la quantité cherchée, on serait en état de la vérifier, ce qui ne peut se faire sans connaître au moins quelques-unes de ses propriétés; essayons donc de trouver les propriétés des suites des carrés, des cubes, etc., des nombres en progression arithmétique. Soient donc a, b, c, d, etc., plusieurs nombres, en progression arithmétique, dont la différence soit r; on aura,

$$(1) \ldots b = a + r,\ c = b + r,\ d = c + r, \text{ etc.}$$

On en déduira

$$(2)\ldots\ b^2 = a^2 + 2ar + r^2;\ c^2 = b^2 + 2br + r^2, \text{ etc.};$$
$$(3)\ldots\ b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3;\ c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3, \text{ etc.}$$

Ajoutant les équations (2) entre elles, on trouvera

$$c^2 = a^2 + 2r(a + b) + 2r^2.$$

Et l'on voit qu'en général, si le nombre des quantités..... a, b, c, d, etc., était marqué par n, que la dernière fût marquée par u, et la somme de toutes ces mêmes quantités par s', on aurait

$$u^2 = a^2 + 2r(s' - u) + (n - 1)r^2,$$

car $2r$ est multiplié par toutes les quantités a, b, c, etc., excepté la dernière, et r^2 est ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'équations, c'est-à-dire autant de fois moins une qu'il y a de quantités a, b, c, etc. Or, cette équation renfermant s', il est aisé d'en tirer la valeur de cette quantité, et par conséquent l'expression de la somme de tous les termes d'une progression arithmétique. Cette valeur de s' est

$$s' = \frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2r} + u.$$

Si l'on ajoute de même les équations (3), on trouvera

$$c^3 = a^3 + 3r(a^2 + b^2) + 3r^2(a + b) + 2r^3,$$

où l'on voit que la quantité qui multiplie $3r$ est la somme de tous les carrés, excepté le dernier; que la quantité qui multiplie $3r^2$ est la somme de toutes les quantités, excepté la dernière, et qu'enfin le cube r^3 a été ajouté à lui-même autant de fois qu'il y avait d'équations, c'est-à-dire autant de fois moins une qu'il y a de quantités; par conséquent, en général, et en nommant s'' la somme des carrés, u le dernier terme, on aura

$$u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r^2(s' - u) + (n-1)r^3.$$

Donc, connaissant le premier terme, le dernier, la différence r et le nombre des termes, on pourra avoir, par le

moyen de cette équation, la valeur de s'', c'est-à-dire de la somme des carrés; car la quantité s' a été déterminée ci-dessus. Si donc on substitue pour s' sa valeur, on trouvera

$$s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1)\,r^3}{6r}.$$

Si l'on élève successivement à la quatrième puissance les équations (1), qu'on les ajoute, et qu'on les traite d'une manière analogue, on trouvera de même la somme des cubes. On suivra le même procédé pour obtenir la somme des puissances plus élevées.

236. Donnons maintenant quelques applications de la somme des carrés. Si l'on suppose que la progression arithmétique dont il s'agit soit la suite naturelle des nombres, à commencer par l'unité, c'est-à-dire soit 1, 2, 3, etc., alors on aura $a = 1$, $r = 1$ et $u = n$; car $u = a + (n-1)\,r$. La valeur de s'' deviendra donc

$$(1)\ldots\ s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Supposons maintenant qu'on veuille savoir combien il y a de boulets dans une pile carrée dont on connaît le nombre des boulets d'un des côtés de la base. Il est évident que cette pile est composée de rangs parallèles à la base qui sont tous des carrés dont le côté va continuellement en diminuant de 1 à compter de la base, ou en augmentant de 1 à compter du sommet. La totalité est donc la somme des carrés de la suite naturelle des nombres, prise jusqu'au nombre n qui marque le nombre des boulets d'un des côtés de la base : cette totalité est donc exprimée par $\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)$, c'est-à-dire que pour l'avoir il faut suivre cette règle : *Au nombre des boulets d'un des côtés de la base et à son double ajoutez un; multipliez les deux résultats l'un par l'autre et leur produit par le nombre même des boulets; et prenez le sixième de ce dernier produit.* Par exemple, si la pile quadrangulaire a six boulets de côté, à 6 et à son double 12, j'ajoute 1, ce qui me donne 7 et 13,

qui, multipliés l'un par l'autre, font 91; je multiplie celui-ci par 6, ce qui fait 546, dont le sixième 91 est le nombre des boulets de la pile.

Lorsque la pile n'a point pour base un carré, mais un parallélogramme, il faut la concevoir partagée en deux parties (fig. 4), dont l'une est la pile quadrangulaire dont nous venons de parler, et dont l'autre est un prisme dont on évaluera la totalité des boulets en multipliant le nombre des boulets contenus dans le triangle FBG, par le nombre des boulets de l'arête BC. Quant au nombre des boulets contenus dans le triangle BGF, on l'aura en multipliant la moitié du nombre des boulets du côté FG par ce nombre augmenté de 1.

237. Nous avons vu en Géométrie, que, pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il fallait multiplier la surface de la base par le tiers de la hauteur. On peut le démontrer aussi par la formule de la somme des carrés. Mais, auparavant, il faut remarquer que si, dans la formule (1) du n° 236, on suppose que le nombre n des termes est infini, cette formule se réduit à $s'' = \frac{1}{3} n^3 = u^2 \times \frac{1}{3} n$, car $u = n$. En effet, supposer que n est infini, c'est supposer qu'il ne peut plus être augmenté par aucune quantité finie : ainsi pour que le calcul exprime la supposition que l'on fait que n est infini, il faut nécessairement regarder $n+1$ et n, comme étant la même chose, et $2n+1$ et $2n$, comme étant aussi égaux entre eux : alors la formule

$$s'' = \tfrac{1}{6} n (n+1) (2n+1) \text{ devient } s'' = \tfrac{1}{6} n . n . 2n = \tfrac{1}{3} n^3.$$

Cela posé, nous avons démontré (*Géom.* 202) qu'en concevant une pyramide comme composée de tranches parallèles à la base, ces tranches étaient entre elles comme les carrés de leurs distances St au sommet (fig. 5); donc, en concevant la hauteur partagée en une infinité de parties égales, les distances suivront la progression naturelle des nombres, et les tranches suivront celle de leurs carrés : donc la somme des tranches se trouvera de la même manière que celle des carrés;

or, la formule $s^n = u^2 \times \frac{1}{2} n$, fait voir qu'il faut multiplier le dernier des carrés par le tiers de leur nombre; il faut donc, pour avoir la somme des tranches, multiplier la dernière, c'est-à-dire la base, par le tiers du nombre des tranches, c'est-à-dire par le tiers de la hauteur.

238. Si l'on veut avoir la formule générale pour la sommation des puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque, on aura

$$d^m = c^m + mc^{m-1}r + \frac{1}{2}m(m-1)c^{m-2}r^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)c^{m-3}r^3 + \text{etc.},$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}r + \frac{1}{2}m(m-1)b^{m-2}r^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)b^{m-3}r^3 + \text{etc.},$$

$$b^m = a^m + ma^{m-1}r + \frac{1}{2}m(m-1)a^{m-2}r^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)a^{m-3}r^3 + \text{etc.},$$

et, par conséquent, en ajoutant, réduisant et représentant par..... st^{m-1}, st^{m-2}, st^{m-3}, etc., la somme des puissances $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc., de tous les termes, et par u le dernier terme, on aura, en général,

$$u^m = a^m + mr(st^{m-1} - u^{m-1}) + \frac{1}{2}m(m-1)r^2(st^{m-2} - u^{m-2}) + \text{etc.};$$

d'où l'on voit qu'en supposant successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$, $=4$, etc., on aura les formules de la sommation de toutes les puissances. Car, en supposant $m=1$, on a $u = a + r(st^0 - u^0)$; $st^0 = s \times 1$, c'est-à-dire la somme d'autant d'unités qu'il y a de termes, et $u^0 = 1$. En sorte qu'au lieu de $st^0 - u^0$, on peut prendre $n-1$. En supposant $m=2$, on a

$$u^2 = a^2 + 2r(st - u) + r^2(st^0 - u^0),$$

qui donne st, puisqu'on connaît la valeur de st^0. Supposons $m=3$, on aura

$$u^3 = a^3 + 3r(st^2 - u^2) + 3r^2(st - u) + r^3(st^0 - u^0),$$

qui donnera st^2, puisqu'on connaît st et st^0, et ainsi de suite à l'infini.

239. Lorsqu'une fois on sait trouver la somme des puissances de plusieurs nombres en progression arithmétique, il est fort aisé de trouver celle d'une infinité d'autres espèces de progressions. Par exemple, si, ayant une progression arithmétique, telle que 3.7.11.15.19.etc., on conçoit que si l'on ajoute successivement les termes, on formera la suite 3, 10, 21, 36, 55, etc., que l'on peut sommer. Et si l'on ajoute de même les termes de celles-ci, on aura la suite 3, 13, 34, 70, 125, etc., qu'on peut pareillement sommer; il en sera de même des termes de celle-ci, ajoutés de la même manière, et ainsi à l'infini. En effet, la somme des termes de la progression arithmétique est $s = \frac{1}{2}n(a+u)$, ou, en mettant pour u sa valeur,

$$u = a + r(n-1), \qquad s = \frac{1}{2}n[2a + r(n-1)],$$

Cette valeur de s exprime donc un terme quelconque de la seconde suite. Donc, pour avoir la somme des termes de la seconde suite, il faut sommer la suite des quantités que donnerait $\frac{1}{2}n[2a+r(n-1)]$, en mettant successivement pour n tous les nombres de la progression naturelle $\div$ 1.2.3, etc. Or, cette quantité revient à $an+\frac{1}{2}rn^2-\frac{1}{2}rn$, dans laquelle a et r restant toujours les mêmes, quelque valeur qu'on donne à n, il est clair que pour sommer toutes les quantités représentées par an, il suffit de sommer les quantités représentées par n, et multiplier cette somme par a; or, la somme des quantités représentées par n est la somme de la progression arithmétique des nombres naturels. Le raisonnement est le même pour $\frac{1}{2}rn$. A l'égard de $\frac{1}{2}rn^2$, puisque r reste le même, quelque nombre que l'on substitue pour n, on sommera donc toutes les quantités représentées par n^2, c'est-à-dire qu'on prendra la somme des carrés des nombres naturels, et on la multipliera par $\frac{1}{2}r$. Ainsi, pour la somme des quantités an, on aura $a(n+1)\frac{1}{2}n$; pour celle des quantités $\frac{1}{2}rn$, on aura $\frac{1}{2}r(n+1)\frac{1}{2}n$, et enfin pour celles des quantités $\frac{1}{2}rn^2$, on aura $\frac{1}{2}r\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$; en sorte que la somme des quantités $an+\frac{1}{2}rn^2-\frac{1}{2}rn$, ou bien celle des termes de la seconde, sera

$$\frac{1}{2}an(n+1)+\frac{1}{12}r(2n^3+3n^2+n)-\frac{1}{4}nr(n+1),$$

qui se réduit à

$$\frac{1}{2}an(n+1)+\frac{1}{6}rn(n-1)(n+1).$$

Et puisque chaque terme de la troisième suite est la somme des termes de la seconde, on sommera cette troisième en sommant les différentes parties de ce dernier résultat; ce qui n'exigera encore que des sommations des puissances de la suite naturelle des nombres, et ainsi à l'infini. Si l'on suppose $a=1$ et $r=1$, c'est-à-dire si la progression primitive est la suite des nombres naturels, les progressions dont il s'agit actuellement deviennent alors ce qu'on appelle les *nombres figurés*. C'est par cette dernière formule qu'on peut trouver le nombre des boulets d'une pile triangulaire : comme on a, dans ce cas, $a=1$ et $r=1$, elle se réduit à $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

On peut de même sommer les suites que l'on formerait, en ajoutant la suite des carrés, ou la suite des cubes, etc., de cette même manière.

En un mot, on peut sommer, par ces mêmes moyens, toute suite de quantités dont un terme quelconque sera exprimé par tant de puissances parfaites que l'on voudra d'un même nombre n, ces puissances étant d'ailleurs multipliées par tels nombres connus qu'on voudra.

Propriétés et usages des Progressions géométriques.

240. On peut aussi trouver la somme des termes d'une progression géométrique par une méthode analogue à celle que nous avons employée pour sommer les puissances des termes d'une progression arithmétique. Supposons que.... $a, b, c, d, e,$ etc., soient les termes consécutifs d'une progression géométrique croissante dont la raison soit q. Puisque chaque terme contient q fois celui qui le précède, on aura les équations suivantes :

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq, \quad e = dq, \quad \text{etc.};$$

donc, ajoutant ces équations, on aura

$$b + c + d + e + \text{etc.} = (a + b + c + d + \text{etc.})\, q;$$

d'où l'on voit qu'en général, le premier membre sera toujours la somme de tous les termes, excepté le premier, et le second sera toujours la raison q multipliée par la somme de tous les termes, excepté le dernier. Donc, si l'on appelle s la somme de tous les termes et u le dernier, cette équation se changera en

$$s - a = (s - u)q; \quad \text{d'où} \quad (1)\ldots\ s = \frac{qu - a}{q - 1},$$

formule par laquelle, connaissant le premier terme a, le dernier u et la raison q, on aura la somme s de tous les termes. Cette même formule peut servir aussi pour les progressions décroissantes, puisque la progression décroissante, prise dans un ordre renversé, est une progression croissante; il n'y aura de changement à faire que celui du *dernier terme* au lieu du *premier*, et du *premier* au lieu du *dernier*. Si la progression décroissante s'étendait à l'infini, la somme se réduirait alors à $s = \frac{qu}{q - 1}$, u marquant le premier terme. En effet, pour

exprimer que la progression s'étend à l'infini, il faut introduire dans le calcul ce que cette proposition renferme, savoir, que le dernier terme est infiniment petit; or le moyen d'exprimer cette dernière condition, c'est de le supposer nul à l'égard du terme *qu*; car si on le laissait subsister, ce serait supposer qu'il peut encore diminuer *qu*, ce qui est contre la première supposition. On voit donc que *pour avoir la somme de tous les termes d'une progression géométrique, il faut multiplier le plus grand terme par la raison* (*) *de la progression, et ayant retranché du produit le premier terme de cette même progression, diviser le reste par la raison diminuée d'une unité;* en sorte que, lorsque la progression est décroissante à l'infini, cela se réduit à multiplier le plus grand terme par la raison, et diviser ensuite par la raison diminuée d'une unité. Ainsi la somme des termes de cette progression continuée à l'infini

$$\div\div \frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}, \text{ etc., est } \frac{\frac{1}{1}\times 2}{2-1} \text{ ou } 1.$$

En général, toute progression géométrique décroissante à l'infini, dont chaque terme a pour numérateur constant un nombre moindre d'une unité que le dénominateur du premier terme, vaut 1; car cette progression est en général

$$\div\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} \div \frac{1}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4} \text{ etc.},$$

dont la somme est $\dfrac{\frac{n}{n+1}(n+1)}{n+1-1}$, ou $\frac{n}{n}$, c'est-à-dire 1.

Si cette conclusion paraît surprenante à quelques lecteurs, ils doivent faire attention que si après avoir pris, par exemple, les $\frac{2}{3}$ de la ligne AB (*fig.* 6) que je suppose de 1 pied, on

(*) Par *la raison*, nous entendons en général le nombre de fois qu'un terme de la progression *contient* celui qui est immédiatement plus petit; en sorte que cet énoncé convient à la progression décroissante comme à la progression croissante.

prend ensuite Cd, c'est-à-dire les deux tiers de la partie restante CB, puis les deux tiers de la partie restante dB, puis les deux tiers de la partie restante eB, et ainsi à l'infini, on n'aura jamais absorbé plus que la ligne AB. La même chose aura lieu si l'on prend d'abord les trois quarts de AB, puis les $\frac{1}{4}$ de ce qui reste, et ainsi à l'infini. Or, c'est ce qu'exprime la progression $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{27}$, etc., puisque $\frac{2}{3}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{27}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{9}$, et ainsi de suite.

241. Nous avons vu (*Arith.* 212) *qu'un terme quelconque d'une progression géométrique, était composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance d'un degré égal au nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit.* Donc si l'on nomme a le premier terme, u un terme quelconque, q la raison et n le nombre des termes, on aura $u = aq^{n-1}$; et comme il entre quatre quantités dans cette équation, on peut en tirer quatre formules, qui serviront à résoudre cette question générale: *Trois de ces quatre choses étant données, le premier terme, le dernier, la raison et le nombre des termes d'une progression géométrique, trouver la quatrième.* Car, 1°. l'équation donne immédiatement la valeur de u; 2°. on trouve facilement que celle de a est $a = \frac{u}{q^{n-1}}$: à l'égard de celle de q, on trouvera, par ce qui a été dit (170), $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Sur quoi nous remarquerons que cette dernière équation renferme la règle que nous avons donnée en Arithmétique pour insérer plusieurs moyens proportionnels entre deux quantités données. Ces quantités sont ici a et u; mais pour avoir la raison q qui doit régner dans la progression, on voit ici qu'il faut diviser la plus grande u par la plus petite a, et tirer la racine du degré $n-1$ du quotient $\frac{u}{a}$; or n étant le nombre total des termes, $n-1$ est plus grand d'une unité que le nombre des moyens; ce qui s'accorde avec la règle citée.

Quant à la manière d'avoir n, dans l'équation $u = aq^{n-1}$,

l'Algèbre ne fournit pas de moyens directs; mais on peut la résoudre facilement, quoique indirectement, en employant les logarithmes. Nous avons vu (*Arith.* 229) *que pour élever à une puissance par le moyen des logarithmes, il fallait multiplier le logarithme de la quantité par l'exposant de cette puissance.* Ainsi en représentant par L les mots *logarithme de*, on pourra, au lieu de La^2, prendre $2La$; au lieu de La^3, prendre $3La$; au lieu de La^n, prendre nLa. Donc, en se rappelant que pour multiplier par le moyen des logarithmes, il faut ajouter les logarithmes, et qu'au contraire, pour diviser, il faut retrancher le logarithme du diviseur du logarithme du dividende, on aura dans l'équation $u = aq^{n-1}$,

$$Lu = La + Lq^{n-1} = La + (n-1)\,Lq;$$

d'où
$$(2)\ldots\quad n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1.$$

Pour donner des applications de ceci, supposons qu'on ait placé au denier 20 une somme de 60000 livres, à condition que les intérêts que cette somme produira, chaque année, soient traités comme un nouveau fonds, qui produira également intérêt, et ainsi d'année en année, jusqu'à ce que le fonds soit monté à 1000000 livres. On demande combien on doit attendre pour toucher cette dernière somme. Puisque l'intérêt est ici $\frac{1}{20}$ du fonds de l'année précédente, au bout d'une année quelconque le fonds sera égal au fonds de l'année précédente plus la vingtième partie de ce même dernier fonds; ainsi, si l'on représente par a, b, c, d, etc., les fonds successifs d'année en année, on aura

$$b = a + \tfrac{1}{20}a,\quad c = b + \tfrac{1}{20}b,\quad d = c + \tfrac{1}{20}c,$$
ou
$$b = a(1 + \tfrac{1}{20}),\quad c = b(1 + \tfrac{1}{20}),\quad d = c(1 + \tfrac{1}{20});$$

on voit donc que chaque fonds contient toujours celui qui le précède, le même nombre de fois marqué par $+\frac{1}{20}$ ou $\frac{21}{20}$. La suite de ces fonds forme donc une progression géométrique dont le premier terme a est 60000 livres; le dernier u est 1000000 livres; la raison q est $\frac{21}{20}$, et le nombre des termes

est inconnu. On le trouvera donc en substituant dans la formule (2), au lieu de a, u et q, leurs valeurs, ce qui donnera

$$n = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{1,3222193 - 1,3010300} + 1 = \frac{1,2218487}{0,0211893} + 1 = 1 + 57,7$$

à peu près; c'est-à-dire que le fonds de 60000 sera monté à 1000000 livres au bout de 58 ans 8 mois $\frac{1}{2}$, à peu près.

Puisque (*Arith.* 229) *pour extraire par le moyen des logarithmes, une racine d'un degré proposé, il faut diviser le logarithme de la quantité par l'exposant*, on peut, par le moyen des logarithmes, résoudre facilement en nombres, l'équation

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

car on en déduit

$$\mathrm{L}q = \left(\frac{1}{n-1}\right)\mathrm{L}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{\mathrm{L}u - \mathrm{L}a}{n-1}.$$

Si l'on veut appliquer ceci à un exemple, il n'y a qu'à chercher quel devrait être, dans le précédent, l'intérêt pour qu'en 58 ans et $\frac{7}{10}$, le fonds de 60000 livres montât à 1000000 livres. On a ici $a = 60000$, $u = 1000000$, $n = 58,7$: en employant les logarithmes des tables, on trouvera

$$\mathrm{L}q = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{58,7 - 1} = \frac{1,2218487}{57,7} = 0,0211757:$$

ce logarithme répond dans les tables à 1,0500 à très peu près; et ce dernier nombre réduit en vingtièmes, donne 21, d'où l'on conclura que l'intérêt est à très peu près $\frac{1}{20}$.

On voit aussi par là comment on peut facilement insérer par le moyen des logarithmes, plusieurs moyens proportionnels géométriques entre deux nombres donnés.

242. L'équation $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, donnera aussi quatre équations qui serviront à résoudre ce problème général: *Trois de ces quatre choses, la somme, la raison, le premier et le dernier*

terme d'une progression géométrique, étant données, trouver le quatrième. Cela est trop facile à présent pour nous y arrêter.

Enfin, si de l'une des deux équations..... $s = \frac{qu-a}{q-1}$ et $u = aq^{n-1}$, on tire la valeur d'une même quantité a, où q, ou u, etc., et qu'on la substitue dans l'autre, on aura les autres équations qui peuvent servir à résoudre la question suivante, encore plus générale : *de ces cinq choses, le premier terme, le dernier, la raison, la somme et le nombre des termes d'une progression géométrique, trois étant données, trouver chacune des deux autres.*

De la sommation des Suites récurrentes.

243. On appelle suites *récurrentes*, celles dont un terme quelconque se forme de l'addition d'un certain nombre de termes précédens, multipliés ou divisés par des nombres déterminés, positifs ou négatifs. Par exemple, la suite 2, 3, 19, 101, 543, etc., est une suite récurrente, parce que chaque terme est formé des deux précédens, en multipliant le premier par 2, le second par 5, et ajoutant les deux produits; 543 est égal à $19\times 2 + 101\times 5$; de même $101 = 3\times 2 + 19\times 5$. On peut sommer ces suites d'une manière analogue à celle que nous avons employée ci-dessus; il suffira d'en donner un exemple sur les suites récurrentes dont la loi ne dépend que de deux quantités, comme celle que nous venons d'apporter pour exemple.

Soient donc, a, b, c, d, e, f, etc., plusieurs termes formés par cette loi; que chacun soit composé des deux précédens, dont le premier est multiplié par un nombre connu m, et le second par un nombre connu p; on aura donc

$$c = ma + pb, \quad d = mb + pc, \quad e = mc + pd, \quad f = md + pe, \quad \text{etc.}$$

Donc, en ajoutant cette suite d'équations, on aura

$$c + d + e + f + \text{etc.} = m(a + b + c + d + \text{etc.}) + p(b + c + d + e + \text{etc.});$$

or, le premier membre est la somme de tous les termes, excepté les deux premiers : le multiplicateur de m, dans le second membre, est la somme de tous les termes, excepté les deux derniers; et enfin le multiplicateur de p est la somme de tous les termes, excepté le premier et le dernier; donc, en appelant s cette somme, on aura

$$s - a - b = m(s - e - f) + p(s - a - f),$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1};$$

qui donnera la somme, lorsqu'on connaîtra les deux premiers termes, les deux derniers, et de plus, les quantités m et p. On peut y faire entrer le nombre des termes; il faut, pour cela, chercher l'expression générale d'un terme quelconque, par le moyen des quantités a, b, m, p, et du nombre n des termes; mais cette recherche, pour toutes les espèces de séries récurrentes, nous meherait trop loin.

De la construction géométrique des Quantités algébriques.

244. Les lignes, les surfaces et les solides étant des quantités, on peut faire sur chacune de ces trois espèces d'étendue les mêmes opérations qu'on a faites sur les nombres et sur les quantités algébriques. Mais les résultats de ces opérations peuvent être évalués de deux manières principales, ou en nombres, ou en lignes. La première manière supposant que chacune des quantités données est exprimée en nombres, ne peut avoir à présent aucune difficulté; il ne s'agit que de substituer à la place des lettres, les quantités numériques qu'elles représentent, et de faire les opérations que la disposition des signes et des lettres indique. Quant à la manière d'évaluer en lignes les résultats des solutions que l'Algèbre a fournies, elle est fondée sur la connaissance de ce que signifient certaines expressions fondamentales, auxquelles on rapporte ensuite toutes les autres. Nous allons faire connaître les premières, et nous ferons voir ensuite comment on y rapporte les autres : c'est là ce qu'on appelle *construire* les quantités algébriques, ou les problèmes qui ont conduit à ces quantités.

245. Si l'on avait à construire une quantité telle que $\frac{ab}{c}$, dans laquelle a, b, c, marquent des lignes connues, on tirerait (fig. 7) deux lignes indéfinies AZ, AX, faisant entre elles un angle quelconque. Sur l'une AX de ces lignes, on prendrait une partie AB égale à la ligne qu'on a représentée par c, puis une autre AD égale à l'une ou à l'autre des deux lignes a et b, si a, par exemple; ensuite sur la seconde AZ, on prendrait une partie AC égale à la ligne b. Ayant joint les extrémités B et C de la première et de la troisième, par la

ligne BC, on menerait par l'extrémité D de la seconde, la ligne DE parallèle à BC; elle déterminerait sur AZ la partie AE pour la valeur de $\frac{ab}{c}$; car (*Géom.* 102) les parallèles DE et BC donnent cette proportion, AB : AD :: AC : AE, c'est-à-dire $c : a :: b :$ AE; donc (*Arith.* 179) AE $= \frac{ab}{c}$. C'est-à-dire qu'il faut trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes données c, a, b. Et puisque (*Géom.* 120) nous avons donné deux manières de trouver cette quatrième proportionnelle, on peut employer indifféremment l'une ou l'autre pour construire $\frac{ab}{c}$.

On voit donc que si l'on avait à construire $\frac{aa}{c}$, ce cas rentrerait dans le précédent, puisque alors la ligne b est égale à a.

Si l'on avait à construire $\frac{ab+bd}{c+d}$, on remarquerait que cette quantité est la même que $\frac{(a+d)\times b}{c+d}$; regardant donc $a+d$ comme une seule ligne, représentée par m, et $c+d$ aussi comme une seule ligne n, on aurait $\frac{mb}{n}$ à construire, ce qui se rapporte au cas précédent.

Que l'on ait $\frac{aa-bb}{c}$, on se rappellera que $aa-bb$ est (25) la même chose que $(a+b)\times(a-b)$: ainsi l'on représentera $\frac{aa-bb}{c}$, sous cette forme $\frac{(a+b)(a-b)}{c}$, et l'on cherchera une quatrième proportionnelle à c, $a+b$ et $a-b$.

Si la quantité à construire est $\frac{abc}{de}$, on mettra cette quantité sous cette forme $\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$, et ayant construit $\frac{ab}{d}$, comme on vient de l'enseigner, on nommera m la ligne qu'aura donnée

cette construction, alors $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ devient $\frac{mc}{e}$, qui se construit comme ci-dessus.

On voit que pour construire $\frac{a^2b}{c^2}$, on se le représenterait comme $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$; on construirait $\frac{a^2}{c}$, et en ayant représenté la valeur par m, on construirait $\frac{mb}{c}$.

Ainsi tout l'art consiste à décomposer la quantité en portions, dont chacune revienne à la forme $\frac{ab}{c}$ ou $\frac{a^2}{c}$; et quoique cela puisse paraître difficile en quelques occasions, on en vient cependant facilement à bout, en employant les transformations.

Par exemple, si j'avais à construire $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$, je supposerais arbitrairement $b^3 = a^2m$, et $c^2 = an$; alors $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$ se changerait en $\frac{a^3+a^2m}{a^2+an}$ qui se réduit à $\frac{a^2+am}{a+n}$, ou.... $\frac{(a+m)\times a}{a+n}$, quantité facile à construire (après ce qui a été dit ci-dessus), dès qu'on connaîtra m et n. Or pour connaître m et n, les équations $b^3 = a^2m$, et $c^2 = an$, donnent..... $m = \frac{b^3}{a^2}$ et $n = \frac{c^2}{a}$, qui se construisent par ce qui précède.

Ainsi, tant que la quantité sera rationnelle, c'est-à-dire sans radicaux, si le nombre des dimensions du numérateur ne surpasse que d'une unité celui des dimensions du dénominateur, on ramenera toujours sa construction à chercher une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Il arrive quelquefois que les quantités se présentent sous une forme qui semble rendre inutile le secours des transformations; c'est lorsque la quantité n'est pas *homogène*, c'est-à-dire lorsque chacun des termes du numérateur ou du dénominateur n'est pas composé du même nombre de fac-

teurs; par exemple, lorsque la quantité est telle que $\frac{a^3+b}{c^2+d}$. Mais il faut observer que l'on n'arrive jamais à un pareil résultat que lorsque, dans la vue d'introduire des simplifications dans le calcul, on a supposé quelqu'une des quantités égale à l'unité. Par exemple, si dans $\frac{a^3+b^2c}{a^2+c^2}$, je suppose b égal à 1, alors j'aurai $\frac{a^3+c}{a^2+c^2}$. Mais comme on ne peut jamais entreprendre de construire, sans connaître les élémens qu'on emploie pour cette construction, on sait toujours dans chaque cas quelle est cette quantité qu'on a supposée égale à l'unité; on pourra donc toujours la restituer; et il ne peut y avoir d'embarras là-dessus, parce que le nombre des dimensions devant toujours être le même dans chaque terme du numérateur et du dénominateur (quoiqu'il puisse être différent des termes de l'un aux termes de l'autre), on restituera dans chaque terme une puissance de la ligne qu'on a prise pour unité, suffisamment élevée pour compléter le nombre des dimensions; ainsi, si j'avais à construire $\frac{a^3+b+c^2}{a+b^2}$, supposant que d soit la ligne qui a été prise pour unité, j'écrirais $\frac{a^3+bd^2+c^2d}{ad+b^2}$, que je construirais en faisant.....

$b^2=dm$, $c^2=dn$ et $a^3=d^2p$, ce qui la changerait en.... $\frac{d^2p+bd^2+d^2n}{ad+dm}$, ou $\frac{dp+bd+nd}{a+m}$, ou $\frac{(p+b+n)d}{a+m}$, quantité facile à construire dès qu'on aura construit les valeurs de m, n et p, savoir, $m=\frac{b^2}{d}$, $n=\frac{c^2}{d}$, $p=\frac{a^3}{d^2}$, en se conformant aux règles données ci-dessus.

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que le nombre des facteurs, ou le nombre des dimensions de chaque terme du numérateur, ne surpassait que d'une unité celui des dimensions du dénominateur. Il peut le surpasser de deux et même de trois, mais jamais de plus, à moins que

quelque ligne n'ait été supposée égale à l'unité, ou que quelques-uns des facteurs ne représentent des nombres.

246. Lorsque le nombre des dimensions du numérateur de la quantité proposée surpasse celui des dimensions du dénominateur, de deux unités, alors la quantité exprime une surface dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélogramme, et même d'un carré. Par exemple, si j'avais à construire la quantité $\frac{a^3+a^2b}{a+c}$, je la considérerais comme $a\times\frac{a^2+ab}{a+c}$; or $\frac{a^2+ab}{a+c}$ se construit aisément par ce qui a été dit ci-dessus, en le considérant comme $\frac{a+b}{a+c}$: supposons donc que m soit la valeur de la ligne qu'aura donnée cette construction; alors $a\times\frac{a^2+ab}{a+c}$ deviendra $a\times m$: or, si l'on fait de a la hauteur, et de m la base d'un parallélogramme, on aura $a\times m$ pour la surface de ce parallélogramme; donc réciproquement cette surface représentera $a\times m$ ou $\frac{a^3+a^2b}{a+c}$.

On ramenera de même à une pareille construction la quantité $\frac{a^3+bc^2+d^3}{a+c}$, en faisant $bc=am$ et $d^3=an$; car alors elle deviendra $\frac{a^3+amc+and}{a+c}$, qui est la même chose que $a\left(\frac{a^2+mc+nd}{a+c}\right)$. Or, le facteur $\frac{a^2+mc+nd}{a+c}$ se rapporte aux constructions précédentes, ainsi que les valeurs de m et de n. Ayant trouvé la valeur de ce facteur, si je la représente par p, il ne s'agira plus que de construire $a\times p$, c'est-à-dire de faire un parallélogramme dont la hauteur soit a et la base p.

247. Enfin si le nombre des dimensions du numérateur surpasse de 3 celui des dimensions du dénominateur, alors la

quantité exprime un solide dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélépipède. Par exemple, si j'avais à construire $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$, je considérerais cette quantité comme étant la même que $ab \times \frac{a^2+ab}{a+c}$; et ayant construit $\frac{a^2+ab}{a+c}$, selon ce qui a été dit ci-dessus, si je représente par m la ligne qu'aura donnée cette construction, la question sera réduite à construire $ab \times m$; or ab représente, ainsi que nous venons de le voir; un parallélogramme; si donc on conçoit un parallélépipède qui ait pour base ce parallélogramme, et qui ait pour hauteur la ligne m, la solidité de ce parallélépipède représentera $ab \times m$, c'est-à-dire $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$.

248. Ce que nous venons de dire suffit pour construire toute quantité rationnelle. Voyons maintenant les quantités radicales du second degré. Pour construire $\sqrt{ab}$, il faut (fig. 8) tirer une ligne indéfinie AB, sur laquelle on prendra de suite la partie AC, égale à la ligne a, et la partie CB, égale à la ligne b; sur la totalité AB, comme diamètre, on décrira un demi-cercle qui coupe en D la perpendiculaire CD élevée sur AB au point C; alors CD sera la valeur de $\sqrt{ab}$, c'est-à-dire (*Géom.* 126) que pour avoir la valeur de $\sqrt{ab}$, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre les deux quantités représentées par a et par b; en effet, on sait (*Géom.* 125) que AC : CD :: CD : CB, ou a : CD :: CD : b; donc, en multipliant les extrêmes et les moyens, on a $\overline{CD}^2 = ab$, et par conséquent $CD = \sqrt{ab}$.

On voit par là comment on doit s'y prendre pour transformer en un carré une surface quelconque : s'il s'agit d'un parallélogramme dont a soit la hauteur et b la base, en nommant x le côté du carré cherché, on aura $x^2 = ab$, et par conséquent $x = \sqrt{ab}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur. S'il s'agit d'un triangle

que l'on sait (*Géom.* 140) être la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, on prendra une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur et la moitié de la base. S'il s'agit d'un cercle, on prendra une moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence; et s'il s'agit d'une figure rectiligne quelconque, comme on sait (*Géom.* 143) qu'elle est réductible en un triangle, on la réduira aisément en un carré, en prenant une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur de ce triangle. Mais si la figure n'était point construite, et que l'on eût seulement l'expression algébrique de sa surface, par le moyen de quelques-unes de ses dimensions, alors on construirait comme pour les quantités que nous allons parcourir.

Si l'on avait $\sqrt{3ab+b^2}$, on considérerait cette quantité comme étant la même que $\sqrt{(3a+b)\times b}$; on prendrait donc une moyenne proportionnelle entre $3a+b$ et b. Pareillement, si l'on a $\sqrt{aa-bb}$, on considérera cette quantité comme étant la même que $\sqrt{(a+b)\times(a-b)}$ (25); ainsi l'on prendra une moyenne proportionnelle entre $a+b$ et $a-b$. Si l'on a $\sqrt{a^2+bc}$, on fera $bc=am$, et alors on aura $\sqrt{a^2+am}$ ou $\sqrt{(a+m)\times a}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre $a+m$ et a, après avoir construit la valeur de $m=\frac{bc}{a}$, en suivant les règles données ci-dessus.

Pour construire $\sqrt{a^2+b^2}$, on pourrait aussi faire $b^2=am$ et construire $\sqrt{a^2+am}$ selon ce qui vient d'être dit. Mais la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) nous fournit un moyen plus simple; le voici : Tirez une ligne AB (fig. 9) égale à la ligne a; à son extrémité A, élevez une perpendiculaire AC égale à la ligne b; alors si vous tirez BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{a^2+b^2}$; en effet, puisque le triangle CAB est rectangle, on a (*Géom.* 164).....

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=a^2+b^2$; donc $BC=\sqrt{a^2+b^2}$.

On peut aussi, par le moyen du triangle rectangle, construire $\sqrt{a^2-b^2}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus. Pour cet effet, on tirera (fig. 11) une ligne AB égale à a, et ayant décrit sur AB, comme diamètre, le demi-cercle ACB, on tirera du point A une corde $AC=b$; alors si l'on mène BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{a^2-b^2}$; car le triangle ABC étant rectangle (*Géom.* 165), on a $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$; donc $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=a^2-b^2$; donc $BC=\sqrt{a^2-b^2}$.

On peut donc construire aussi $\sqrt{a^2+bc}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus, en s'y prenant comme il suit. Faire $bc=m^2$, et construire $\sqrt{a^2+m^2}$, d'après ce qui vient d'être dit; et pour cet effet, on commencera par déterminer m en prenant une moyenne proportionnelle entre b et c, ainsi que l'indique l'équation $bc=m^2$, qui donne $m=\sqrt{bc}$.

S'il y avait plus de deux termes sous le radical, on ramènerait toujours la construction à quelques-unes des méthodes précédentes, par le moyen des transformations. Par exemple, si j'avais $\sqrt{a^2+bc+ef}$, je ferais $bc=am$, $ef=an$, et j'aurais $\sqrt{a^2+am+an}$, ou $\sqrt{(a+m+n)\times a}$, que je construirais en prenant une moyenne proportionnelle entre a et $a+m+n$, après avoir construit les valeurs de m et de n, savoir: $m=\frac{bc}{a}$, $n=\frac{ef}{a}$. Je pourrais encore faire $bc=m^2$, $ef=n^2$, et alors j'aurais à construire $\sqrt{a^2+m^2+n^2}$. Or, lorsque le radical renferme ainsi une suite de carrés positifs, par exemple, $\sqrt{a^2+m^2+n^2+p^2+\text{etc.}}$, on fera $\sqrt{a^2+m^2}=h$.... $\sqrt{h^2+n^2}=i$, $\sqrt{i^2+p^2}=k$, et ainsi de suite; et comme chacune de ces quantités se trouve déterminée par la précédente, la dernière donnera la valeur de... $\sqrt{a^2+m^2+n^2+p^2+\text{etc.}}$. Pour construire ces quantités de la manière la plus simple, on regardera successivement chaque hypoténuse comme un côté; par exemple (fig. 10), ayant pris $AB=a$, élevé la perpendiculaire $AC=m$, et tiré BC

qui sera h, on élevera au point C, sur BC, la perpendiculaire CD$=n$, et ayant tiré BD qui sera i, à son extrémité D, on élevera sur BD la perpendiculaire DE$=p$, et BE sera $k=\sqrt{a^2+m^2+n^2+p^2}$.

Si quelques-uns de ces carrés sont négatifs, alors on réunira à ce que nous venons de dire, ce qui a été dit pour construire $\sqrt{a^2-b^2}$.

Enfin, si l'on avait à construire une quantité de cette forme $\frac{a\sqrt{b+c}}{\sqrt{d+e}}$, on la changerait en $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, en multipliant haut et bas par $\sqrt{d+e}$; alors cherchant une moyenne proportionnelle entre $b+c$ et $d+e$, et la nommant m, on aurait à construire $\frac{am}{d+e}$, ce qui est facile.

Au reste, il s'agit ici de règles générales; on peut souvent construire d'une manière beaucoup plus simple, en partant toujours des mêmes principes; mais ces simplifications se tirent de quelques considérations particulières et propres à chaque question, et ne peuvent, par conséquent, être exposées qu'à mesure que les questions en amènent l'occasion. Nous remarquerons seulement, en terminant cette matière, que quoique la construction des quantités radicales dont il vient d'être question se réduise à prendre des quatrièmes proportionnelles, des moyennes proportionnelles, et à construire des triangles rectangles, cependant on peut quelquefois avoir des constructions plus ou moins simples ou élégantes, selon la méthode qu'on emploie pour trouver ces moyennes proportionnelles; c'est pourquoi nous enseignerons ici deux autres manières de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. La première consiste à décrire sur la plus grande, AB, des deux lignes données (fig. 11) un demi-cercle ACB, et ayant pris une partie AD égale à la seconde, d'élever la perpendiculaire CD et de tirer la corde AC qui sera moyenne proportionnelle entre AB et AD; car en tirant CB, le triangle ACB (*Géom.* 65) est rectangle, et par conséquent (*Géom.* 112) AC est moyenne

proportionnelle entre l'hypoténuse AB et le segment AD. La seconde manière consiste (fig. 12) à tirer une ligne AB égale à la plus grande ligne donnée, et ayant pris sur elle une partie AC égale à la plus petite, décrire sur le reste BC un demi-cercle CDB, auquel on mène la tangente AD qui (*Géom.* 129) est moyenne proportionnelle entre AB et AC.

On voit donc que les quantités rationnelles peuvent toujours être construites par le moyen des lignes droites, et que les quantités radicales du second degré peuvent être construites par le cercle et la ligne droite réunis. Quant aux quantités radicales de degrés supérieurs, leur construction dépend de la combinaison de différentes lignes courbes; nous en parlerons par la suite. Nous allons nous occuper, pour le présent, des questions dont la solution dépend de quantités ou rationnelles ou radicales du second degré.

Diverses questions de Géométrie, et réflexions tant sur la manière de les mettre en équation, que sur les diverses solutions que donnent ces équations.

249. Le principe que nous avons donné (67) pour mettre les questions en équation, s'applique également aux questions de Géométrie. Il faut de même représenter ce que l'on cherche par un signe particulier, et raisonner ensuite à l'aide de ce signe et de ceux qui représentent les autres quantités, comme si tout était connu, et que l'on voulût vérifier. Cette méthode, ou manière de procéder, est ce qu'on appelle l'*Analyse*. Pour être en état de faire les raisonnemens qu'exige cette vérification, il faut connaître au moins quelques propriétés de la quantité que l'on cherche. Il est donc clair que, pour être en état de mettre les questions de Géométrie en équation, il faut avoir présentes à l'esprit les connaissances que nous avons données dans la seconde partie de ce Cours. Dans la plupart des questions numériques, ou de la nature de celles que nous avons parcourues dans la première Section, il suffit le plus souvent, pour appliquer le principe, de traduire en langage

algébrique l'énoncé de la question ; mais dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, il faut souvent employer encore d'autres moyens : nous tâcherons de les faire connaître à mesure que nous avancerons ; mais ce que nous pouvons dire en général, pour le présent, c'est qu'il n'est pas toujours nécessaire, pour vérifier une quantité, d'examiner si elle satisfait immédiatement aux conditions de la question : cette vérification se fait souvent avec plus de facilité en examinant si cette quantité a certaines propriétés qui sont essentiellement liées avec les conditions de la question. Après cette réflexion, dont nous aurons occasion de faire usage, nous passons aux exemples qui, dans cette matière, sont toujours plus faciles à saisir que les préceptes généraux.

250. Proposons-nous donc pour première question, de *décrire un carré* ABCD (fig. 13) *dans un triangle donné*, EHI. Par ces mots, *un triangle donné*, nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, etc. Avec un peu d'attention, on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à GF ; ainsi l'équation se présente tout naturellement ; il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB et celle de FG, et ensuite les égaler. Nommons donc a la hauteur connue EF ; b la base connue HI, et x la ligne inconnue GF ; alors EG vaudra $a - x$. Or, puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 115) avoir EF : EG :: FI : GB :: HI : AB, c'est-à-dire EF : EG :: HI : AB, ou $a : a - x :: b :$ AB ; donc (*Arith.* 179) $\text{AB} = \frac{ab - bx}{a}$: puis donc que AB doit être égal à FG, on aura $\frac{ab - bx}{a} = x$; d'où l'on tire $x = \frac{ab}{a + b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (245), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b et a, ce que l'on exécutera de cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$,

c'est-à-dire égale à EF + HI, et l'on tirera EO; puis ayant pris FM égale à III $= b$, on menera, parallèlement à EO, la ligne MG qui, par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x; car les triangles semblables EFO, GFM, donnent FO : FM :: FE : FG, ou $a + b : b :: a :$ FG, qui vaudra donc $\frac{ab}{a+b}$.

251. Proposons-nous pour seconde question celle-ci... *Connaissant la longueur de la ligne* BC (fig. 14) *et les angles* B *et* C *que forment avec elle les deux lignes* BA *et* CA, *déterminer la hauteur* AD *à laquelle ces deux dernières lignes se rencontrent.* On fait entrer les angles dans le calcul algébrique à l'aide des mêmes lignes qu'on emploie dans la Trigonométrie, c'est-à-dire à l'aide des sinus, tangentes, etc. Ainsi quand on dit qu'on donne un angle, l'angle C, par exemple, on entend que l'on donne la valeur de son sinus ou de sa tangente, etc.; cela posé, nommons BC $= a$, AD $= y$. Dans le triangle rectangle ADC, nous aurons (*Géom.* 296) CD : DA comme le rayon est à la tangente de l'angle ACD; ou..... CD : y :: r : m, en appelant r le rayon et m la tangente de l'angle ACD; donc (*Arith.* 179) CD $= \frac{ry}{m}$. Par un raisonnement semblable, on trouvera en nommant n la tangente de ABD, BD : y :: r : n; donc BD $= \frac{ry}{n}$; or BD + DC $=$ BC $= a$; donc $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$; d'où l'on tire $y = \frac{amn}{rn+rm}$.

On peut rendre cette expression plus simple en introduisant, au lieu des tangentes m et n des deux angles C et B, leurs cotangentes, que nous nommerons p et q. Pour cet effet, il faut se rappeler (*Géom.* 280) que tang : r :: r : cot; en vertu de cette proposition, on aura $m : r :: r : p$, et $n : r :: r : q$; d'où l'on tire $m = \frac{r^2}{p}$ et $n = \frac{r^2}{q}$; substituant, au lieu de m et n, ces valeurs dans celle de y, on trouvera $y = \frac{ar}{p+q}$.

252. On voit par là que lorsque, parmi les quantités qu'on peut regarder comme données, celles qu'on a employées ne conduisent pas à un résultat aussi simple qu'on le désire, il n'est pas nécessaire de recommencer un nouveau calcul pour s'assurer si, en employant les autres données, on ne pourrait pas arriver à un résultat plus simple. Il suffit d'exprimer par des équations les rapports des données qu'on a employées d'abord avec celles qu'on veut introduire; c'est ainsi que nous venons d'exprimer m et n par les équations $m = \frac{r^2}{p}$, $n = \frac{r^2}{q}$.

253. Nous choisirons pour troisième exemple une question qui nous donne lieu tout-à-la-fois de faire voir la manière de mettre en équation les questions de Géométrie, et comment, par différentes préparations de ces équations, on peut découvrir de nouvelles propositions. *Connaissant les trois côtés d'un triangle* ABC (fig. 15), *trouver les segmens* AD *et* DC *formés par la perpendiculaire* BD, *et la perpendiculaire* BD *elle-même.* Si je connaissais chacune de ces lignes, voici comment je les vérifierais. J'ajouterais le carré de BD avec le carré de CD, et je verrais si la somme est égale au carré de BC : ce qui doit être, puisque le triangle BCD est rectangle (*Géom.* 164). J'ajouterais de même le carré de AD au carré de BD, et je verrais si la somme est égale au carré de AB. Imitons donc ce procédé : et, pour cet effet, soit $BD = y$; $CD = x$; $BC = a$; $AB = b$; $AC = c$; alors AD qui est $AC - CD$, sera $c - x$. Nous aurons donc

$$xx + yy = aa, \quad \text{et} \quad cc - 2cx + xx + yy = bb.$$

Comme xx et yy n'ont dans chaque équation d'autre coefficient que l'unité, je retranche la seconde équation de la première, ce qui me donne

$$(1)\ldots\ 2cx - c^2 = a^2 - b^2; \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c} + \tfrac{1}{2}c.$$

Or, sous cette forme, on voit, d'après ce qui a été dit (245), que pour avoir x il faut chercher une quatrième propor-

tionnelle à c, $a+b$, et $a-b$; et l'ayant trouvée, en prendre la moitié, que l'on ajoutera avec un $\frac{1}{2}c$, c'est-à-dire avec la moitié du côté AC; ce qui est absolument conforme à ce que nous avons dit (*Géom.* 303). Mais on peut tirer plusieurs autres conclusions de ces mêmes équations; nous allons en exposer quelques-unes pour accoutumer les commençans à lire dans une équation ce qu'elle renferme.

254. 1°. L'équation (1) est la même chose que..... $c(2x-c)=(a+b)(a-b)$. Or, puisque le produit des deux premiers facteurs est égal au produit des deux derniers, on peut (*) considérer les deux premiers comme les extrêmes, et les deux derniers comme les moyens d'une proportion, et l'on aura par conséquent

$$c : a+b :: a-b : 2x-c; \quad \text{or} \quad 2x-c=x-c+x;$$

donc en remettant à la place de ces lettres les lignes qu'elles représentent, on aura

$$AC : BC+AB :: BC-AB : CD-AD,$$

ce qui est précisément ce que nous avons démontré (*Géom.* 302).

255. 2°. Si du point C, comme centre, et d'un rayon égal à BC, on décrit l'arc BO, et si l'on tire la corde BO, on aura

$$\overline{BD}^2+\overline{DO}^2=\overline{BO}^2: \text{ or } DO=CO-CD=BC-CD=a-x;$$

donc $$\overline{BO}^2=yy+aa-2ax+xx;$$

mais nous avons trouvé ci-dessus,

$$yy+xx=aa; \text{ donc } \overline{BO}^2=2aa-2ax=2a(a-x).$$

(*) Dorénavant, lorsque nous aurons ainsi partagé chaque membre d'une équation en deux facteurs, nous conclurons tout de suite la proportion. Il suffit d'être averti, une fois pour toutes, que dès que deux produits sont égaux, les facteurs de l'un peuvent être considérés comme les extrêmes d'une proportion dont les facteurs de l'autre seraient les moyens. (*Arith.* 180.)

Mettant donc pour x sa valeur $\frac{aa-bb+cc}{2c}$, on aura

$$\overline{BO}^2 = 2a\left(a+\frac{b^2-a^2-c^2}{2c}\right) = \frac{a}{c}\left\{b^2-(a-c)^2\right\};$$

or (25) en considérant $a-c$ comme une seule quantité, on a

$$b^2-(a-c)^2=(b+a-c)(b-a+c);$$

donc $$\overline{BO}^2=\frac{a}{c}(b+a-c)(b-a+c),$$

qu'on peut mettre sous cette autre forme :

$$\overline{BO}^2=\frac{a}{c}(a+b+c-2c)(a+b+c-2a);$$

donc si l'on nomme $2s$ la somme des trois côtés, on aura

$$\overline{BO}^2=\frac{a}{c}(2s-2c)(2s-2a)=\frac{4a}{c}(s-c)(s-a).$$

Or, si du point C on abaisse sur OB la perpendiculaire CI, on aura (*Géom.* 295) dans le triangle rectangle CIO, cette proportion

$$CO : OI :: R : \sin OCI, \quad \text{ou} \quad a : \tfrac{1}{2}BO :: R : \sin OCI;$$

donc $$BO=\frac{2a\sin OCI}{R}, \quad \text{et} \quad \overline{BO}^2=\frac{4a^2\sin^2 OCI}{R^2};$$

égalant ces deux valeurs de $\overline{BO}^2$, on aura

$$\frac{4a^2}{R^2}\sin^2 OCI=\frac{4a}{c}(s-c)(s-a),$$

d'où l'on tire cette proportion :

$$ac : (s-c)(s-a) :: R^2 : \sin^2 OCI,$$

qui est la règle que nous avons donnée (*Géom.* 304) pour trouver les angles d'un triangle par le moyen des trois côtés, mais dont nous avons renvoyé la démonstration à cette troisième partie. En effet, ac est le produit des deux côtés qui compren-

nent l'angle BCA; $s-c$ et $s-a$ sont les deux restes que l'on a en retranchant ces deux mêmes côtés successivement de la demi-somme, R est le rayon et OCI est la moitié de l'angle BCA, puisque CI est une perpendiculaire menée du centre C sur la corde BO.

256. 3°. L'équation $yy+xx=aa$ donne

$$yy=aa-xx=(a+x)(a-x);$$

donc en mettant pour x sa valeur, on aura

$$yy=\left(a+\frac{aa-bb+cc}{2c}\right)\left(a+\frac{bb-aa-cc}{2c}\right)$$
$$=\left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\right)\times\left(\frac{b^2-(c-a)^2}{2c}\right)$$
$$=\left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right)\times\left(\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2c}\right).$$

Nommant donc $2s$ la somme des trois côtés a, b, c, on aura

$$4c^2y^2=16s(s-a)(s-b)(s-c);$$

d'où $$\tfrac{1}{2}cy=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Mais $\frac{1}{2}cy$ mesure la surface du triangle ABC; donc *pour avoir la surface d'un triangle au moyen des trois côtés, il faut de la demi-somme retrancher successivement chacun des trois côtés, multiplier les trois restes entre eux et par la demi-somme, et enfin tirer la racine carrée de ce produit.*

257. 4°. L'équation $2cx-cc=aa-bb$, donne..... $bb=aa+cc-2cx$; mais si la perpendiculaire tombait hors du triangle, on aurait, en conservant les mêmes dénominations (fig. 16),

$$yy-xx=aa, \quad \text{et} \quad yy+cc+2cx+xx=bb,$$

parce que AD qui était $c-x$, est ici $c+x$. Donc, retranchant la première équation de la seconde, on aurait

$$cc+2cx=bb-aa, \quad \text{ou} \quad c(c+2x)=(b+a)\times(b-a),$$

qui donne $$c:b+a::b-a:c+2x;$$

Or $c + 2x$ étant $x + c + x$ est CD + AD; donc

$$AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD,$$

ce qui est la seconde partie de la proposition que nous avons démontrée (*Géom.* 302).

258. 5°. La même équation $cc + 2cx = bb - aa$, donne $bb = aa + cc + 2cx$; comparant donc à l'équation..... $bb = aa + cc - 2cx$ qui convient à la figure 15, on voit que le carré bb du côté AB, opposé à l'angle aigu C, vaut moins que la somme $aa + cc$ des carrés des deux autres côtés, puisqu'il vaut cette somme diminuée de $2cx$. Au contraire, le carré bb du côté AB, opposé à l'angle obtus (fig. 16), vaut $aa + cc + 2cx$, c'est-à-dire plus que la somme des carrés des deux autres côtés. On peut donc, par ces deux remarques, lorsqu'on a à calculer les angles d'un triangle par le moyen des côtés, reconnaître si l'angle que l'on cherche doit être aigu ou obtus.

259. 6°. Les deux équations

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cx, \quad b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$$

confirment ce que nous avons dit sur les quantités négatives. Car on voit que selon que la perpendiculaire BD (fig. 15 et 16) tombe dans le triangle ou au dehors, le segment CD est de différens côtés. Or, dans ces équations, le terme $2cx$ a en effet des signes contraires : donc réciproquement, quels que soient les calculs que l'on aura faits pour l'un de ces triangles, on aura ceux qui conviennent pour les cas analogues du second, en donnant des signes contraires aux parties qui seront situées de différens côtés, sur une ligne. Or, dans ce que nous avons dit ci-dessus, tant sur le calcul de l'un des angles que sur celui de la surface, le segment CD n'y entre plus; donc ces deux propositions appartiennent indifféremment à toute espèce de triangle rectiligne. On pourrait tirer encore de ces mêmes équations plusieurs autres propositions; mais nous avons d'autres objets à envisager.

260. Quoiqu'en général on ait d'autant plus de ressources et de facilité pour mettre les questions de Géométrie en équation, que l'on connaît un grand nombre de propriétés des lignes, cependant, comme l'Algèbre elle-même fournit les moyens de trouver ces propriétés, le nombre des propositions vraiment nécessaires est assez limité. Ces deux propositions, *que les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels*, et que *dans un triangle rectangle la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse*; ces deux propositions, dis-je, sont la base de l'application de l'Algèbre à la Géométrie; mais, selon la nature des questions, il peut y avoir bien des manières de faire usage de ces deux propositions. Cet usage n'était point difficile à apercevoir dans la question que nous venons de traiter; mais dans les conséquences que nous avons tirées de la résolution pour le calcul de l'angle, par le moyen des trois côtés, l'idée de décrire l'arc BO (fig. 15) pour calculer la corde BO, et par sa moitié OI calculer le sinus de l'angle OCI, cette idée ne se présente pas d'abord. Il en est de même dans beaucoup d'autres questions. Tantôt ce sont des lignes qu'il faut prolonger jusqu'à ce qu'elles en rencontrent d'autres; tantôt des lignes qu'il faut mener parallèles à quelque autre, ou faisant un angle donné avec quelque autre. En un mot, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, ainsi qu'à toute autre matière, exige de la part de l'*analyste* un certain discernement dans le choix et l'emploi des moyens. Mais comme ce discernement s'acquiert en grande partie par l'usage, nous allons appliquer ces observations à divers exemples.

261. Proposons-nous d'abord cette question : *D'un point* A (fig. 17) *dont la situation est connue à l'égard des deux lignes* HD *et* DI *qui font entre elles un angle connu* HDI, *tirez une ligne droite* AEG *de manière que le triangle intercepté* EDG *ait une surface donnée, c'est-à-dire une surface égale à celle d'un carré connu* c^2. Du point A menons la ligne AB parallèle à DH, et la ligne AC perpendiculaire sur DG prolongée : du

point E où la ligne AEG doit couper DH, concevons la perpendiculaire EF. Si nous connaissions DF et DG, en les multipliant l'une par l'autre, et prenant la moitié du produit, nous aurions la surface du triangle EDG, laquelle devrait être égale à cc. Supposons donc $DG = x$; à l'égard de EF, voyons si nous ne pouvons pas en déterminer la valeur, tant par le moyen de x, que de ce qu'il y a de connu dans la question. Puisqu'on suppose que la situation du point A est connue, on doit regarder comme connue la distance BD à laquelle passe la parallèle AB, et la distance AC du point A à la ligne DG prolongée. Nommons donc BD, a, et AC, b; alors les triangles semblables ABG et EDG nous donnent..... BG : DG :: AG : EG; et les triangles semblables ACG, EFG nous donnent AG : EG :: AC : EF;

donc $$BG : DG :: AC : EF;$$

c'est-à-dire, $$a + x : x :: b : EF; \text{ donc } EF = \frac{bx}{a+x}$$

puis donc que la surface du triangle EDG doit être égale au carré cc, il faut que

$$EF \times \frac{DG}{2} \text{ ou } \frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc.$$

On en déduit $$x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}}.$$

De ces deux valeurs de x, celle qui a le signe — est inutile à la question présente. Pour construire la première, je la mets sous la forme suivante :

$$x = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}};$$

cela posé; ayant tiré une ligne indéfinie PQ (fig. 18), sur un point quelconque C de cette ligne, j'élève la perpendiculaire $AC = b$, et je prends sur CA et CP les lignes CO, CM, égales chacune au côté c du carré donné; ayant tiré AM,

je lui mène par le point O la parallèle ON qui me détermine CN pour la valeur de $\frac{cc}{b}$, puisque les triangles semblables ACM, OCN, donnent AC : OC :: CM : CN, c'est-à-dire $b : c :: e :$ CN; donc CN $= \frac{cc}{b}$; cela étant, la valeur de x devient donc

$$x = \text{CN} + \sqrt{(\text{CN} + 2a) \times \text{CN}};$$

or $\sqrt{(\text{CN} + 2a) \times \text{CN}}$ exprime (248) une moyenne proportionnelle entre CN et AN $+ 2a$; il ne s'agit donc plus que de déterminer cette moyenne proportionnelle et de l'ajouter à CN. Pour cet effet, sur NC prolongée, je prends CQ $= 2a$; et sur la totalité NQ je décris le demi-cercle NVQ rencontré en V par CA; je porte la corde NV de N en P, et j'ai CP pour la valeur de x; car NV (*Géom.* 112) est moyenne proportionnelle entre NC et NQ, c'est-à-dire entre CN et CN $+ 2a$; donc NV ou PN $= \sqrt{(\text{CN} + 2a) \times \text{CN}}$;

donc $\text{CP} = \text{CN} + \text{PN} = \text{CN} + \sqrt{(\text{CN} + 2a) \times \text{CN}} = x$;

on portera donc CP de D en G (fig. 17), et l'on aura le point G par lequel et par le point A tirant AG, on aura le triangle EDG égal au carré cc.

262. Si l'on veut savoir ce que signifie la seconde valeur de x, on remarquera que rien, dans la question, ne déterminant s'il s'agit plutôt de l'angle EDC (fig. 17) que de son égal E'DG', formé par le prolongement des lignes GD, ED, et les quantités données étant les mêmes pour celui-ci que pour l'autre, cette seconde solution doit être celle de la question où il s'agirait de faire dans l'angle E'DG' la même chose que nous avons faite dans l'angle EDG. En effet, en nommant DG', x, et conservant les autres dénominations, les triangles ABG', E'DG', semblables à cause des parallèles AB et DE', donnent BG' : DG' :: AG' : G'E', et en abaissant la perpendiculaire E'F', les triangles semblables ACG', E'F'G' donnent.....

AG′ : G′E′ :: AC : F′E′; donc BG′ : DG′ :: AC : F′E′, c'est-à-dire $a-x : x :: b : F'E'$; donc $F'E' = \frac{bx}{a-x}$; puis donc que la surface du triangle G′E′D doit être égale au carré cc, il faut que

$$\frac{bx}{a-x} \times \frac{1}{2}x = c^2; \text{ d'où } x = \frac{-cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{b^2} + \frac{2acc}{b}},$$

valeurs de x qui sont précisément les mêmes que celles du cas précédent, avec cette différence qu'elles ont des signes contraires, ainsi que cela doit être, puisqu'ici la quantité x est prise du côté opposé à celui où on la prenait d'abord : nouvelle confirmation de ce que nous avons déjà dit plus d'une fois, que les valeurs négatives devaient être prises dans un sens opposé à celui où l'on a pris les positives.

La construction que nous avons donnée pour le cas précédent sert aussi pour celui-ci, avec ce seul changement de porter (fig. 18) NV de N en K vers Q; alors la valeur de x qui, dans le cas précédent, était CP, sera CK dans celui-ci. En effet, la valeur de x qui convient au cas précédent, est

$$x = -\frac{c^2}{b} + \sqrt{\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}} = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \times \frac{cc}{b}},$$

c'est-à-dire $x = -CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$,

puis donc que $NV = \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$,

on a $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$.

Ainsi on portera CK de D en G′ (fig. 17), et l'on aura le point G′, par lequel et par le point A tirant AG′E′, on aura le triangle G′DE′ égal au carré cc, c'est-à-dire la seconde solution de la question.

263. Nous avons supposé que le point A (fig. 17) était au-dessus de la ligne BG; s'il était au-dessous (fig. 19), la

quantité b, ou la ligne AC, serait négative, et les deux premières valeurs de x seraient par conséquent

$$x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}},$$

ou

$$x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}},$$

où l'on voit que le problème n'est possible alors que lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, puisque, lorsqu'il est plus grand, la quantité sous le radical est négative, et par conséquent (98) les valeurs de x sont imaginaires ou absurdes. Lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, les deux valeurs de x sont négatives, c'est-à-dire qu'alors le problème est impossible à l'égard de l'angle HDI; mais il a deux solutions à l'égard de son égal E'DG'. Pour avoir ces deux solutions, il faut construire les deux valeurs

$$x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}},$$

ce que l'on fera de la manière suivante. Ayant déterminé comme ci-dessus la valeur CN de $\frac{cc}{b}$ (fig. 20), on prendra NQ $= 2a$, et ayant décrit sur NQ, comme diamètre, le demi-cercle NVQ, on lui menera la tangente CV; on portera ensuite CV de C en P vers N, et de C en K à l'opposé; alors NP et NK seront les deux valeurs de x; on les portera (fig. 19) de D en G et de D en G', et tirant par le point A et par les points G et G' les deux droites EG, et E'G', chacun des deux triangles EDG, E'DG' sera égal au carré cc. Quant à ce que nous disons que NP et NK (fig. 20) seront les deux valeurs de x, cela se tire de ce que (*Géom.* 129) CV étant moyenne proportionnelle entre CN et CQ, est égal à.....

$\sqrt{CQ \times CN}$, ou (en mettant pour ces lignes leurs valeurs),

$$CV \text{ ou } CP \text{ ou } CK = \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right)\frac{cc}{b}};$$

donc $$NP = CN - CP = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right)\frac{cc}{b}},$$

et $$NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right)\frac{cc}{b}};$$

or, ces deux quantités sont les mêmes que les valeurs de x, changeant les signes : donc ces mêmes quantités portées de D vers G (fig. 19) seront les valeurs de x.

264. Si le point A (fig. 21) était dans l'angle même HDI, alors BD tombant du côté opposé à celui où il tombait d'abord, a sera négatif, et les deux valeurs primitives de x deviendraient

$$x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}},$$

qui sont les mêmes (en changeant les signes) que celles que nous venons de construire. On voit donc qu'alors on doit construire, comme on l'a fait (fig. 20), mais porter les valeurs NP et NK de x, les porter, dis-je (fig. 21), de D vers I ; et l'on aura les deux triangles DEG, DE'G', qui satisferont de même à la question.

265. Enfin le point A (fig. 22) pourrait être situé au-dessous de BD, mais dans l'angle E'DI. Alors a et b seraient tous deux négatifs, ce qui donnerait

$$x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}},$$

qui sont précisément des signes contraires aux premières valeurs que nous avons trouvées pour x. On construira donc, comme on l'a fait (fig. 18). Alors CK sera la valeur positive de x

et CP sa valeur négative ; on portera la première (fig. 22) de D en G vers I, et l'autre à l'opposite, c'est-à-dire de D en G'.

Nous avons insisté sur les différens cas de cette solution, pour faire voir comment une seule équation les comprend tous ; comment on les déduit par le seul changement des signes ; comment les positions contraires des lignes sont désignées par la contrariété des signes, et réciproquement. Il nous reste encore à indiquer quelques usages de cette même solution.

266. *D'un point donné* A (fig. 23) *hors d'un triangle ou dans un triangle donné* DHI, *mener une ligne* AF *qui divise ce triangle en deux parties* DEF, EFIH *qui soient entre elles dans le rapport connu de* m *à* n. La solution de cette question est comprise dans la précédente ; car puisque le triangle DHI est donné, et que l'on sait quelle partie le triangle DEF doit être du triangle DHI, si l'on cherche le quatrième terme de cette proportion $m+n:m::$ la surface du triangle DHI est à un quatrième terme, ce quatrième terme sera la surface que doit avoir le triangle DEF. Or on peut toujours trouver un carré cc égal à cette surface (248) ; la question est donc réduite à mener par le point A une ligne EAF qui comprenne, avec les deux côtés DH, DI, un triangle DEF égal au carré cc, c'est-à-dire est réduite à la question précédente.

267. On voit encore qu'on ramenerait à la même question celle de partager une figure rectiligne quelconque (fig. 24) par une ligne tirée d'un point quelconque A, en deux parties BCFE, EFDHK, qui fussent entre elles dans un rapport donné. En effet, la figure BCDHK étant supposée connue, on connaît tous ses angles et tous ses côtés ; on connaîtra donc facilement le triangle BLC formé par les deux côtés KB et DC prolongés, puisqu'on connaît dans ce triangle le côté BC et les deux angles LBC, LCB, supplémens des angles connus CBK et BCD ; ainsi on doit regarder la surface du triangle LBC comme connue, et puisque celle de EBCF doit

être une proportion déterminée de la surface totale, elle est donc connue aussi; la question est donc réduite à mener une ligne EAF qui forme, dans l'angle KLD, un triangle égal à un carré connu. Enfin, on voit par là comment on partagerait cette figure en un plus grand nombre de parties dont les rapports seraient donnés.

268. Une remarque qu'il est encore à propos de faire, et que nous allons confirmer par d'autres exemples, c'est que, si quelques-unes des quantités données qui entrent dans l'équation qui sert à résoudre une question, sont telles, qu'en changeant leurs signes en signes contraires, l'équation ne change point; ou si un changement de position dans la ligne ou les lignes cherchées de la figure n'entraîne aucun changement de position ni de grandeur dans les lignes données, alors, parmi les différentes valeurs de x, lorsqu'il y en a plusieurs dans l'équation, on en trouvera toujours une qui sera la solution propre pour le cas qu'indique ce changement. Par exemple, dans la question que nous venons de traiter, on a vu que l'une des valeurs de x donnait directement la solution pour le cas où la ligne AEG (fig. 17) devait traverser l'angle HDI, ainsi qu'on l'a supposé en faisant le calcul; mais on a vu en même temps que la seconde valeur de x donnait la solution pour le cas où il s'agirait, non pas de l'angle HDI, mais de son opposé au sommet. La raison en est qu'ayant, dans chaque cas, les mêmes quantités données à employer, et les mêmes raisonnemens à faire, on ne peut être conduit qu'à la même équation; donc la même équation doit donner les deux solutions. Nous allons en voir encore des exemples en parcourant d'autres questions.

269. Proposons-nous cette question : *D'un point donné* A, *hors d'un cercle* BDC (fig. 25), *tirer une ligne droite* AE, *de manière que sa partie*.DE *interceptée dans le cercle soit égale à une ligne donnée.* Puisque le cercle BDEC est donné, son diamètre est censé connu; et puisque le point A est donné, si l'on tire par le centre O la droite AOC, on connaîtra la

distance AB, et par conséquent la ligne AC. Pour savoir comment on doit tirer la ligne AE, il ne s'agit que de trouver une valeur de AD telle, que son prolongement DE soit égal à la ligne donnée. Je nomme donc AD, x; la ligne connue AB, a; la ligne connue AC, b; enfin je nomme c la ligne donnée à laquelle DE doit être égale. Cela posé, puisque la figure BDEC est un cercle, les sécantes AC, AE, doivent (*Géom.* 127) être réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures; on doit donc avoir AC : AE :: AD : AB, c'est-à-dire, en vertu des dénominations précédentes,

$$b : (x + c) :: x : a; \quad \text{d'où } x = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}.$$

De ces deux valeurs, la première satisfait seule à la question actuelle. Pour achever la solution, il faut construire cette quantité, ce qu'on peut faire sans employer les transformations enseignées (245). Pour cet effet, on tirera du point A la tangente AT qui, étant moyenne proportionnelle entre AB et AC (*Géom.* 129), donnera $\overline{AT}^2 = AB \times AC$; la valeur de x deviendra donc

$$x = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + \overline{AT}^2};$$

tirons le rayon TO, il sera perpendiculaire à AT (*Géom.* 48); si donc on prend $TI = \frac{1}{2}c$, alors en tirant AI on aura..... $AI = \sqrt{\frac{1}{4}cc + \overline{AT}^2}$; donc pour avoir x, il ne s'agit plus que de porter TI de I en R, et de décrire du point A, comme centre, et du rayon AR, l'arc RD qui déterminera le point cherché D; car AD ou AR sera égal à

$$AI - IR = AI - TI = \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + \overline{AT}^2} - \tfrac{1}{2}c = x.$$

Pour connaître maintenant ce que signifie la seconde valeur de x, il faut remarquer que puisqu'elle est toute négative, elle ne peut tomber que du côté opposé à celui vers lequel tend AD. Voyons donc s'il y a quelque question dépendante des mêmes quantités et des mêmes raisonnemens, et qui ait rapport à ce côté. Or, je remarque que si l'on suppose a et b

négatifs, l'équation $xx + cx = ab$ ne change en aucune manière; donc puisqu'alors le cercle BDEC deviendrait B D'E'C' situé vers la gauche de la même manière que le premier l'est vers la droite, il s'ensuit que cette même équation renferme aussi la solution qui appartiendrait à ce cas; la seconde valeur de x appartient donc à ce même cas, et satisfait à la même condition; c'est pourquoi si dans la construction précédente on porte IT de I en R', sur AI prolongé, et qu'ensuite du point A, comme centre, et d'un rayon égal à AR', on décrive un arc qui coupe, en E', la circonférence B'D'E'C', le point E' sera tel, que la partie interceptée E'D, sera égale à c. En effet, AE' étant égal à AR' = AI + IR', vaudra $\sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \overline{AT}^2} + \frac{1}{2}c$, c'est-à-dire sera égal à la seconde valeur de x en y changeant les signes; or, puisqu'on porte cette quantité du côté opposé à celui vers lequel on a supposé que tendait x, il s'ensuit que AE' est véritablement la seconde valeur de x. Au reste, comme les deux cercles sont égaux et situés de la même manière, les deux solutions peuvent appartenir toutes deux au même cercle, en sorte que si l'on décrit du point A, comme centre, et du rayon AR', l'arc R'E, la ligne AE, résoudra aussi la question; en effet, il est aisé de voir que le point E, déterminé de cette manière, est sur le prolongement de la ligne AD déterminée par la première construction. Mais des deux solutions distinctes que fournit l'Algèbre, la première tombe à la droite du point A, et appartient au point D de la circonférence convexe; la seconde tombe à la gauche, et appartient au point E' de la circonférence concave. On voit par là se confirmer de plus en plus que les quantités négatives doivent être portées de côtés opposés, et réciproquement.

270. Supposons maintenant qu'il s'agisse de *trouver sur la direction de la ligne donnée* AB (fig. 26) *un point* C, *tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la ligne entière* AB. Je nommerai a la ligne donnée AB, et x la distance cherchée AC; alors

BC sera $a - x$; et puisque, par hypothèse, AB : AC :: AC : CB, ou $a : x :: x : a - x$, il faut que

$$x^2 = a(a-x), \quad \text{d'où} \quad x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2}.$$

Pour construire la première valeur de x, il faut, selon ce qui a été enseigné (248), élever au point B la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$; et ayant tiré AD, on aura

$$AD = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + aa}.$$

Il ne s'agit donc plus que de retrancher de cette ligne la quantité $\frac{1}{2}a$; ce qui se fera en portant BD de D en O; alors AO vaudra $\sqrt{\frac{1}{4}aa + aa} - \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire sera égale à x; on portera donc AO de A en C vers B, et le point C où elle aboutira sera le point cherché.

Quant à la seconde valeur de x, si l'on porte BD de D en O′, sur le prolongement de AD, alors AO′ vaudra..... $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + aa}$; puis donc que la valeur de x est cette même quantité, prise négativement, on portera AO′ de A en C′ sur AB prolongée du côté opposé à celui vers lequel on a supposé, dans la solution, que x tendait, et l'on aura un second point C′ qui jouira aussi de cette propriété que sa distance au point A sera moyenne proportionnelle entre sa distance au point B et la ligne AB.

Remarquons, en passant, que cette question renferme celle de *couper une ligne donnée* AB *en moyenne et extrême raison:* aussi la construction que nous venons d'en donner est-elle la même que celle que nous avons prescrite (*Géom.* 130). Mais on voit que l'Algèbre nous conduit à trouver cette construction, au lieu qu'en Géométrie nous la supposions déjà découverte, et nous en démontrions seulement la légitimité.

271. Si l'on fait un peu d'attention sur la marche que nous avons suivie dans les questions précédentes, on verra que nous avons toujours pris pour l'inconnue une ligne qui, étant une fois connue, servirait à déterminer toutes les autres, en se conformant aux conditions de la question. C'est ce qu'on doit toujours observer; mais il y a encore un choix à faire pour

se déterminer sur cette ligne : il y en a souvent plusieurs dont chacune aurait également la propriété de déterminer toutes les autres si une fois elle était connue ; or, parmi celles-là, il en est qui conduiraient à des équations plus composées les unes que les autres. Pour aider à se déterminer dans ces cas, nous placerons ici la règle suivante.

272. *Si parmi les lignes ou les quantités qui, étant prises chacune pour l'inconnue, pourraient servir à déterminer toutes les autres quantités, il s'en trouve deux qui y servent de la même manière, en sorte qu'on prévoie que l'une ou l'autre conduirait à la même équation* (*aux signes* + *ou* − *près*) ; *alors on fera bien de n'employer ni l'une ni l'autre, mais de prendre pour inconnue une autre quantité qui dépende également de l'une ou de l'autre de ces deux-là* ; par exemple, de prendre pour inconnue leur demi-somme, ou leur demi-différence, ou une moyenne proportionnelle entre elles, ou etc. On arrivera toujours à une équation plus simple qu'en cherchant l'une ou l'autre. La question que nous avons résolue (269) peut nous en fournir un exemple. Rien dans cette question ne déterminait à prendre AD (fig. 25) pour inconnue, plutôt que AE ; en prenant AD pour l'inconnue x, on avait $x + c$ pour AE ; et en regardant AE comme l'inconnue x, on aurait eu $x - c$ pour AD, et du reste le calcul est le même dans chaque cas, en sorte que l'équation ne différera que par les signes. C'est pourquoi si, au lieu de prendre aucune des deux pour l'inconnue, je prends leur demi-somme, et que je la nomme $2x$; comme leur différence DE est donnée par les conditions de la question, et est c, on aura (*Géom.* 301) $AE = x + \frac{1}{2}c$, et $AD = x - \frac{1}{2}c$; et en employant le même principe que celui dont nous avons fait usage dans la première solution, nous aurons

$$(x + \tfrac{1}{2}c)(x - \tfrac{1}{2}c) = ab \text{ ; d'où } x = \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab}.$$

Il est aisé d'en conclure

$$AE = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + ab}, \quad AD = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc + ab}$$

comme ci dessus (269).

La question suivante nous fournira plusieurs exemples de l'application du même principe.

273. *D'un point* D (fig. 27) *situé dans l'angle droit* IAE, *et également éloigné des deux côtés* IA *et* AE, *mener une ligne droite* DB, *de manière que la partie* CB *comprise dans l'angle droit*, EAB *soit égale à une ligne donnée*. Ayant abaissé les perpendiculaires DE, DI, je puis indifféremment prendre pour inconnue CE ou AB, AC ou IB, CD ou DB. Si je prends, par exemple, CE pour l'inconnue, alors faisant CE $= x$, et désignant par a chacune des deux lignes égales DE, DI, qui sont censées connues; nommant de plus c la ligne donnée à laquelle BC doit être égale, j'aurai..... AC $=$ AE $-$ CE $= a - x$; et les triangles semblables DEC, CAB me donneront AB par cette proportion,

CE : DE :: AC : AB, ou $x : a :: a - x :$ AB. Donc AB $= \frac{a^2 - ax}{x}$.

Or, par la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164), on a $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$: substituant, au lieu de ces lignes, leurs valeurs algébriques, on trouvera

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2c^2x + a^4 = 0;$$

équation du quatrième degré, mais qui n'est pas, à beaucoup près, la plus simple qu'on puisse employer pour résoudre cette question. En effet, si au lieu de prendre CE pour inconnue, nous prenions IB, alors faisant IB $= x$, et imitant la solution précédente, on aurait une équation qui ne différerait de celle qu'on vient de trouver, qu'en ce qu'au lieu de $a - x$ on aurait $x - a$; c'est-à-dire qui serait absolument la même, puisque ces quantités y sont au carré. Celle où l'on prendrait AB pour inconnue ne différerait que par les signes de celle qui résulterait de AC $= x$. De même, à l'égard de DB et de DC, l'équation où l'une sera prise pour inconnue ne différera que par les signes de celle où l'inconnue serait l'autre ligne : il faut donc les rejeter toutes. Mais si nous prenons, pour inconnue, la somme des deux lignes DB et DC, et si nous représentons cette somme par $2x$, alors

(*Géom.* 301) nous aurons $DB = x + \frac{1}{2}c$, et $DC = x - \frac{1}{2}c$; or, les parallèles DI et CA nous donnent, pour trouver AB et AC, les deux proportions suivantes :

$$DC : CB :: IA \text{ ou } DE : AB, \text{ et } DB : CB :: DI : AC;$$

c'est-à-dire,

$$x - \tfrac{1}{2}c : c :: a : AB, \text{ et } x + \tfrac{1}{2}c : c :: a : AC;$$

donc $$AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c} \text{ et } AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c};$$

donc, puisque le triangle rectangle CAB donne..... $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, on aura

$$\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc;$$

d'où (1)... $x^4 - (\frac{1}{2}c^2 + 2a^2)x^2 = \frac{1}{8}a^2c^2 - \frac{1}{16}c^4$;

équation du quatrième degré, à la vérité, mais plus facile à résoudre que la précédente, puisque (192) on la traite à la manière de celle du second degré. Elle donne

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{8}cc + aa \pm a\sqrt{cc + aa}}.$$

Des quatre valeurs de x que donne la double combinaison des deux signes $\pm$, il n'y en a qu'une qui appartienne à la question telle qu'elle a été proposée, et cette valeur est

$$x = +\sqrt{\tfrac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{cc + aa}}.$$

La valeur $x = +\sqrt{\tfrac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{cc + aa}}$,

résout la question pour le cas où l'on demanderait que la ligne CB fût, dans l'angle CAB, à gauche (fig. 28); et alors x représente, non pas la demi-somme, mais la demi-différence des deux lignes BD et DC; c'est ce dont il est facile de se convaincre en nommant $2x$ cette différence, et résolvant le problème de la même manière que ci-dessus; car on aura $DB = \frac{1}{2}c + x$, $CD = \frac{1}{2}c - x$; et les parallèles DI et

CA donneront DB : CB :: DI : CA, et DC : CB :: AI : AB, ou $\frac{1}{2}c + x : c :: a : CA$, et $\frac{1}{2}c - x : c :: a : AB$; donc

$$\therefore CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x} \text{ et } AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x};$$

donc à cause du triangle rectangle CAB, on aura

$$\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2,$$

ou $$x^4 - (\tfrac{1}{2}c^2 + 2aa)\,x^2 = \tfrac{1}{2}\,aacc - \tfrac{1}{16}c^4,$$

équation qui est absolument la même que celle que nous venons de trouver pour la somme des deux lignes BD et DC (fig. 27). Donc la même équation satisfaisant aux deux cas, l'une des racines doit donner la somme, et une autre doit donner la différence; or il est facile de voir que les deux que l'on doit prendre sont celles que nous venons d'indiquer, puisque les deux autres racines étant négatives, ne peuvent appartenir qu'à des cas tout opposés à ceux qu'on a considérés dans chaque résolution.

Quant à ces deux autres racines, pour trouver à quels cas elles appartiennent, il faut observer que rien ne détermine dans la question présente, ou du moins dans l'équation, si le point D (fig 27) est, comme on l'a supposé d'abord, au-dessous de AI et à gauche de AE, ou s'il est, au contraire, au-dessus de la première et à droite de la seconde, comme on le voit ici à l'égard de A′ I′ et de A′ E′ : or, dans ce cas, la quantité a tombant de côtés opposés à ceux où elle tombait d'abord, est négative; donc on aura la solution qui convient à ce cas, si l'on met $-a'$ au lieu de $+a$ dans l'équation (1); mais comme cette équation ne change pas alors, il s'ensuit que cette même équation doit aussi résoudre ces deux nouveaux cas; donc les deux autres valeurs de x sont, l'une la demi-somme des deux lignes DB′ et DC′ (fig. 27), et l'autre leur demi-différence (fig. 28). On voit en effet que dans cette nouvelle position les points B et C tombent de côtés opposés à ceux où ils tombaient

d'abord, et que par conséquent la somme et la différence des deux lignes DB′ et DC′ doivent être négatives, comme l'équation les donne en effet. Pour construire la solution qu'on vient de trouver, on prendra sur EA prolongée (fig. 27 et 28), la partie $AN = c$, et ayant tiré IN, on portera cette dernière sur DI prolongée de I en K : sur DK, comme diamètre, on décrira le demi-cercle KLD rencontré en L par AI prolongée. Du milieu H de AN on tirera IH que l'on portera de I en M (fig. 27), et on aura LM pour la première valeur de x; mais, dans la figure 28, on décrira du point L, comme centre, et d'un rayon égal à HI, un petit arc qui coupe IK en M, et IM sera la seconde valeur de x; et puisqu'on a..... $BD = x + \frac{1}{2}c$, on aura

$BD = LM + AH$ (fig. 27), et $BD = IM + AH$ (fig. 28);

ainsi il n'y aura plus qu'à décrire du point D, comme centre, et du rayon BD qu'on vient de déterminer, un arc qui coupe IA prolongée en quelque point B; la droite DB sera telle qu'on la demande. En effet, le triangle rectangle IAN (fig. 27 et 28) donne

$$\text{IN ou IK} = \sqrt{\overline{IA}^2 + \overline{AN}^2} = \sqrt{aa + cc};$$

et puisque LI est moyenne proportionnelle entre DI et IK, on a

$$\overline{IL}^2 = DI \times IK = a\sqrt{aa + cc};$$

or le triangle rectangle IAH donne

$$\text{IH ou MI} = \sqrt{\overline{IA}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc},$$

et le triangle rectangle LIM donne

$$LM = \sqrt{\overline{MI}^2 + \overline{IL}^2} = \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc + a\sqrt{aa+cc}} = x \text{ (fig. 27)};$$

$$IM = \sqrt{\overline{LM}^2 - \overline{IL}^2} = \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc - a\sqrt{aa+cc}} = x \text{ (fig. 28)}.$$

Il faut remarquer, au sujet de cette dernière valeur, que la construction que nous venons d'en donner suppose que HI (fig. 28) est plus grand que IL, ou tout au plus égal. S'il

était plus petit, la question serait impossible pour ce dernier cas; c'est ce que fait voir l'Algèbre. Dans ce cas, la valeur

$$x = \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc - a\sqrt{aa + cc}}.$$

Si $aa + \frac{1}{4}cc$, qui est $\overline{IH}^2$, est plus petit que $a\sqrt{aa + cc}$, qui est $\overline{IL}^2$, la quantité que couvre le radical supérieur sera négative, et par conséquent la valeur de x sera imaginaire.

En prenant pour inconnue, la somme des deux lignes DB et DC (fig. 27) ou leur différence (fig. 28), nous sommes arrivés à une équation plus simple qu'en prenant CE avec AC, ou AB avec IB, parce que la relation des lignes DB et DC aux lignes IB et AB est semblable à celles que les mêmes lignes BD et CD ont avec les lignes AC et EC, c'est-à-dire qu'elles peuvent être déterminées par des opérations semblables, en employant IB et AB, ou AC et CE. En général, comme l'équation doit renfermer tous les différens rapports que la quantité cherchée peut avoir avec celles dont elle dépend, cette équation sera toujours d'autant plus simple, que la quantité qu'on choisira pour inconnue aura moins de rapports différens avec les autres; en voici un exemple bien sensible dans cette solution de la même question.

274. Puisque l'angle CAB (fig. 29) est droit, si l'on conçoit que sur CB, comme diamètre, on décrive un cercle, il passera par le point A; tirons la ligne DA qui, prolongée, rencontre la circonférence en M; alors il est aisé de voir que puisque les lignes DI et DE sont égales, l'angle DAI, ou son égal BAM, sera de 45 degrés; et puisque ce dernier a pour mesure la moitié de l'arc MB (*Géom.* 63), cet arc BM sera donc de 90°; donc si l'on tire le rayon LM, le triangle..... DLM sera rectangle, et par conséquent, en abaissant sur DM la perpendiculaire LN, le côté LM (*Géom.* 112) sera moyen proportionnel entre DM et MN, ou entre DM et AN, puisque la perpendiculaire LN rend AN = NM (*Géom.* 52). De là il est aisé d'avoir une solution très simple, en pre-

nant AN pour inconnue. Représentons par x cette ligne AN, et nommons d la ligne DA qui est censée connue; alors DM sera $d+2x$, et puisqu'on a, selon ce qui vient d'être remarqué, DM : LM :: LM : MN, on aura $d+2x : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, et par conséquent

$$dx+2x^2=\tfrac{1}{4}c^2, \quad \text{d'où } x=-\tfrac{1}{4}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}dd+\tfrac{1}{8}cc}.$$

Pour construire cette quantité, je l'écris ainsi,

$$x=-\tfrac{1}{4}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}dd+\tfrac{1}{16}cc+\tfrac{1}{16}cc}.$$

Je prends sur les côtés Ao, AI, de l'angle droit IAo, les parties Am, An, égales chacune à $\frac{1}{4}e$, et achevant le carré Ampn je tire la diagonale Ap qui sera perpendiculaire à DA, et égale à $\sqrt{\frac{1}{16}cc+\frac{1}{16}cc}$; je prends sur AD la partie Ar égale à $\frac{1}{4}d$ ou $\frac{1}{4}$ AD, et tirant pr, j'ai

$$pr=\sqrt{\overline{\mathrm{A}r}^2+\overline{\mathrm{A}p}^2}=\sqrt{\tfrac{1}{16}dd+\tfrac{1}{16}cc+\tfrac{1}{16}cc}.$$

Il ne s'agit donc plus, pour avoir la première valeur de x, que de retrancher de pr la quantité $\frac{1}{4}d$, ce qui se fera en décrivant du point r, comme centre, et du rayon rp, un arc qui coupe DM en N, e qui donne AN pour la première valeur de x; en sorte qu'élevant au point N la perpendiculaire NL que l'on coupera en L par un arc décrit du point A, comme centre, et du rayon $\frac{1}{2}c$, on aura le point L par lequel et par le point D tirant DCB, on aura la solution.

Quand à la seconde valeur de x, savoir

$$x=-\tfrac{1}{4}d-\sqrt{\tfrac{1}{16}dd+\tfrac{1}{16}c^2+\tfrac{1}{16}c^2},$$

on l'aura en portant rp de r en N'; car alors AN' étant égale à Ar + rN', vaudra $\frac{1}{4}d+\sqrt{\frac{1}{16}dd+\frac{1}{16}c^2+\frac{1}{16}c^2}$, c'est-à-dire sera égale à la seconde valeur de x, en changeant les signes; et comme elle tombe du côté opposé à la première, elle sera, eu égard à tout, la véritable valeur de x dans ce second cas. On élevera donc aussi au point N' la perpendiculaire N'L', que l'on coupera en L' par un arc décrit pa-

reillement du point A, comme centre, et du rayon égal à $\frac{1}{2}c$; alors tirant par le point L′ et par le point D la droite B′L′D, on aura la seconde solution dont la question peut être susceptible : c'est ce dont il est aisé de se convaincre en jetant les yeux sur la figure 30 et y appliquant, mot à mot, ce que nous avons dit de la figure 29 au commencement de cette solution; on verra qu'en nommant AN ou MN, x, et conservant les autres dénominations, on aura

$$\text{DM} : \text{ML} :: \text{ML} : \text{MN}, \text{ ou } 2x - d : \tfrac{1}{2}c :: \tfrac{1}{2}c : x;$$

d'où l'on tire

$$x = \tfrac{1}{4}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{16}dd + \tfrac{1}{16}cc + \tfrac{1}{16}cc},$$

dont une des valeurs est précisément la même que celle dont il s'agit; les signes seulement sont différens, ainsi que cela doit être. Mais il se présente ici une remarque importante à faire. Il peut arriver que l'arc que l'on voudra décrire du point A (*fig.* 29), comme centre, et du rayon $\frac{1}{2}c$, ne rencontre pas la perpendiculaire N′ L′, parce que la quantité $\frac{1}{2}c$ peut être plus petite que AN′. Or nous avons dit que lorsque les questions du second degré étaient impossibles, l'Algèbre le faisait connaître; cependant, dans l'équation

$$x = \tfrac{1}{4}d - \sqrt{\tfrac{1}{16}dd + \tfrac{1}{16}c^2 + \tfrac{1}{16}c^2}$$

rien ne manifeste dans quel cas cette impossibilité a lieu; car tout est nécessairement positif sous le radical. Voici la solution de cette difficulté. Il est incontestable que lorsqu'une question, exprimée algébriquement, sera impossible, l'Algèbre manifestera cette impossibilité; mais il faut bien faire attention que ce sera lorsqu'on aura exprimé, par cette même Algèbre, tout ce que la question suppose, soit explicitement, soit implicitement; c'est précisément ce qui n'a pas lieu ici. En effet, la question suppose tacitement que les trois points D, A, L, ne sont pas sur une même ligne droite, et c'est ce que nous n'avons point exprimé algébriquement; nous avons exprimé que LM était moyenne proportionnelle entre DM et NM, propriété qui appartient, à la vérité, au

triangle rectangle, mais qui peut avoir lieu aussi lorsque les trois points D, A, L, sont supposés en ligne droite. En effet, il est évident qu'on peut se proposer cette question : *trouver sur la direction* DL (fig. 31) *quel intervalle il faudrait laisser entre les deux droites* DA *et* ML, *de grandeurs connues, pour que* ML *soit moyenne proportionnelle entre* DM *et* MN, *le point* N *étant le milieu de* AM. Or, cette question conduit (comme il est facile de s'en assurer) précisément à la même équation que ci-dessus, et cette équation donne deux solutions, l'une pour le cas où les deux points A et M sont entre D et L, l'autre pour le cas contraire. Il n'est donc pas étonnant que lorsque la première question devient impossible (du moins dans un de ses cas), l'Algèbre n'en dise rien, puisqu'elle doit donner la solution de cette seconde question qui est toujours possible.

275. Cette réflexion nous porte donc à distinguer deux sortes de questions, savoir, les questions *concrètes* et les questions *abstraites*. Par les premières on doit entendre les questions de la nature de l'avant-dernière, où ce que l'on cherche est spécifié ou particularisé par quelque condition, quelque propriété, ou quelque construction particulière que l'équation n'exprime point. Les questions abstraites, au contraire, seront celles où les quantités sont considérées uniquement comme quantités, et où l'équation exprime tout ce que la question renferme, comme dans la dernière question. Celles-ci peuvent toujours avoir autant de solutions, soit positives, soit négatives, que l'équation a de solutions réelles; au lieu que le nombre des solutions d'une question concrète est souvent moindre que le nombre des solutions, même positives, de l'équation; la question suivante, qui est de cette dernière espèce, nous en fournira un exemple.

276. Supposons que ABED (fig. 32) représente une sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABE autour du diamètre AE. Le secteur ABC, dans ce mouvement, engendre un secteur sphérique qui est composé d'un segment sphérique engendré par la rotation du demi-segment ABP,

et d'un cône engendré par le triangle rectangle BPC. Supposons qu'on demande en quel endroit le segment sphérique et le cône seront égaux entre eux. Pour résoudre cette question, il faut se rappeler (*Géom.* 247) que le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte BAD par le tiers du rayon AC. Or, la surface de la calotte (*Géom.* 225) se trouve en multipliant la circonférence ABED par la hauteur AP de cette calotte. Donc si on représente par le rapport de $\frac{r}{c}$, celui du rayon d'un cercle à sa circonférence, et si l'on nomme AC, a; AP, x; on aura la circonférence ABDE par cette proportion..... $r : c :: a :$ ABDE, qui sera donc $\frac{ca}{r}$; donc la surface de la calotte sera $\frac{cax}{r}$, et par conséquent la solidité du secteur sera $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ ou $\frac{caax}{3r}$. Pour avoir la solidité du cône, il faut multiplier la surface du cercle qui lui sert de base, c'est-à-dire la surface du cercle qui a pour rayon BP, par le tiers de la hauteur CP : or puisque

$$P = CA - AP = a - x, \text{ et que } CB = a,$$

on aura dans le triangle rectangle BPC,

$$BP = \sqrt{\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{PC}^2} = \sqrt{a^2 - (a-x)^2} = \sqrt{2ax - x^2}.$$

Mais pour avoir la surface du cercle qui a pour rayon BP, il faut multiplier sa circonférence par la moitié du rayon; et pour avoir cette circonférence, il faut calculer le quatrième terme de cette proportion $r : c :: \sqrt{2ax - xx}$ est à un quatrième terme qui sera $\frac{c\sqrt{2ax - xx}}{r}$; multipliant donc par la moitié du rayon $\sqrt{2ax - xx}$, on aura $\frac{c(2ax - xx)}{2r}$ pour la surface de la base du cône; en multipliant cette surface par le tiers de la hauteur CP, c'est-à-dire par $\frac{a-x}{3}$, on

aura $\frac{c(2ax-xx)}{2r} \times \frac{a-x}{3}$ pour la solidité du cône ; or pour que le cône soit égal au segment, il faut que le secteur, qui est la somme des deux, soit double de l'un ou de l'autre ; il faut donc que

$$\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax-xx}{2r} \times \frac{a-x}{3}.$$

On en déduit $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{3}{4}aa}$;

or de ces deux solutions il n'y a que $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{3}{4}aa}$ qui puisse satisfaire, puisque $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{3}{4}aa}$ valant plus que $2a$, c'est-à-dire plus que le diamètre, la solution qu'elle indique ne peut convenir à la sphère. Si l'on veut construire la solution $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{3}{4}aa}$, on lui donnera cette forme $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}aa - aa}$; et ayant pris $AM = \frac{3}{2}a$, on décrira sur AM, comme diamètre, le demi-cercle AOM, et ayant inscrit la corde AO égale à a, on tirera OM que l'on portera de M en P vers A ; le point P, où elle aboutira, déterminera la hauteur AP ou x. En effet, à cause du triangle rectangle AOM, on a

$$OM \text{ ou } PM = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{\frac{9}{4}aa - aa} ;$$

donc $$AP = AM - PM = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}aa - aa} = x.$$

Quant à la seconde solution $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{3}{4}aa}$, elle n'appartient point, ainsi que nous venons de le dire, à la question présente ; mais elle appartient, ainsi que la première, à cette autre question abstraite que fournit la lecture de l'équation

$$xx - 3ax = -aa, \text{ ou } 3ax - xx = aa.$$

La ligne connue AN (fig. 33) *étant partagée en trois parties égales aux points* B *et* D, *trouver sur la direction de cette ligne un point* P, *tel que la partie* AD *soit moyenne proportionnelle entre les distances du point* P *aux extrémités* A *et* N. En effet, si l'on nomme a le tiers AD de la ligne connue

AN, et AP, x; on aura PN $= 3a - x$; et les conditions de la question donnent

$$x : a :: a : 3a - x; \text{ d'où } x = \tfrac{3}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}aa},$$

comme ci-dessus : on les aura toutes deux aussi par la même construction, excepté que, pour la seconde, c'est-à-dire pour $x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, on portera MO de M en P′ vers N, et alors AP et AP′ seront les deux valeurs de x.

Autres applications de l'Algèbre à divers objets.

277. Pour résoudre la dernière question, nous avons été obligés de calculer l'expression algébrique d'un secteur sphérique et du cône qui en fait partie. Les corps que nous avons considérés en Géométrie reviennent souvent dans plusieurs questions, et principalement dans les questions physico-mathématiques, parce qu'ils sont les élémens de tous les autres. Il est donc à propos de se familiariser avec les expressions algébriques, soit de leurs totalités, soit de leurs parties. Outre que cela sera utile dans la quatrième partie de ce Cours, cela nous fournira encore l'occasion de faire voir l'utilité de l'Algèbre pour la comparaison des corps et pour la mesure de ceux qu'on peut y rapporter. Si l'on représente en général par $\frac{r}{c}$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle [rapport que l'on connaît avec une exactitude plus que suffisante (*Géom.* 152) pour la pratique], alors la circonférence de tout autre cercle dont le rayon serait a, sera $\frac{ca}{r}$, et sa surface $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2}a$, ou $\frac{ca^2}{2r}$. On voit par là que les surfaces des cercles croissent comme les carrés de leurs rayons; car $\frac{c}{2r}$ étant toujours de même valeur, la quantité $\frac{ca^2}{2r}$ ne croît qu'à proportion de ce que croît a^2.

Si h est la hauteur d'un cylindre dont le rayon de la base

est a, on aura (*Géom.* 237) $\frac{ca^2}{2r} \times h$ pour sa solidité; par la même raison, on aura $\frac{ca'^2}{2r} \times h'$, pour la solidité d'un autre cylindre dont la hauteur serait h', et dont le rayon de la base serait a'; en sorte que les solidités de ces deux cylindres seront entre elles :: $\frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{ca'^2}{2r} \times h'$, ou :: $a^2h : a'^2h'$, en supprimant le facteur commun $\frac{c}{2r}$; c'est-à-dire que les solidités des cylindres sont comme les produits de leurs hauteurs par les carrés des rayons de leurs bases. Si les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases, alors on a $h : h' :: a : a'$, et par conséquent $h' = \frac{ha'}{a}$; et le rapport $a^2h : a'^2h$ devient $a^2h : \frac{a'^3h}{a}$, ou en supprimant le facteur commun h, et multipliant par a les deux termes du rapport, il devient $a^3 : a'^3$, c'est-à-dire qu'alors les solidités sont comme les cubes des rayons des bases.

En général, les surfaces, comme nous l'avons vu en Géométrie, dépendent du produit de deux dimensions, et les volumes, du produit de trois dimensions; ainsi si chaque dimension de l'un des deux solides ou de deux surfaces que l'on compare, est à chaque dimension de l'autre, dans le même rapport, ces deux surfaces seront entre elles comme les carrés, et ces deux solides seront comme les cubes de deux dimensions homologues; et plus généralement encore, si deux quantités quelconques de même nature sont exprimées par le produit de tant de facteurs qu'on voudra, et si chaque facteur de l'une est à chaque facteur de l'autre dans un même rapport, ces deux quantités seront entre elles comme un facteur homologue de chacune, élevé à une puissance d'un degré égal au nombre de ces facteurs. Par exemple, si une quantité est exprimée par $abcd$ et une autre par $a'b'c'd'$, auquel cas ces deux quantités sont l'une à l'autre.....

$:: abcd : a'b'c'd'$; alors si l'on a $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on tirera des proportions que donnent ces rapports..... $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, et par conséquent le rapport $abcd : a'b'c'd'$ deviendra $abcd : \frac{a'^4bcd}{a^3}$, ou $a : \frac{a'^4}{a^3}$, ou $a^4 : a'^4$. La même chose aurait lieu, quand même ces quantités ne seraient pas exprimées par des monomes; si, par exemple, elles étaient exprimées l'une par $ab^2 + cd$, et l'autre par $a'b' + c'd'$, dans le cas où les dimensions de la première seront proportionnelles aux dimensions de la seconde, ces quantités seront l'une à l'autre $:: a^2 : a'^2$; en effet, puisqu'on suppose que

$$a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d',$$

on aura $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$,

et par conséquent le rapport $ab + cd : a'b' + c'd'$ deviendra

$$ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}, \text{ ou } ab + cd : \frac{a'^2ab + a'^2cd}{a^2},$$

ou $a^2(ab + cd) : a'^2(ab + cd)$, ou $a^2 : a'^2$.

Cette dernière observation démontre d'une manière générale, que les surfaces des figures semblables sont comme les carrés de deux de leurs dimensions homologues, et les solidités des solides semblables, comme les cubes : car quelles que soient ces figures ou ces solides, les premières peuvent toujours être considérées comme composées de triangles semblables dont les hauteurs et les bases sont proportionnelles dans chaque figure; et les derniers peuvent être considérés comme composés de pyramides semblables dont les trois dimensions sont aussi proportionnelles. On voit par là comment on peut comparer facilement les quantités, lorsqu'on en a l'expression algébrique, et cela, soit que ces quantités soient de même espèce ou d'espèce différente, comme un cône et une sphère, un prisme et un cylindre, pourvu seu-

lement qu'elles soient de même nature, c'est-à-dire ou toutes deux des solides, ou toutes deux des surfaces.

278. Nous avons dit (*Géom.* 243) comment on devrait s'y prendre pour avoir la solidité d'une pyramide tronquée ou d'un cône tronqué. Si donc on nomme h la hauteur de la pyramide entière, h' la hauteur de la pyramide retranchée, s la surface de la base inférieure et s' celle de la base supérieure, on aura (*Géom.* 202) $s : s' :: h^2 : h'^2$, et par conséquent $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$ ou $h' = h\sqrt{\frac{s'}{s}}$; mais si l'on nomme k la hauteur du tronc, on aura $k = h - h'$, et par la substitution.... $k = h - h\sqrt{\frac{s'}{s}}$, ou $k = \frac{h\sqrt{s} - h\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$; d'où $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$. Or, la solidité de la pyramide totale est $s \times \frac{h}{3}$, et celle de la pyramide retranchée est $s' \times \frac{h'}{3}$, ou, en mettant pour h' la valeur qu'on vient de trouver, $s' \times \frac{h}{3}\sqrt{\frac{s'}{s}}$; donc, la solidité du tronc sera

$$\frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}}, \text{ ou } \frac{h}{3}\left(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right), \text{ ou } \frac{h}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right);$$

mettons donc pour h la valeur que nous venons de trouver, et nous aurons $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \frac{(s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'})}{\sqrt{s}}$, qui se réduit à $\frac{k}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}\right)$, ou, en faisant la division par $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$, se réduit à $\frac{k}{3}(s + \sqrt{ss'} + s')$, qui nous apprend que *toute pyramide ou tout cône tronqué est composé de trois pyramides de même hauteur, dont l'une a pour base la base inférieure s du tronc, l'autre la base supérieure s', et la troisième, une moyenne proportionnelle* $\sqrt{ss'}$ *entre la base supérieure s' et la base inférieure* s; car pour avoir la solidité de ces trois pyramides, il suffirait, puisqu'elles sont

de même hauteur, de réunir les trois bases, ce qui donnerait $s + \sqrt{ss'} + s'$, et de multiplier la totalité par le tiers $\frac{k}{3}$ de la hauteur commune, ce qui donne la même quantité qu'on vient de trouver.

279. Si a représente le rayon d'une sphère, $\frac{ca^2}{2r}$ sera la surface de son grand cercle; $\frac{4ca^2}{2r}$, ou $\frac{2ca^2}{r}$ sera la surface de cette même sphère, et par conséquent $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3}a$, ou $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$, sera sa solidité (*Géom.* 222 et 244). Si l'on nomme x la hauteur d'un segment quelconque, on aura, comme nous l'avons vu dans la solution de la dernière question, $\frac{caax}{3r}$ pour la solidité du secteur, et $\frac{c}{2r}(2ax - xx) \times \frac{a-x}{3}$ pour celle du cône qui en fait partie; donc celle du segment (*Géom.* 248) sera

$$\frac{ca^2x}{3r} - \frac{c}{2r}(2ax - xx)\frac{a-x}{3} = \frac{c}{3r}\left[aax - (2ax - xx)\left(\frac{a-x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{3r} \cdot \frac{2aax - 2aax + axx + 2axx - x^3}{2} = \frac{c}{3r} \cdot \frac{3axx - x^3}{2}$$

$$= \frac{cx^2}{2r}\left(a - \tfrac{1}{3}x\right),$$

qui fait voir que *la solidité du segment est égale au cercle qui aurait pour rayon la hauteur de ce segment, multiplié par le rayon moins le tiers de cette hauteur.*

Quand on a les expressions algébriques des quantités, il est facile de résoudre plusieurs questions qu'on peut faire sur ces mêmes quantités. Par exemple, si l'on demandait quelle doit être la hauteur d'un cône qui serait égal en solidité à une sphère donnée, et qui aurait pour rayon de sa base le rayon de la sphère; en nommant h cette hauteur et a le rayon de la base, on aura $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3}$ pour la solidité de ce

cône; et puisqu'il doit être égal à la sphère qui a aussi pour rayon a, on aura

$$\frac{c}{2r} \times \frac{a^2 h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a}{3}, \text{ d'où l'on tire } h = 4a.$$

Cette valeur de h nous fait connaître que la hauteur est égale au double du diamètre de la sphère; ce qui doit être en effet; car la sphère étant (*Géom.* 246) les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, doit être le double d'un cône de même base et de même hauteur que ce cylindre, c'est-à-dire égale à un cône de même base et d'une hauteur double.

280. Pour donner encore un exemple, proposons-nous cette question : *Connaissant le poids d'une sphère dans l'air, et son poids dans l'eau, connaître le rayon de cette sphère.* Pour résoudre cette question, nous supposerons un principe d'Hydrostatique que nous démontrerons dans la quatrième partie de ce Cours. Ce principe est que ce qu'un corps perd de son poids dans l'eau ou dans tout autre liquide, est égal au poids du volume de liquide qu'il déplace. Cela posé, supposons que p est le poids d'un pouce cube d'eau, et x le rayon inconnu de la sphère dont il s'agit, c'est-à-dire le nombre de pouces de ce rayon. La solidité de cette sphère sera donc $\frac{2cx^3}{3r}$; et pour avoir le poids d'un pareil volume d'eau, il faudra multiplier cette quantité par p, puisqu'un pouce cube d'eau pesant p, un nombre de pouces cubes d'eau exprimé par $\frac{2cx^3}{3r}$ doit peser p fois autant; c'est-à-dire qu'il doit peser $\frac{2pcx^3}{3r}$: supposons donc que P est le poids qu'a, dans l'air, la sphère en question; alors, selon le principe que nous venons de poser, elle ne doit peser dans l'eau que $P - \frac{2cpx^3}{3r}$; puis donc qu'on suppose connu ce qu'elle pèse dans l'eau, si l'on représente ce poids par P', on aura

$$P - \frac{2cpx^3}{3r} = P'; \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{(P - P')3r}{2cp}}.$$

Supposons, pour en donner une application, que la sphère dont il s'agit pèse 5 onces dans l'air et 2 onces dans l'eau, et qu'un pied cube d'eau pèse 72 liv., ce qui donne (en divisant par 1728 qui est le nombre de pouces cubes contenus dans un pied cube) $\frac{72}{1728}$ ou $\frac{1}{24}$ de livre, c'est-à-dire $\frac{16}{384}$ ou $\frac{8}{3}$ d'once pour un pouce cube; prenons d'ailleurs le rapport de 113 à 355 pour celui du diamètre à la circonférence, et par conséquent celui de $\frac{113}{2}$ à 355 pour celui de r à c; nous aurons donc $p=\frac{8}{3}$, $P=5$, $P'=2$, $r=\frac{113}{2}$; $c=355$; et par conséquent,

$$x=\sqrt[3]{3.\frac{113}{2}\left(\frac{5-2}{2\times 355\times\frac{8}{3}}\right)}=\sqrt[3]{\frac{3051}{2840}};$$

prenant les logarithmes, pour plus de facilité,

$$Lx=\tfrac{1}{3}L\tfrac{3051}{2840}=\tfrac{1}{3}(L\,3051-L\,2840)=0,0103746,$$

qui répond à 1,0242 à très peu près. Ce globe a donc un pouce et 0,0242, ou un pouce et 242 dix-millièmes de pouce pour rayon.

Nous avons supposé tacitement que le globe entrait entièrement dans l'eau, par son poids; si au contraire il fallait lui ajouter un certain poids pour le faire plonger entièrement, alors ce serait cette quantité qu'il faudrait prendre pour P', mais en même temps il faudrait traiter P' comme négatif; c'est-à-dire qu'alors on aurait $x=\sqrt[3]{\frac{(P+P')\times 3r}{2cp}}$. En effet, $\frac{2cpx^3}{3r}$ étant, ainsi que nous l'avons vu dans la solution précédente, le poids d'un volume d'eau égal à ce globe, et P le poids de ce globe dans l'air, $\frac{2cpx^3}{3r}-P$ sera la quantité dont il pèse moins qu'un pareil volume d'eau, et par conséquent, ce qu'il faut ajouter pour le faire plonger entièrement; on aura donc $\frac{2cpx^3}{3r}-P=P'$, qui donne la valeur de x que nous venons d'assigner pour ce cas.

Des Lignes courbes en général, et, en particulier, des Sections coniques.

281. La considération des lignes courbes n'est point un objet de pure spéculation. Tant que les questions qu'on a à résoudre ne passent pas le second degré, on n'a pas besoin du secours de ces lignes; mais au-delà elles deviennent nécessaires. Nous allons donc donner une idée générale des lignes courbes, et des usages qu'elles peuvent avoir pour la construction des équations auxquelles on arrive dans la résolution des questions. Parmi les lignes courbes que l'on considère en Géométrie, les unes sont telles, que chacun de leurs points peut être déterminé par une même loi, c'est-à-dire par des calculs et des opérations semblables; dans d'autres, chaque point se détermine par une loi différente, c'est-à-dire par des calculs ou des opérations différentes; mais cette différence elle-même est assujettie à une loi. Quant aux lignes tracées au hasard, telles que seraient, par exemple, les traits qu'imprime sur le papier la plume d'un écrivain, ils ne peuvent être l'objet d'une Géométrie rigoureuse. Néanmoins les recherches dont celle-ci s'occupe conduisent même à imiter, par des procédés directs et certains, des contours qui ne semblent assujettis à aucune loi; et l'art de lier ainsi, par des rapports approchés, des quantités dont la loi véritable serait ou inconnue ou trop composée, n'est pas une des applications les moins utiles de la Géométrie et de l'Algèbre; nous aurons quelques occasions de le voir par la suite.

Pour pouvoir tracer les lignes courbes qui font l'objet de la Géométrie, il faut donc connaître la loi à laquelle sont assujettis les différens points de leur contour. Or, cette loi peut être donnée de plusieurs manières, ou en indiquant un procédé par lequel ces courbes peuvent être décrites d'un mouvement continue; tel est le cercle qui se décrit en faisant tourner, dans un plan, une ligne donnée, et autour d'un point donné; ou bien en faisant connaître quelque propriété qui appartienne constamment à chacun des points de cette

courbe; c'est ainsi que sachant que tout angle qui a son sommet à la circonférence du cercle, et qui s'appuie sur un diamètre, est droit, je puis trouver successivement chacun des points d'un cercle dont je connais le diamètre, en tirant d'une des extrémités A de ce diamètre (fig. 34) une infinité de lignes droites AC, AD, AE, AF, etc., et menant de l'autre extrémité B, les perpendiculaires BC, BD, BE, BF, etc.; les différens points C, D, E, F, etc., déterminés de cette manière, appartiendront tous à la circonférence qui a AB pour diamètre.

Enfin, cette loi peut être donnée par une équation, et l'on peut toujours supposer qu'elle le soit par ce dernier moyen, parce que les deux autres dont nous venons de faire mention servent à trouver l'équation qui exprime cette loi. C'est sous ce dernier point de vue que nous allons principalement considérer les courbes, parce qu'il est tout-à-la-fois le plus simple et le plus fécond pour en connaître les propriétés, les singularités et les usages. Voyons donc comment une équation peut exprimer la nature d'une courbe, et puisque, jusqu'ici, nous ne connaissons encore que la circonférence du cercle, commençons par celle-ci.

282. Supposons donc que AMB (fig. 35) est une courbe à laquelle nous ne connaîtrions encore d'autre propriété que celle-ci : que la perpendiculaire PM, abaissée d'un point quelconque M de cette courbe sur la ligne AB, est moyenne porportionnelle entre les deux parties AP et PB. Voyons comment l'Algèbre peut nous aider à trouver chacun des points de cette courbe, et ses différentes propriétés. Si je nomme a la ligne AB, la partie AP, x, et la perpendiculaire PM, y; alors PB sera $a-x$; et puisque nous supposons PM moyenne proportionnelle entre AP et PB, nous aurons

$$x : y :: y : a-x; \quad \text{d'où} \quad y^2 = ax - x^2.$$

Concevons maintenant que AB soit partagé en un certain nombre de parties égales, en 10, par exemple, et que par

chaque point de division on élève les perpendiculaires pm, pm, pm, etc.; il est visible que si, dans l'équation qu'on vient de trouver, l'on suppose x successivement égal à chacune des lignes Ap, Ap, etc., y deviendra égal à chaque ligne correspondante pm, pm, etc., puisque l'équation... $yy = ax - xx$ exprime que y est toujours moyenne proportionnelle entre x et $a - x$, quel que soit d'ailleurs x, ce qui est la propriété que nous supposons à chaque perpendiculaire pm. Donc, on peut trouver successivement chacun des points de cette courbe, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, et calculant les valeurs correspondantes de y: en voici un exemple. Dans la supposition que nous venons de faire, que a est divisé en 10 parties, ou qu'il est composé de 10 parties, nous aurons $a = 10$, et par conséquent l'équation devient $yy = 10x - xx$. Si donc nous supposons successivement

$$x = 1,\ x = 2,\ x = 3,\ x = 4,\ x = 5,\ x = 6,\ \text{etc.},$$

les valeurs correspondantes de y seront

$$y = \sqrt{9}, y = \sqrt{16}, y = \sqrt{21}, y = \sqrt{24}, y = \sqrt{25}, y = 24, \text{etc.},$$

ou bien,

$$y = 3,\ y = 4,\ y = 4{,}5,\ y = 4{,}9,\ y = 5,\ y = 4{,}9,\ \text{etc.}$$

Ainsi, si l'on porte ces valeurs de y successivement sur les perpendiculaires correspondantes aux valeurs 1, 2, 3, 4, etc., de x, les points m, m, etc., déterminés de cette manière, appartiendront tous à une courbe qui aura cette propriété, que chaque perpendiculaire pm sera moyenne proportionnelle entre les deux parties Ap et pB de la droite AB, courbe que nous allons voir, dans un moment, être la circonférence même du cercle.

Nous avons vu que toute racine paire avait deux valeurs, l'une positive, l'autre négative. Ainsi, outre les valeurs de y que nous venons de trouver, on a encore ces autres-ci :

$$y = -3, y = -4, y = -4{,}5, y = -4{,}9, y = -5, y = -4{,}9, \text{etc.}$$

Pour avoir les points de la courbe qu'annoncent ces nouvelles valeurs de y, il faut, conformément à ce que nous avons déjà dit plusieurs fois sur les quantités négatives, prolonger les perpendiculaires pm, pm, etc., et porter à l'opposite, c'est-à-dire de p en m', les quantités pm' pm', etc., égales chacune à sa correspondante pm. Si l'on veut avoir un plus grand nombre de points de la courbe, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer AB divisé en un plus grand nombre de parties, par exemple, en 100, c'est-à-dire supposer $a = 100$; ou bien, en conservant à a la même valeur 10, que ci-dessus, supposer à x des valeurs intermédiaires entre celles qu'on lui a données ci-dessus, on trouvera de même les valeurs intermédiaires de y, et par conséquent de nouveaux points de la courbe. La valeur $y = 0$, que donne $x = 10$, fait voir que la courbe rencontre la ligne AB au point B, ou $x = a = 10$, puisque la perpendiculaire pm ayant alors pour valeur zéro, la distance du point m à la droite AB est nulle. On peut voir aussi, avec facilité, qu'elle doit rencontrer la ligne AB au point A : en effet, puisqu'aux endroits où la courbe rencontre cette ligne, la valeur de y doit être 0; pour savoir quels sont ces points, il n'y a qu'à supposer que y est zéro, dans l'équation $yy = ax - xx$, ce qui la réduit à $0 = ax - xx$; or, $ax - xx$ étant $= x(a - x)$, ce produit est zéro, dans deux cas, lorsque $x = 0$, et lorsque $x = a$. Donc réciproquement y sera aussi zéro dans ces deux cas; or, x est évidemment $= 0$ au point A, et il est $= a$ au point B; donc la courbe rencontre en effet la ligne AB aux points A et B.

D'après cet exemple, on peut commencer à apercevoir comment une équation sert à déterminer les différens points d'une courbe. Nous en verrons d'autres exemples; mais auparavant expliquons certains mots dont nous ferons usage par la suite.

283. Lorsqu'on veut exprimer, par une équation, la nature d'une ligne courbe, on rapporte ou l'on conçoit qu'on rapporte chacun des points m, m, etc., à deux lignes fixes AB et

OAO, qui font entre elles un angle déterminé, aigu, droit ou obtus; et en imaginant que de chaque point m on mène les lignes mp et mp', parallèles aux lignes OAO et AB, il est évident qu'on connaîtra la situation de ce point, si l'on connaît les valeurs des lignes mp' ou Ap et pm, ou, ce qui revient au même, si l'on connaît l'une de ces lignes, et son rapport avec l'autre. Or, ce que l'on entend, lorsqu'on dit qu'une équation exprime la nature d'une ligne courbe, c'est que cette équation donne le rapport qu'il y a, pour chaque point m, entre la ligne Ap et la ligne pm, en sorte que l'une étant connue, l'équation fait connaître l'autre; et selon que ce rapport est plus ou moins composé, la courbe est elle-même d'un genre plus ou moins élevé. Les lignes Ap, ou mp', qui mesurent la distance de chaque point m à l'une OAO des deux lignes de comparaison, s'appellent les *abscisses;* et les lignes mp ou $p'A$, qui mesurent la distance à l'autre ligne AB de comparaison, s'appellent les *ordonnées;* la ligne AB s'appelle l'*axe des abscisses*, et la ligne OAO se nomme l'*axe des ordonnées*. Le point A, d'où l'on commence à compter les abscisses, s'appelle l'*origine des abscisses;* on appelle de même *origine des ordonnées*, celui d'où l'on commence à compter les ordonnées Ap' ou pm: dans la figure 35, ces deux points sont un seul et même point, savoir, le point A; rien n'assujettit à compter les abscisses depuis le même point d'où l'on compte les ordonnées; mais quand aucune circonstance ne détermine à faire autrement, il est toujours plus simple de les compter du même point. Les lignes Ap, pm, se nomment d'un nom commun, les *coordonnées de la courbe;* et considérées comme appartenant indifféremment à un point quelconque de la courbe, on les appelle *des indéterminées;* on donne le même nom aux lettres ou signes algébriques x et y par lesquels on représente ces lignes Ap et pm.

284. Revenons maintenant à notre équation, et voyons comment on peut en tirer les propriétés de la courbe.

1°. Du milieu C de AB, tirons à un point quelconque M

de la courbe la droite CM; en quelque endroit que ce soit, le triangle CPM sera rectangle; on aura donc

$$\overline{MP}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{MC}^2. \quad \text{Or, } PC = AC - AP = \tfrac{1}{2}a - x;$$

donc $$y^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = \overline{MC}^2.$$

Or, puisque la droite MP, ou y, est partout moyenne proportionnelle entre AP et PB, on a $yy = ax - xx$; donc

$$ax - xx + \tfrac{1}{4}aa - ax + xx = \overline{CM}^2;$$

c'est-à-dire $\frac{1}{4}aa = \overline{MC}^2$, qui donne $MC = \frac{1}{2}a$; chaque point M ou m est donc également éloigné du point C; la courbe est donc une circonférence de cercle.

2°. D'un point quelconque M ou m de la courbe, menons aux deux extrémités A et B les droites MA et MB; les triangles rectangles MPA, MPB nous donneront

$$\overline{AP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{AM}^2 \quad \text{et} \quad \overline{PM}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{MB}^2,$$

ou, en mettant les valeurs algébriques,

$$xx + yy = \overline{AM}^2, \text{ et } aa - 2ax + xx + yy = \overline{MB}^2;$$

donc, en ajoutant ces deux équations et mettant pour yy sa valeur $ax - xx$, on aura

$$aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2,$$

c'est-à-dire $$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = aa = \overline{AB}^2;$$

propriété du triangle rectangle, et qui, par conséquent, nous fait connaître que l'angle AMB est toujours droit en quelque endroit que soit le point M sur la courbe (*Géom.* 65).

3°. Si dans l'équation $xx + yy = \overline{AM}^2$, on met pour yy sa valeur $ax - xx$, on aura $\overline{AM}^2 = ax$, ce qui donne cette proportion :

$$a : AM :: AM : x, \quad \text{ou} \quad AB : AM :: AM : AP,$$

c'est-à-dire que la corde AM est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le segment ou l'abscisse AP (*Géom.* 112).

On trouverait de même toutes les autres propriétés du cercle que nous avons démontrées en Géométrie, et cela en partant toujours de cette supposition, que l'ordonnée PM ou pm est moyenne proportionnelle entre AP et PB, ou Ap et pB.

Nous avons compté les abscisses depuis le point A, origine du diamètre, et nous avons eu l'équation $yy = ax - xx$. Si nous voulions compter les abscisses depuis le centre, c'est-à-dire prendre pour abscisses les lignes Cp, Cp, etc., alors représentant chacune de ces lignes par z, nous aurions..... CP = AC — AP, c'est-à-dire $z = \frac{1}{2}a - x$, et par conséquent $x = \frac{1}{2}a - z$. Mettant donc pour x cette valeur dans l'équation $yy = ax - xx$, on aura

$y^2 = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$, qui se réduit à $yy = \frac{1}{4}aa - zz$; c'est là l'équation du cercle, en supposant les coordonnées perpendiculaires, et leur origine au centre.

Au reste, toute propriété qui appartiendra essentiellement à chaque point de la courbe, donnera toujours, en la traduisant algébriquement, la même équation pour la courbe, avec la condition cependant qu'on prenne les mêmes abscisses et les mêmes ordonnées; mais quand on changera l'origine ou la direction des coordonnées, ou toutes les deux, en pourra avoir une équation différente; néanmoins elle sera toujours du même degré. Nous venons de voir la vérité de la dernière partie de cette proposition, dans le changement que nous venons de faire pour les abscisses; au lieu de l'équation $yy = ax - xx$, nous avons eu $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, qui, étant déduite de la première, a pour base la même propriété; mais si nous partions de cette autre propriété, que chaque distance MC est toujours la même et $= \frac{1}{2}a$, alors, nommant CP, z, et PM, y, nous aurions, à cause du triangle rectangle MPC, $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, qui donne $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, équation déjà

trouvée plus haut, quoique ici nous soyons partis d'une propriété différente.

De l'Ellipse.

285. Proposons-nous maintenant d'examiner *quelle serait la courbe qui jouirait de cette propriété, que la somme des deux distances* MF + Mf (fig. 36) *de chacun de ses points à deux points fixes* F *et* f, *serait toujours égale à une ligne donnée* a. Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *ellipse*, il faut chercher une équation qui exprime quelle relation il y a, en vertu de cette propriété connue, entre les perpendiculaires PM menées de chaque point M sur une ligne déterminée telle que F*f*, par exemple, et leurs distances FP ou AP à quelque point F ou A pris arbitrairement. Dans cette vue, je prends pour origine des abscisses le point A, déterminé en prenant, à compter du milieu C de F*f*, la ligne $CA = \frac{1}{2}a$; et ayant fait CB = CA, je nomme AP, x; PM, y; la ligne AF qui est censée connue, c; enfin la ligne FM, z; alors

$$FP = AP - AF = (*)\ x - c,\quad Mf = FMf - FM = a - z,$$
$$fP = PB - Bf = AB - AP - Bf = a - x - c.$$

Cela posé, les triangles rectangles FPM, *f*PM, donnent

$$\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{FP}^2,\quad \text{et}\quad \overline{Mf}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{fP}^2,$$

ou $$(1)\ldots zz = yy + xx - 2cx + cc,$$

et $$aa - 2az + zz = yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + c^2.$$

Retranchant la seconde de ces deux dernières équations de la première, et effaçant aa qui se trouvera de part et d'autre, j'ai

$$2az = 2ax + 2ac - 4cx,\quad \text{d'où}\quad z = \frac{1}{a}(ax + ac - 2cx);$$

(*) Si le point M avait été pris de manière que la perpendiculaire MP tombât entre A et F, alors FP serait $c - x$; mais cela n'apporterait aucun changement à l'équation finale, parce que, dans la formation de cette équation, on n'emploie que le carré de FP, qui est toujours $xx - 2cx + cc$, soit qu'il vienne de $x - c$, soit qu'il vienne de $c - x$.

mettant donc pour x cette valeur dans l'équation (1), on en déduira

$$(2)\ldots\ y^2=\frac{4c}{a^2}(a-c)\ (ax-x^2).$$

Telle est l'équation de la courbe dont chaque point a la propriété que nous avons supposée.

286. Cette équation peut servir à décrire la courbe par points, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, comme nous l'avons fait ci-dessus à l'occasion du cercle, et calculant en même temps les valeurs de y. Comme le procédé est absolument le même, nous n'en ferons point le calcul.

287. On peut encore décrire l'*ellipse* par points, de cette manière : après avoir fait $CB=CA=\frac{1}{2}a$, on prend un intervalle quelconque Br, et l'on décrit au-dessus et au-dessous de AB, du point f comme centre, avec Br pour rayon, un arc que l'on coupe en M et M', par un autre décrit du point F, comme centre, et du rayon Ar. Tous les points M et M', trouvés de cette manière, sont à l'ellipse.

288. La propriété fondamentale d'après laquelle nous venons de trouver l'équation, donne elle-même un moyen fort simple de décrire cette courbe par un mouvement continu. En effet, ayant choisi les deux points F et f tels qu'on les veut, on placera deux pointes ou piquets aux deux points F et f, et y ayant fixé les deux extrémités d'un fil plus grand que la distance Ff, si l'on tend ce fil par le moyen d'un style M que l'on fera marcher en tenant toujours ce fil tendu, ce style M tracera la courbe en question, puisque la somme des distances du style aux deux points F et f sera toujours égale à la longueur totale du fil.

289. De là il est aisé de voir que si la longueur du fil a été prise égale à AB, la courbe passera par les deux points

A et B; car puisque $Cf = CF$, on aura $AF = Bf$, et par conséquent

$$AF + Af = Af + Bf = a, \quad \text{et} \quad BF + Bf = BF + AF = a.$$

C'est ce que l'équation fait voir aussi; car pour savoir où la courbe rencontre la droite Ff prolongée, il faut faire $y = 0$, or, cette supposition donne $x(a - x) = 0$, ce qui a lieu dans deux cas, savoir, lorsque $x = 0$, c'est-à-dire au point A, et lorsque $x = a$, c'est-à-dire au point B.

290. L'équation (2) fait voir aussi que la courbe s'étend au-dessous comme au-dessus de la ligne AB, et qu'elle est absolument la même de part et d'autre de l'axe AB. En effet, cette équation donne

$$(3)\ldots\ y = \pm\sqrt{\frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)},$$

qui fait voir que, pour chaque valeur de x ou de AP, il y a deux valeurs de y ou de PM parfaitement égales, mais qui, étant de signes contraires, doivent être portées de côtés opposés.

Il est encore évident que si, sur le milieu C de AB, on élève la perpendiculaire DD', la courbe sera partagée en deux parties parfaitement égales et semblables: c'est une suite immédiate de la description; c'est aussi une suite de l'équation; mais cette conclusion deviendra plus facile quand nous aurons fait sur cette équation les autres remarques qui nous restent à faire.

291. La ligne AB s'appelle le *grand axe* de l'ellipse, et la ligne DD' le *petit axe*. Les deux points F et f s'appellent les *foyers*. Les points A, B, D, D', sont les *sommets* des axes, et le point C le *centre*.

292. Si l'on veut avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le foyer, il faut supposer dans l'équation (3) AP ou $x = AF = c$; alors on aura

$$y = \pm\frac{2}{a}(ac - c^2); \quad \text{donc} \quad m''m''' = \frac{4}{a}(ac - c^2),$$

cette ligne $m''m'''$ est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'ellipse. *Le paramètre est donc moindre que le quatruple de la distance* c *du sommet au foyer,* puisque sa valeur, qui est la même chose que $4c - \frac{4c^2}{a}$, est évidemment moindre que $4c$. Si l'on nomme p cette valeur du paramètre, on aura

$$p = \frac{1}{a}(4ac - 4c^2); \quad \text{donc} \quad \frac{p}{a} = \frac{4ac - 4c^2}{a^2};$$

on pourra donc changer l'équation de l'ellipse en cette autre

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx).$$

293. Si l'on veut savoir quelle est la valeur de la ligne CD, il n'y a qu'à supposer dans l'équation (2), que AP ou..... $x = AC = \frac{1}{2}a$; on aura

$$y^2 = \overline{CD}^2 = c(a - c) = AF \times BF.$$

On voit donc que CD, *ou le demi petit axe, est une moyenne proportionnelle entre les deux distances d'un même foyer aux deux sommets* A *et* B.

Comme la ligne DD′ est une des lignes les plus remarquables de l'ellipse, on l'introduit dans l'équation, de préférence à la ligne AF ou c. Pour nous conformer à cet usage, nous nommerons b cette ligne DD′; nous aurons donc $CD = \frac{1}{2}b$; et puisque nous venons de trouver $\overline{CD}^2 = ac - cc$, nous aurons $bb = 4ac - 4cc$; l'équation de l'ellipse pourra donc être changée en

$$(4)\ldots\ yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx).$$

Puisque nous avons $pa = 4ac - 4cc$, et $bb = 4ac - 4cc$; de ces deux équations nous conclurons $pa = bb$, et par conséquent, en réduisant cette équation en proportion, $a : b :: b : p$;

le paramètre est donc une troisième proportionnelle au grand axe et au petit axe.

294. L'équation (4) donne $yy : ax - xx :: bb : aa$; faisant donc attention que $ax - xx = x(a - x)$, et mettant au lieu des quantités algébriques, les lignes de la figure qu'elles représentent, on aura $\overline{PM}^2 : AP \times PB :: \overline{DD'}^2 : \overline{AB}^2$; c'est-à-dire que *le carré d'une ordonnée quelconque au grand axe de l'ellipse, est au produit des abscisses* AP *et* PB *comme le carré du petit axe est au carré du grand.* Et puisque cette propriété a lieu pour tous les points de l'ellipse, il s'ensuit que *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

295. L'équation (4) ne diffère de celle du cercle (282) qui serait décrit sur AB comme diamètre (fig. 37), qu'en ce que, dans la première, $ax - xx$ est multipliée par $\frac{bb}{aa}$, c'est-à-dire par le rapport du carré du petit axe au carré du grand; en sorte que si l'on nomme z une ordonnée quelconque PN du cercle, on aura $zz = ax - xx$; mettant donc pour $ax - xx$, cette valeur zz dans l'équation de l'ellipse, on aura $y^2 = \frac{bb}{aa} zz$, et tirant la racine carrée, $y = \frac{b}{a} z$, ou $ay = bz$, ce qui donne

$y : z :: b : a$, ou $PM : PN :: DD' : AB$, ou $:: CD : AC$ ou CE;

on voit donc que *les ordonnées de l'ellipse ne sont autre chose que les ordonnées du cercle décrit sur le grand axe, diminuées proportionnellement, c'est-à-dire dans le rapport du grand axe au petit axe.* De là il est aisé de décrire une ellipse par le moyen du cercle. On voit en même temps que le cercle est une ellipse dont les deux axes a et b sont égaux, ou dont la distance du sommet au foyer est égale au demi grand axe, ou encore dont le paramètre est égal au diamètre. Car en supposant dans les équations ci-dessus $b = a$, ou $c = \frac{1}{2} a$, ou $p = a$, on a $yy = ax - xx$, équation du cercle.

296. Par les équations que nous avons trouvées jusqu'ici, il paraît donc qu'il n'en est pas de l'ellipse comme du cercle: une seule ligne détermine celui-ci, c'est son diamètre; au lieu que son grand axe AB (fig. 36) ne suffit pas pour déterminer l'ellipse; il faut encore connaître ou le petit axe b, ou son paramètre p, ou la distance c du sommet au foyer. Quand on connaît le grand axe et la distance c, l'ellipse est facile à décrire, comme on l'a vu ci-dessus. Mais si l'on donnait le grand axe et le petit axe, il faudrait, pour décrire l'ellipse par un mouvement continu, déterminer les foyers; c'est une chose facile, en prenant le demi grand axe pour rayon, et traçant de l'extrémité D (fig. 36) du petit axe, comme centre, deux petits arcs qui coupent le grand axe aux deux points F et f qui seront les foyers; car la somme des deux distances FD et Df devant être égale à a, il faut, lorsque ces deux lignes sont égales, que chacune soit égale à $\frac{1}{2}a$. Si l'on donnait le grand axe et le paramètre, on déterminerait le petit axe en prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes; c'est ce qu'enseigne la proportion..... $a : b :: b : p$, trouvée ci-dessus (293). Le petit axe étant trouvé, on acheverait comme il vient d'être dit.

297. *Si pour quelque point* M *que ce soit de l'ellipse* (fig. 36), *on prolonge la ligne* fM *tirée d'un des foyers, jusqu'à ce que son prolongement* MG *soit égal à l'autre distance* MF, *et qu'ayant tiré* GF, *on lui mène du point* M *la perpendiculaire* MOT, *cette dernière sera tangente à l'ellipse, c'est-à-dire ne la rencontrera qu'au seul point* M. En effet, à cause des lignes égales MF et MG, la ligne MT est perpendiculaire sur le milieu de GF. Donc si de tel autre point N que ce soit, pris sur cette ligne, on mène les deux droites NG et NF, elles sont égales. Supposons donc que MT pût rencontrer l'ellipse en quelque autre point N; alors, en tirant Nf, il faudrait que FN + Nf pût être égal à MF + Mf ou M + Mf, c'est-à-dire à Gf; mais Gf est plus petit que

GN + Nf, et par conséquent plus petit que FN + Nf; donc le point N est hors de l'ellipse.

298. Les angles FMO, OMG, sont égaux, d'après la construction qu'on vient de donner : or OMG est égal à son opposé fMN; donc FMO est égal à fMN; donc *les deux lignes qui vont d'un même point de l'ellipse aux deux foyers font des angles égaux avec la tangente.* L'expérience apprend qu'un rayon de lumière qui tombe sur une surface se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; donc si F est un point lumineux, tous les rayons qui, partis du point F, tomberont sur la concavité MAM', iront se rassembler en f, et réciproquement. Si du point M, on élève sur MT la perpendiculaire MI, qui sera en même temps perpendiculaire à la courbe, cette ligne divisera l'angle F$M f$ en deux parties égales; car si des angles droits IMT, IMN, on retranche les angles égaux FMT et fMN, les angles restans FMI et IMf seront égaux.

299. De là on peut calculer la valeur de la distance PI depuis l'ordonnée jusqu'à l'endroit où la perpendiculaire MI rencontre l'axe. Cette ligne PI s'appelle *sous-normale*, et la ligne MI *normale*. Pour calculer PI, nous allons d'abord calculer FI. Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales, on a Mf : MF :: fI : FI (*Géom.* 104), et par conséquent (*Géom.* 98),

$$f\mathrm{M} + \mathrm{FM} ; Mf - \mathrm{FM} :: f\mathrm{I} + \mathrm{FI} : f\mathrm{I} - \mathrm{FI}.$$

Or, $Mf + \mathrm{FM} = a$; et en faisant MF $= z$, comme ci-dessus (285), $Mf = a - z$, par conséquent $Mf - \mathrm{MF} = a - 2z$; d'ailleurs

$$f\mathrm{I} + \mathrm{FI} = \mathrm{F}f = \mathrm{AB} - 2\mathrm{AF} = a - 2c,$$

et $$f\mathrm{I} - \mathrm{FI} = \mathrm{F}f - 2\mathrm{FI} = a - 2c - 2\mathrm{FI};$$

donc $$a : a - 2z :: a - 2c : a - 2c - 2\mathrm{FI};$$

donc $$aa - 2ac - 2a \times \mathrm{FI} = aa - 2ac - 2az + 4cz.$$

D'où l'on tire $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, ou, en mettant pour z sa valeur $\frac{1}{a}(ax + aq - 2cx)$ trouvée (285), on a

$$FI = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa};$$

mais $FI = FP + PI = AP - AF + PI = x - c + PI$;

donc $PI = FI - x + c = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa} - x + c$

$= \frac{4(ac - c^2)}{aa}(\frac{1}{2}a - x) = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{2}a - x)$, car $ac - c^2 = \frac{1}{4}b^2$ (293).

300. De là il est aisé d'avoir la valeur de la distance PT depuis l'ordonnée jusqu'à la rencontre de la tangente, ce qu'on appelle la *sous-tangente*. Car le triangle IMT étant rectangle, et PM une perpendiculaire abaissée de l'angle droit, on a (*Géom.* 112) PI : PM :: PM : PT, c'est-à-dire $\frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{2}a - x) : y :: y : PT$; donc $PT = \frac{aayy}{bb(\frac{1}{2}a - x)}$

mettant pour yy sa valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $PT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x}$.

Les expressions algébriques des deux lignes PI et PT peuvent servir à mener une perpendiculaire et une tangente à l'ellipse, en quelque point M que ce soit. Car lorsque le point M est donné, en abaissant la perpendiculaire MP, on a la valeur de $AP = x$; et comme on est supposé connaître a et b, on connaît donc tout ce qui entre dans la valeur de PI et dans celle de PT.

301. De l'expression de PT, on peut conclure que si l'on mène une tangente au cercle décrit sur le grand axe AB (fig. 37), au point N où ce cercle est rencontré par l'ordonnée PM à l'ellipse, les tangentes NT et MT aboutiront au même point T sur l'axe. Car puisque le second axe b n'entre point dans l'expression de PT, cette ligne PT sera donc toujours la

même tant que a sera le même et x le même. Ainsi toutes les tangentes aux points correspondans dans toutes les ellipses décrites sur AB, comme grand axe, se rencontrent au même point T.

Si à PT (fig. 36), on ajoute CP qui est $\frac{1}{2}a-x$, on aura $CT=\frac{(ax-xx)}{\frac{1}{2}a-x}+\frac{1}{2}a-x$ qui, en réduisant tout en fraction, se réduit à $\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a-x}$; c'est-à-dire que $CT=\frac{\overline{AC}^2}{CP}$, d'où l'on tire cette proportion CP : AC :: AC : CT.

302. Si l'on veut avoir l'expression de TM, cela sera facile par le moyen du triangle rectangle TPM qui donne

$$\overline{TM}^2=\overline{TP}^2+\overline{PM}^2=\frac{(ax-xx)^2}{(\frac{1}{2}a-x)^2}+\frac{bb}{aa}(ax-xx)$$
$$=\left[ax-xx+\frac{bb}{aa}(\tfrac{1}{2}a-x)^2\right]\frac{ax-xx}{(\frac{1}{2}a-x)^2}.$$

303. Si de quelque point M que ce soit de l'ellipse, on mène sur le petit axe DD' la perpendiculaire ou l'ordonnée MP', et qu'on pose $DP'=x'$, $MP'=y'$, on aura

$DP'=CD-CP'=CD-PM$, ou $x'=\frac{1}{2}b-y$, et $y=\frac{1}{2}b-x'$.

On aura de même

$MP'=CP=CA-AP$, ou $y'=\frac{1}{2}a-x$, et $x=\frac{1}{2}a-y'$.

Si l'on substitue ces valeurs de x et de y dans l'équation

$y^2=\frac{b^2}{a^2}(ax-x^2)$, on trouvera $y'^2=\frac{a^2}{b^2}(bx'-x'^2)$,

équation semblable à celle qu'on a eue pour le grand axe, et dont on tirera par conséquent des conclusions semblables; savoir, que *le carré d'une ordonnée* P'M *au petit axe, est au produit des deux abscisses* DP' × P'D', *comme le carré du grand axe est au carré du petit.* On en conclura aussi que *les carrés des ordonnées au petit axe sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes;* et que l'*ellipse*

peut être décrite par le moyen du cercle construit sur son petit axe, en allongeant les ordonnées de ce cercle dans le rapport du petit axe au grand (fig. 37).

304. On peut voir facilement par là que la courbure de la surface extérieure des mâts est celle d'une portion d'ellipsoïde, c'est-à-dire d'un solide engendré par la révolution d'une demi-ellipse DRO (fig. 39) tournant autour de son grand axe. En effet, pour déterminer les diamètres moyens entre le plus grand et le plus petit, on tire une ligne CD pour représenter le plus grand diamètre, et décrivant des extrémités C et D, comme centres, avec le rayon CD, les deux arcs DA et CA qui se coupent en A, on abaisse la perpendiculaire AB, et ayant mené, parallèlement à CD, une ligne EF égale au plus petit diamètre du mât, on regarde la partie interceptée BL comme représentant la hauteur du mât depuis le premier pont, où se trouve le plus grand diamètre, jusqu'au chouquet. On divise BL en un certain nombre de parties égales, et menant par les points de division des parallèles IgN à la ligne CD, on prend ces parallèles pour les diamètres moyens que doit avoir le mât à des hauteurs représentées par la ligne correspondante Bg; or si l'on conçoit que BM soit la hauteur réelle qui a été représentée par BL, et si l'on prend BT telle que l'on ait BT : BM :: Bg : BL, alors BT sera la hauteur à laquelle on doit placer le demi-diamètre gN; tirant donc TR parallèle et égale à gN, le point R sera un point de la surface du mât; mais si par le point R et par le point N, on mène RN qui rencontre BD en V, cette ligne sera parallèle à BM, et puisqu'on a BT : BM :: Bg : BL, ou BT : Bg :: BM : BL, on aura, à cause de BT = RV et Bg = VN, RV : VN :: BM : BL; c'est-à-dire que les ordonnées RV de la courbe du mât sont aux ordonnées VN du cercle AND, toujours dans un même rapport; donc cette courbe est une ellipse. Si l'on voulait la décrire par un mouvement continu, il faudrait en déterminer les axes, ce qui est facile en menant CO parallèle à BM, et telle que

CO : CD :: BM : BL ; CO et CD seront les deux demi-axes, avec lesquels il sera facile de déterminer les foyers, et par conséquent de décrire la courbe, par quelqu'une des méthodes que nous avons données (286, 87 et 88). Mais tout ceci suppose qu'on sait déterminer le point L, tel que menant ELF parallèle à CD, ELF soit égal au plus petit diamètre du mât; c'est ce que l'on fera facilement de cette manière : on prolongera CD vers H d'une quantité CH égale à la moitié du petit diamètre : du point H, comme centre avec une rayon égal à CD, on décrira un petit arc qui coupera AB au point cherché L. Car si l'on imagine la ligne EF prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre CO en T, et que l'on tire le rayon CF, le triangle rectangle CTF donnera

$$CT = \sqrt{\overline{CF}^2 - \overline{TF}^2} = \sqrt{\overline{HL}^2 - \overline{BH}^2} = BL,$$

puisqu'on prescrit de faire HL = CD = CF, et HC = à la valeur de LF, ce qui rend BH = TF.

305. Par ce qui précède, on voit donc que les propriétés à l'égard du second axe sont semblables à celles qu'on a trouvées à l'égard du premier, du moins en ce qui ne dépend point des foyers. Si l'on veut avoir sur le second axe les lignes analogues à celles que nous venons de calculer sur le premier axe, c'est-à-dire P'I', P'T', CT' et MT' (fig. 36), on les trouvera aisément par le moyen de leurs correspondantes qu'on vient d'avoir, et des triangles semblables qu'il est aisé de reconnaître dans la figure. Si l'on exprime ces lignes par le moyen des abscisses DP' ou x', on trouvera leurs expressions toutes semblables à celles qu'on a eues, en x, pour les lignes analogues sur le premier axe. On donne aussi un *paramètre* au second axe; mais ce que l'on entend alors par cette ligne, ce n'est pas une ligne qui passe par le foyer de ce second axe (car il n'a point de foyers), mais une troisième proportionnelle à ce second axe et au premier.

306. Jusqu'ici nous n'avons compté les abscisses que depuis le sommet; si nous voulions les compter depuis le centre,

C, alors nommant l'abscisse CP, z, nous aurions AP ou $x = \frac{1}{2}a - z$; substituant cette valeur de x dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ et dans les valeurs de PI, PT, CI et $\overline{TM}^2$ on aura

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2);\ \text{PI} = \frac{b^2}{a^2}z;\ \text{PT} = \frac{1}{z}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2);$$

$$\text{CT} = \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{z}\overline{TM}^2 = \frac{1}{z^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2 + \frac{b^2}{a^2}z^2\right).$$

L'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - z^2)$, donne $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$,

qui fait voir que pour une même valeur de CP ou z, on a deux ordonnées PM et PM'. Comme les valeurs de z commencent en C et finissent en A, il semble d'abord que cette équation ne donne que la moitié DAD' de l'ellipse; mais rien ne détermine à donner à z des valeurs positives plutôt que des valeurs négatives; en donnant à z de ces dernières valeurs, on aura les ordonnées *pm* qui déterminent la seconde moitié; et comme en mettant $-z$ au lieu de $+z$, dans $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$, cette quantité ne change pas, il s'ensuit que la moitié DBD' est parfaitement égale et semblable à la moitié DAD'.

307. Si d'un point quelconque M de l'ellipse (fig. 38), on mène au milieu C de l'axe AB, c'est-à-dire au centre, une droite MCM', terminée de l'autre part à l'ellipse, on appelle cette droite un *diamètre*. Si par le sommet M, on mène la tangente MT, et par le centre C le diamètre NN' parallèle à MT celui-ci s'appellera *diamètre conjugué* du premier. Une ligne *m*O menée d'un point *m* de l'ellipse parallèlement à MT, et terminée au diamètre MM', s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre, et MO en est l'*abscisse*. Le

paramètre du diamètre MM′ est une troisième proportionnelle à MM′ et NN′.

308. Nous allons démontrer que les ordonnées mO, pour un diamètre quelconque, ont des propriétés semblables à celles des ordonnées aux axes. A cet effet, j'abaisse des points m et O les perpendiculaires mp, OQ, sur l'axe AB; puis je mène la ligne mS parallèle au même axe. Je fais

$$AB = a,\ PM = y,\ CP = z,\ Qp = g,\ CQ = k;$$

j'aurai

$$AP = \tfrac{1}{2}a - z,\ PB = \tfrac{1}{2}a + z,$$
$$Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \tfrac{1}{2}a - k - g,$$
$$pB = CB + Cp = \tfrac{1}{2}a + k + g.$$

Les triangles semblables TPM, mSO, donnent

$$TP : MP :: mS \text{ ou } pQ : SO,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}.$$

Les triangles semblables CMP, COQ donnent

$$CP : PM :: CQ : QO, \text{ ou } z : y :: k : QO = \frac{ky}{z};$$

donc

$$pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}.$$

Or, puisque le point m appartient à l'ellipse, il faut (294) que l'on ait

$$\overline{pm}^2 : \overline{PM}^2 :: Ap \times pB : AP \times PB,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}\right)^2 : yy :: (\tfrac{1}{2}a - k - g) \times (\tfrac{1}{2}a + k + g) : (\tfrac{1}{2}a - z)(\tfrac{1}{2}a + z),$$

ou multipliant les extrêmes entre eux et les moyens aussi, et réduisant, on trouvera

$$(1)\ldots\ \tfrac{1}{4}a^2\,\frac{k^2}{z^2}+\frac{g^2z^2}{\frac{1}{4}a^2-z^2}=\tfrac{1}{4}a^2-g^2,$$

équation qui nous est nécessaire pour notre objet; mais avant d'en faire usage, tirons-en une connaissance dont nous avons besoin. Si l'on suppose que le point O, qui jusqu'ici était quelconque, descende en C, c'est-à-dire que la ligne mO passe par le centre, ou devienne CN, alors CQ ou k devient zéro, et la ligne Qp ou g devient CR. Or, si dans l'équation qu'on vient de trouver, on fait $k=0$, on trouvera

$$gg=\tfrac{1}{4}aa-zz,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\mathrm{CR}}^2=\tfrac{1}{4}aa-zz=(\tfrac{1}{2}a-z)\,(\tfrac{1}{2}a+z)=\mathrm{AP}\times\mathrm{PB}.$$

Après cette remarque, revenons à notre objet, et faisons

$$\mathrm{CM}=\tfrac{1}{2}a',\quad \mathrm{CN}=\tfrac{1}{2}b',\quad m\mathrm{O}=y',\quad \mathrm{CO}=z'.$$

Les triangles semblables CPM, CQO donnent

$$\mathrm{CM}:\mathrm{CO}::\mathrm{CP}:\mathrm{CQ},\quad \text{ou}\quad \tfrac{1}{2}a':z'::z:k=\frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}.$$

Les triangles CNR, mSO, semblables à cause des côtés parallèles, donnent

$$m\mathrm{O}:m\mathrm{S}::\mathrm{CN}:\mathrm{CR},\quad \text{ou}\quad y':g::\tfrac{1}{2}b':\mathrm{CR}=\frac{\frac{1}{2}gb'}{y'};$$

donc
$$\overline{\mathrm{CR}}^2=\frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'};$$

mais
$$\overline{\mathrm{CR}}^2=\tfrac{1}{4}aa-zz;$$

donc
$$\frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}=\tfrac{1}{4}aa-zz;$$

d'où l'on tire
$$gg=\frac{y'y'\,(\frac{1}{4}aa-zz)}{\frac{1}{4}b'b'}.$$

Reprenons maintenant l'équation et substituons pour gg et kk les valeurs que nous venons de trouver; nous aurons

$$\tfrac{3}{4}a^2\frac{z^2z'^2}{\frac{1}{4}a'^2z^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{4}a^2-z^2}\times\frac{y'^2(\frac{1}{4}a^2-z^2)}{\frac{1}{4}b'^2}=\tfrac{1}{4}a^2-\frac{y'^2(\frac{1}{4}a'^2-z'^2)}{\frac{1}{4}b'^2}.$$

On en déduit

$$(2)\ldots y'^2=\frac{b'b'}{a'a'}(\tfrac{1}{4}a'a'-z'z');$$

donc

$$y'^2:\tfrac{1}{4}a'^2-z'^2::b'^2:a'^2, \text{ ou } \overline{mO}^2:OM\times OM'::\overline{NN'}^2:\overline{MM'}^2.$$

Ainsi l'équation par rapport à deux diamètres conjugués quelconques, est semblable à celle qu'on a eue à l'égard des deux axes.

309. Si l'on fait $y'=0$, on trouve

$$z'=\pm\tfrac{1}{2}a'.$$

La courbe rencontre donc la ligne MM′ en deux points M et M′ également éloignés du centre C; ainsi *tous les diamètres de l'ellipse se coupent en deux parties égales au centre.*

310. L'équation (2) donnant

$$y'=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{\tfrac{1}{4}a'a'-z'z'},$$

fait voir que si l'on prolonge mO de manière que Om' = Om, le point m' appartiendra à la courbe; donc *chaque diamètre de l'ellipse coupe en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine* M.

311. De là on peut conclure, 1°. que la tangente à l'extrémité N du diamètre NN′ est parallèle au diamètre MM′; 2°. que les ordonnées Om au diamètre MM′ sont celles du cercle qui aurait MM′ pour diamètre, mais diminuées ou augmentées dans le rapport de a' à b', et inclinées sous un angle égal à celui des diamètres conjugués. Si $a'=b'$, ces ordonnées sont précisément égales à celles de ce même cercle. Enfin, si l'on veut savoir à quel endroit de l'ellipse les deux

diamètres conjugués peuvent être égaux, il n'y a qu'à chercher à quel endroit on a CP = CR, ou $\overline{CP}^2 = \overline{CR}^2$, c'est-à-dire $zz = \frac{1}{4}aa - zz$. Or, cette équation donne $z = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, que l'on construira ainsi : ayant décrit sur le grand axe AB, comme diamètre (fig. 37), le demi-cercle ANEB coupé en E par le petit axe CD, on divisera l'arc AE en deux parties égales en N″, et ayant abaissé N″P qui coupe l'ellipse en M″ et M′, CM″ et CM′ seront les deux demi-diamètres conjugués égaux. Car si l'on nomme CP, z, comme le triangle CPN″ est rectangle et isoscèle, à cause de l'angle ACN″ de 45°, on aura

$$z^2 + z^2 = \overline{CN}^2 = \tfrac{1}{4}a^2 = 2z^2 ; \text{ donc } z = \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

312. Si du centre C (fig. 38) on mène la perpendiculaire CF sur la tangente TM, les triangles semblables TPM, TCF, donneront

$$TM : PM :: CT : CF ; \quad \text{d'où} \quad CF = \frac{PM \times CT}{TM}.$$

Pareillement les triangles TPM et CNR, semblables à cause des côtés parallèles, donneront

$$TM : PT :: CN : CR ; \quad \text{donc} \quad CN = \frac{TM \times CR}{PT}.$$

Donc

$$CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT} ;$$

d'où

$$\overline{CN}^2 \times \overline{CF}^2 = \frac{\overline{PM}^2 \times \overline{CT}^2 \times \overline{CR}^2}{\overline{PT}^2},$$

Or, nous avons trouvé (306)

$$\text{ou } \overline{PM}^2 = \frac{bb}{aa}\left(\tfrac{1}{4}aa - zz\right), \quad \overline{CT}^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz},$$

$$\overline{PT}^2 = \frac{\left(\frac{1}{4}aa - zz\right)^2}{zz}, \text{ et (308) } \overline{CR}^2 = \tfrac{1}{4}aa - zz ;$$

substituant ces quantités, on aura, après les réductions faites, $\overline{CN}^2 \times \overline{CF}^2 = \frac{1}{16} a^2 b^2$, et par conséquent $CN \times CF = \frac{1}{4} ab$; or, en menant la tangente NT″, qui rencontre TM en I, CN × CF exprime la surface du parallélogramme CMIN, et $\frac{1}{4} ab$ exprime celle du rectangle formé sur les deux demi-axes; donc *les parallélogrammes formés par les tangentes aux extrémités des diamètres conjugués, sont égaux entre eux, et au rectangle formé sur les deux axes.*

313. Les mêmes triangles semblables TPM et CRN donnent PT : PM :: CR : RN; donc

$$\overline{RN}^2 = \frac{\overline{CR}^2 \times \overline{PM}^2}{\overline{PT}^2} = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa};$$

mais les triangles rectangles CRN et CPM donnent

$$\overline{CR}^2 + \overline{RN}^2 = \overline{CN}^2 \quad \text{et} \quad \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2;$$

donc

$$\overline{CR}^2 + \overline{RN}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{CM}^2;$$

substituant dans le premier membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs algébriques, on aura, toute réduction faite,

$$\frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb = \overline{CN}^2 + \overline{CM}^2;$$

donc *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugues quelconques de l'ellipse, est égale à la somme des carrés des deux demi-axes.*

314. Si dans $\overline{CN}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RN}^2$, on substitue pour CR et RN leurs valeurs, on aura

$$\overline{CN}^2 = \frac{1}{4} aa - zz + \frac{bbzz}{aa};$$

or, nous avons trouvé (306)

$$\overline{TM}^2 = \left(\frac{1}{4} aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right) \times \frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z^2}.$$

Par conséquent,

$$\overline{TM}^2 = \overline{CN}^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz};$$

mais les triangles semblables TPM, MP'T' donnent, en carrant,

$$\overline{PT}^2 : \overline{TM}^2 :: \overline{P'M}^2 : \overline{MT'}^2;$$

ou

$$\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : \overline{CN}^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} :: zz : \overline{MT'}^2;$$

donc

$$\overline{MT'}^2 = \overline{CN}^2 \frac{z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}; \text{ donc } \overline{TM}^2 \times \overline{MT'}^2 = \overline{CN}^4,$$

ou

$$TM \times MT' = \overline{CN}^2;$$

mais, si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM', on aura

$$2CM : 2CN :: 2CN : p' \text{ (307); d'où } \overline{CN}^2 = \tfrac{1}{2}p' \times CM.$$

Donc

$$TM \times MT' = \tfrac{1}{2}p' \times CM; \text{ donc } CM : TM :: MT' : \tfrac{1}{2}p'.$$

Si sur TT', comme diamètre (fig. 40), on décrit un demi-cercle, il passera par le point C, puisque l'angle TCT' est droit; or, si l'on prolonge CM jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en V, on aura, par la nature du cercle (*Géom.* 124),

$$CM : TM :: MT' : MV; \text{ donc } MV = \tfrac{1}{2}p'.$$

315. De là on peut tirer une méthode simple pour avoir les axes d'une ellipse, et par conséquent pour la décrire, lorsqu'on ne connaît que deux diamètres conjugués MM' et NN', avec l'angle qu'ils font entre eux. On prolongera CM d'une quantité MV égale à son demi-paramètre; du milieu X de CV on élevera une perpendiculaire XZ, qui rencontre en Z la ligne indéfinie TT' menée par le point M, parallèlement à NN'; puis du point Z, comme centre, avec la distance

ZC comme rayon, on décrira un cercle qui rencontrera TT' en deux points T et T', par lesquels et le point C tirant TC et T'C, ce seront les directions des deux axes. On déterminera ensuite la grandeur de ces axes, en abaissant les perpendiculaires MP et MP', et prenant CA égal à la moyenne proporntionelle entre CT et CP, et CD égal à la moyenne proportionnelle entre CT' et CP'; car on a vu ci-dessus (301) que CP : CA :: CA : CT; il est aisé de prouver, par le moyen des triangles semblables TPM et TCT', et des valeurs connues de TP, PM et CT, que $CT' = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP'}}$, c'est-à-dire que CP' : CD :: CD : CT'.

316. Remarquons, en finissant ce qui regarde l'ellipse, qu'on emploie souvent cette courbe dans l'architecture navale. On s'en sert pour déterminer les diamètres moyens des *vergues*, comme nous avons vu ci-dessus qu'on s'en servait pour les diamètres moyens des *mâts*. On l'emploie encore pour déterminer les projections des *lisses*, etc. Dans tous ces cas, on part, pour décrire l'ellipse, de la propriété qu'a cette courbe, savoir, que ses ordonnées sont proportionnelles à celles du cercle décrit sur l'un de ses axes. C'est encore sur ce principe qu'est fondée la règle suivante, que l'on donne pour construire le *maître couple* d'un navire auquel on veut donner beaucoup de capacité. Supposant (fig. 41) que AE est égal à la ligne du *creux*; EM perpendiculaire à AE, la demi-largeur du vaisseau; MF le *demi-plat* de la *varangue*; FB = EI l'*acculement*; on décrit à part un carré *opqr*, dont on fait le côté *op* = EF. Ayant divisé *op* en un certain nombre de parties égales, et AI en un pareil nombre de parties, on mène, par les points de division, des perpendiculaires à *op* et AI; puis décrivant du point *r*, comme centre, et du rayon *ro*, le quart de cercle *onq*, on porte la partie *mn* de chaque parallèle à *pq*, en *m'n'* sur la parallèle à IB, correspondante à pareille division; la courbe A*n'*B, qui passe par tous les points *n'* ainsi déterminés, forme une partie du maître couple, qu'on achève ensuite, pour la partie inférieure, en menant du

point B au point C, bord de la quille, la ligne BC, élevant sur son milieu *l*, la perpendiculaire *lk* qui coupe en *k* la ligne B*k* parallèle à AE; alors du point *k*, comme centre, avec le rayon *k*B, on décrit l'arc de cercle BC qui touche la courbe A*n'*B au point B, parce que son centre *k* est sur la perpendiculaire à la courbe A*n'*B, au point B. L'autre moitié se construit de même.

Il est facile de voir maintenant que la courbe dont il s'agit est une ellipse dont le demi-grand axe est BT = AI, et le demi-petit axe AT*pq* = EF; en effet, si par le point (*) *n'* et par le point *n* on mène *n'n*, cette ligne sera parallèle à AE; et puisque les points *m* et *m'* sont deux points de division correspondans, on aura *om* : A*m'* :: *op* : AI; c'est-à-dire en supposant que *nn'* rencontre *or* en *s* et AT en *u*, *sn* : *un'* :: *or* ou AT : TB; donc les ordonnées *un'* de la courbe A*n'*B sont aux ordonnées *sn* du quart de cercle, toujours dans le rapport de BT à AT; donc cette courbe est une ellipse : d'ailleurs il est facile de voir que BT et AT sont les demi-axes. Or, comme l'ellipse rencontre perpendiculairement ses axes, il est visible que pour joindre le point B et le point C par un arc qui touche la courbe en B, il faut que le centre *k* de cet arc soit sur la ligne TB prolongée.

De l'Hyperbole.

317. Considérons maintenant la courbe (fig. 42) qui aurait, en chacun de ses points M, cette propriété, que la différence M*f* — MF des distances M*f* et MF à deux points fixes F et *f*, fût toujours la même, et égale à une ligne donnée *a*. Nous allons chercher, comme nous l'avons fait pour l'ellipse, une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires PM, menées sur la ligne F*f*, et leurs distances FP ou AP à quelque point fixe F ou A, pris arbitrairement sur la ligne F*f*. Je prends donc, pour origine des abscisses, le point A déterminé en prenant depuis le milieu C de F*f*, la ligne

(*) Nous supposons ici, pour faciliter la démonstration, qu'on a placé le côté *op* sur le prolongement de IA.

$CA = \frac{1}{2}a$, et je fais $CB = CA$. Cela posé, je nomme AP, x; PM, y; la ligne AF, qui est censée connue, c; et la ligne FM, z; alors

$$FP = AF - AP = c - x \text{ (*)},$$
$$fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x.$$

Mais

$$Mf - MF = a; \text{ donc } Mf = a + MF = a + z.$$

Les triangles rectangles FPM, fPM donnent

$$\overline{FP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{FM}^2; \quad \text{et} \quad \overline{fP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{fM}^2;$$

c'est-à-dire

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2,$$
$$\text{et} \quad c^2 + 2ac + a^2 + 2cx + 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + 2az + z^2.$$

Retranchant la première de ces deux équations de la seconde, on a

$$4cx + 2ac + 2ax = 2az; \quad \text{d'où} \quad z = \frac{2cx + ac + ax}{a};$$

mettant donc, pour z, cette valeur dans la première équation, nous aurons..... $cc - 2cx + xx + y^2 = \frac{4ccxx + 4accx + aacc + 4acxx + 2aacx + aaxx}{aa}$; d'où

$$(1)\ldots. \quad y^2 = \frac{(4ac + 4cc)}{aa}(ax + xx).$$

318. Cette équation peut servir à décrire la courbe, par des points trouvés successivement, en donnant à x plusieurs valeurs. On peut encore décrire la courbe par points, en prenant arbitrairement une partie Br plus grande que BF, et décrivant du point f, comme centre, et du rayon Br, un arc que l'on coupera en quelque point M par un autre arc décrit du point F, comme centre, avec le rayon Ar.

(*) Si le point P était au-delà de F par rapport à A, FP serait $x - c$, mais cela ne changerait rien à l'équation finale.

Enfin on peut décrire cette même courbe par un mouvement continu, de la manière suivante. On fixera au point f une règle indéfinie qui puisse tourner autour de ce point. Au point F et à l'un des points Q de cette règle, on attachera les extrémités d'un fil FMQ, moins long que fQ, et dont la différence avec fQ soit égale à AB; alors, par le moyen d'une pointe, ou style M, on appliquera une partie MQ du fil, suivant la règle : faisant alors mouvoir le style, de M vers A, en tenant toujours le fil tendu, la règle s'abaissera, la partie FM diminuera, et le style M décrira la courbe MA dont il s'agit, et qu'on appelle une *hyperbole*. En effet, il est évident que la totalité fQ ou $fM + MQ$ étant toujours de même grandeur, et la longueur FM + MQ étant toujours la même, leur différence $fM + MQ - FM - MQ$, ou $fM - FM$, sera toujours constante et $= BA = a$.

319. L'équation (1) donnant

$$(2)\ldots\ y = \pm\sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)},$$

fait voir que, pour une même abscisse $AP = x$, on a toujours deux ordonnées égales PM, PM', qui tombent de part et d'autre du prolongement de AB qu'on appelle le *premier axe* : ainsi la courbe a une seconde branche AM' parfaitement égale à la première; l'une et l'autre s'étendent à l'infini, puisqu'il est évident que plus on augmentera x, plus les deux valeurs de y augmenteront.

320. Si l'on fait x négatif dans la formule (2), il viendra

$$y = \pm\sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa}(x^2 - ax)};$$

or $xx - ax$, ou $x(x - a)$, étant négatif tant que x est plus petit que a, les valeurs de y sont alors imaginaires, et par conséquent y n'a aucune valeur réelle depuis A jusqu'à B; mais sitôt que x surpasse a, $xx - ax$ redevenant positif, les valeurs de y redeviennent réelles; il part donc du point B

une nouvelle portion de courbe $m\mathrm{B}m'$ qui, comme la première, s'étend à l'infini de chaque côté du prolongement de AB, et qui est parfaitement égale à celle-là, parce que si l'on prend $\mathrm{B}p = \mathrm{AP}$, alors $xx - ax$ ou $\mathrm{A}p \times p\mathrm{B}$ devient égal à $\mathrm{AP} \times \mathrm{PB}$; donc aussi pm est égale à PM.

321. Si dans l'équation (2) on fait $y = 0$, on trouvera que $ax + xx$ ou $x(a + x) = 0$, qui donne $x = 0$, et $x = -a$; donc la courbe rencontre l'axe AB aux deux points A et B.

322. Si l'on suppose $\mathrm{AP} = \mathrm{AF}$, c'est-à-dire $x = c$, pour avoir la valeur de l'ordonnée $\mathrm{F}m''$ qui passe par le point F (qu'on appelle le *foyer*, ainsi que le point f), la formule (2) donnera

$$y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{a^2}(4ac + 4c^2)\,(ac + c^2)} = \pm\tfrac{2}{a}(ac + c^2).$$

Donc la double ordonnée $m''m''' = \frac{4}{a}(ac + c^2)$:

cette ligne est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'hyperbole; ainsi, en représentant cette ligne par p, on aura

$$p = \frac{4(ac + cc)}{a}, \text{ et par conséquent } \frac{p}{a} = \frac{4(ac + cc)}{aa};$$

substituant dans l'équation de la courbe, on la changera en cette autre plus simple,

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax + xx).$$

De la valeur de p, on peut conclure que *le paramètre du premier axe de l'hyperbole est plus grand que le quadruple de la distance du sommet* A *au foyer* F; car cette valeur se réduit a $p = 4c + \frac{4cc}{a}$, qui est évidemment plus grande que $4c$.

323. Si sur le milieu C de AB, on élève une perpendiculaire DD', dont la moitié CD soit moyenne proportionnelle entre c et $a + c$, c'est-à-dire entre AF et fA, cette perpendiculaire

est ce qu'on appelle le *second axe* de l'hyperbole; ainsi, en la nommant b, on aura

$$\tfrac{1}{4}b^2 = c(a+c), \quad \text{ou} \quad bb = 4ac + 4cc,$$

et, introduisant cette valeur de bb dans l'équation (1) du n° 317, celle-ci se changera en

$$(3)\ldots\ y^2 = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$$

On voit donc que ces trois équations de l'hyperbole ne diffèrent des trois équations correspondantes de l'ellipse, que par le signe du carré cc et du carré xx.

L'équation (3) nous fournit aussi une propriété analogue à celle que nous avons remarquée dans l'ellipse: en effet, si l'on chasse le dénominateur aa, on aura

$$aayy = bb(ax + xx), \text{ qui donne cette proportion}$$
$$yy : ax + xx :: bb : aa,$$

ou $\overline{PM}^2 : AP \times PB :: \overline{D'D}^2 : \overline{AB}^2$ ou $:: \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2$;

donc *le carré d'une ordonnée au premier axe de l'hyperbole, est au produit* AP × BP *des deux abscisses, comme le carré du second axe est au carré du premier*; et par conséquent, *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

Lorsque les deux axes a et b sont égaux, l'équation est $yy = ax + xx$ qui ne diffère de celle du cercle que par le signe du carré xx. L'hyperbole s'appelle alors *hyperbole équilatère.*

De l'équation $p = \dfrac{4ac + 4cc}{a}$, on tire $4ac + 4cc = ap$, et puisqu'on a aussi $4ac + 4cc = bb$, on a donc $ap = bb$, qui donne $a : b :: b : p$; donc *le paramètre du premier axe est une troisième proportionnelle à ce premier axe et au second.*

324. Si du point D au point A, on tire la droite DA, le triangle rectangle DCA donnera

$$DA = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}aa},$$

ou, mettant pour bb sa valeur $4ac+4cc$,

$$\sqrt{cc+ac+\tfrac{1}{4}aa}=c+\tfrac{1}{2}a=\text{AF}+\text{CA}=\text{CF}.$$

Donc, pour avoir les foyers quand on a les axes, il faut porter DA de C en F et en f; et au contraire, pour avoir le second axe quand on a le premier et les foyers, il faut décrire du point A, comme centre avec le rayon CF, un arc qui coupe la perpendiculaire DD′, en quelque point D.

325. On voit aussi que la description de l'hyperbole dépend de deux quantités, savoir, le grand axe et le petit axe; ou le grand axe et les foyers; ou le grand axe et le paramètre. D'après ce que nous venons de dire, on ramenera toujours aisément la description de l'hyperbole à l'une des méthodes que nous venons d'indiquer. Car si l'on donnait, par exemple, le grand axe et le paramètre, alors prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes, on aurait le second axe, qui servirait à trouver les foyers.

326. Si l'on prend sur Mf, la partie MG = MF, et qu'ayant tiré FG on lui mène du point M la perpendiculaire MOT, cette ligne sera tangente à l'hyperbole, c'est-à-dire ne rencontrera la courbe qu'au seul point M. En effet, d'un autre point quelconque N, pris sur TM, menons aux deux foyers les droites Nf et NF, et au point G la droite NG; il est évident, par la construction, que NF et NG seront égales; or Nf est plus petit que NG + Gf, et par conséquent plus petit que NF + Gf; donc Nf — NF est plus petit que Gf, c'est-à-dire que Mf — MF; donc le point N est hors de l'hyperbole : on démontrera la même chose de tout point de TM, autre que le point M.

Les angles FMO et OMG sont égaux, d'après la construction précédente : or OMG est égal à son opposé NMQ; donc FMO est égal à NMQ; donc la ligne MF, menée au foyer F, fait avec la tangente le même angle que fait, avec cette même tangente, le prolongement MQ de la ligne fM qui va à l'autre foyer. Donc *si le point* F *est un point*

lumineux, tous les rayons qui, partis du point F, *tomberont sur la concavité* MAM', *se réfléchiront comme s'ils partaient du point* f.

327. Déterminons maintenant la *sous-tangente* PT. Puisque l'angle FM*f* est divisé en deux parties égales par la tangente MT, on aura (*Géom.* 104) $fM : MF :: fT : FT$; or, en nommant, comme ci-dessus, MF, z, on a $fM = z + a$; d'ailleurs F*f* ou B*f* + AB + AF valant $a + 2c$, la ligne *f*T ou F*f* — FT vaudra $a + 2c - FT$; on aura donc

$$z + a : z :: a + 2c - FT : FT;$$

d'où

$$FT = \frac{(2c + a)z}{2z + a}. \quad \text{Or (317)}, \quad z = \frac{2cx + ac + ax}{a}.$$

Donc, substituant cette valeur de z dans celle de FT, on trouvera

$$FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}.$$

Ayant trouvé FT, il est aisé d'avoir la sous-tangente PT; car

$$PT = FT - FP = FT - AF + AP = FT - c + x$$
$$= \frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a};$$

d'où l'on voit que l'expression de la sous-tangente, pour l'hyperbole, ne diffère que par les signes de celle qu'on a eue pour l'ellipse.

328. Si de PT on retranche AP, on aura AT ou la distance du sommet au point où la tangente rencontre l'axe. Cette distance se réduit à $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

329. Cette expression de AT nous donne lieu de faire quelques remarques sur la courbure de l'hyperbole. Nous avons vu ci-dessus que chacune des deux branches AM', AM, s'étendait à l'infini. Cependant leur courbure est telle, que toutes

les tangentes que l'on peut mener à chacun des points de ces branches infinies, ne rencontrent jamais l'axe que dans l'intervalle compris entre A et C. En effet, si dans la valeur de AT on substitue, pour x, toutes les quantités imaginables depuis o jusqu'à l'infini, la valeur de AT ne croît que depuis o jusqu'à $\frac{1}{2}a$; car quand x est infini, le dénominateur $\frac{1}{2}a+x$ doit essentiellement être regardé comme la même chose que x, puisque si l'on conservait alors $\frac{1}{2}a$, ce serait supposer qu'il peut augmenter x, et détruire, par conséquent, la supposition qu'on fait que x est infini; or, dans ce cas, la quantité AT se réduit à $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}a$; donc la tangente à l'extrémité infinie de chaque branche AM et AM′ passe par le centre C. Or les branches opposées Bm et Bm' sont parfaitement égales à celles-là; d'ailleurs les points A et B sont également distans de C; donc ces mêmes tangentes le sont aussi aux extrémités infinies des branches Bm et Bm'. On les voit (fig. 43) représentées par les lignes CX, CY.

330. Ces tangentes s'appellent les *asymptotes* de l'hyperbole: ce sont, comme on le voit, des lignes qui, partant du centre, s'approchent sans cesse de l'hyperbole, sans pouvoir l'atteindre qu'à une distance infinie. Si par le sommet A (fig. 42), on mène la droite At parallèle à PM, les triangles semblables TAt, TPM, donnent

$$\text{TP} : \text{PM} :: \text{TA} : \text{A}t,$$

c'est-à-dire

$$\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} : y :: \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} : \text{A}t = \frac{1}{2}\left(\frac{ay}{a+x}\right),$$

ou, en mettant pour y sa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{ax+xx}$,

$$\text{A}t = \frac{1}{2}\,\frac{b\sqrt{ax+xx}}{a+x},$$

qui, lorsque x est infini, devient $\frac{1}{2}b$ ou CD, parce que ax doit être supprimé vis-à-vis de xx, et a vis-à-vis de x. Voici

donc comment on déterminera les asymptotes : on élevera au point A (fig. 43) une perpendiculaire AL, que l'on prolongera de part et d'autre du point A d'une quantité égale à CD ; alors tirant par le centre C et par les deux extrémités L et L' deux lignes droites, elles seront les asymptotes.

331. Pour avoir l'expression de CT (fig. 42), il faut de CA retrancher AT, et l'on aura

$$\mathrm{CT} = \tfrac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{\overline{\mathrm{CA}}^2}{\mathrm{CP}},$$

qui donne CP : CA :: CA : CT.

332. Si l'on veut avoir l'expression de TM, le triangle rectangle TPM donne

$$\overline{\mathrm{TM}}^2 = \overline{\mathrm{PM}}^2 + \overline{\mathrm{PT}}^2 = \frac{bb}{aa}(ax + xx) + \frac{(ax+xx)^2}{(\frac{1}{2}a+x)^2}$$
$$= \left[\frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{2}a + x)^2 + ax + xx\right] \times \frac{ax+xx}{(\frac{1}{2}a+x)^2}.$$

333. Pour avoir l'expression de PI ou de la sous-normale, les triangles TPM, MPI, semblables parce que l'angle TMI est droit et que PM est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit, donneront

$$\mathrm{TP} : \mathrm{PM} :: \mathrm{PM} : \mathrm{PI},$$

ou $\dfrac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} : y :: y : \mathrm{PI} = \dfrac{y^2(\frac{1}{2}a+x)}{ax+xx}$;

ou, à cause de

$$y^2 = \frac{bb}{aa}(ax + xx), \quad \mathrm{PI} = \frac{bb}{aa}(\tfrac{1}{2}a + x).$$

334. Cherchons maintenant l'équation par rapport au second axe DD', et pour cet effet menons la perpendiculaire MP' sur ce second axe, et faisant

$$\mathrm{MP}' = y', \quad \mathrm{DP}' = x',$$

on aura

$$CP' = PM = y = \tfrac{1}{2}b - x' \; ; \; P'M = CP = \tfrac{1}{2}a + x = y' \; ;$$

et par conséquent $x = y' - \frac{1}{2}a$; substituant donc, pour x et y, ces valeurs dans l'équation (3) du n° 323, on aura

$$(4) \ldots y'y' = \frac{a^2}{b^2}(\tfrac{1}{4}bb - bx' + x'x') \; ;$$

d'où l'on voit qu'il n'en est pas de l'hyperbole comme de l'ellipse, l'équation, à l'égard du second axe, n'est pas semblable à celle qu'on a à l'égard du premier.

335. Enfin, si l'on veut l'équation par rapport à l'axe AB, en prenant les abscisses depuis le centre C, on fera

$$CP = z \; ; \text{ d'où } z = CA + AP = \tfrac{1}{2}a + x \; ; \text{ donc } x = z - \tfrac{1}{2}a \; ;$$

substituant dans l'équation (3) du n° 323, on aura

$$yy = \frac{bb}{aa}(zz - \tfrac{1}{4}aa),$$

pour l'équation par rapport au premier axe, les abscisses étant comptées du centre.

Et à l'égard du second axe DD', si l'on nomme CP', z', on aura $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$; donc $x' = \frac{1}{2}b - z'$; substituant dans l'équation (4), on aura

$$y'y' = \frac{aa}{bb}(z'z' + \tfrac{1}{4}bb).$$

336. Si l'on veut rapporter au centre C, les expressions de PT, CT, PI et TM, trouvées ci-dessus, il n'y a qu'à substituer dans ces expressions, $z - \frac{1}{2}a$ au lieu de x, et l'on trouvera

$$TP = \frac{1}{z}(z^2 - \tfrac{1}{4}a^2), \; CT = \frac{a^2}{4z}, \; PI = \frac{b^2}{a^2}z;$$

$$\overline{TM}^2 = \left(\frac{b^2}{a^2}z^2 + z^2 - \tfrac{1}{4}a^2\right)\left(\frac{z^2 - \frac{1}{4}a^2}{z^2}\right).$$

Et si l'on prolonge MT jusqu'à ce qu'elle rencontre le

second axe en T', les triangles semblables TPM, TCT' donneront

$$TP : PM :: CT : CT',$$

ou $$\frac{zz-\frac{1}{4}aa}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT' = \frac{\frac{1}{4}aay}{zz-\frac{1}{4}aa};$$

mais

$$zz-\tfrac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}; \text{ donc } CT' = \frac{\frac{1}{4}b^2}{y} = \frac{\overline{CD}^2}{MP} = \frac{\overline{CD}^2}{CP};$$

donc $$CP : CD :: CD : CT'.$$

337. Si par le centre C de l'hyperbole (fig. 43) on mène une droite quelconque MCM', terminée de part et d'autre à l'hyperbole, cette droite s'appelle un *diamètre*. Toute droite mO menée d'un point m de la courbe, parallèlement à la tangente en M, et terminée au diamètre MM' prolongé, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre; MO et OM' en sont les *abscisses*. Nous allons démontrer que les propriétés des ordonnées mO, à l'égard des diamètres terminés à la courbe, sont les mêmes que celles des ordonnées PM à l'égard du premier axe. Menons des points m et O les perpendiculaires mp et OQ sur l'axe AB, et du point m menons mS parallèle à AP; soit $PM = y$, $CP = z$, $Qp = g$, $CQ = k$; nous aurons $AP = z - \frac{1}{2}a$; $BP = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = Cp - CA = CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$; $Bp = Cp + BC = k - g + \frac{1}{2}a$.

Les triangles semblables CPM, CQO donnent.....

$CP : PM :: CQ : QO$, c'est-à-dire $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$.

Les triangles semblables TPM, mSO, donnent $PT : PM :: mS$ ou $Qp : SO$; c'est-à-dire (336)

$$\frac{zz-\frac{1}{4}aa}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{zz-\frac{1}{4}aa};$$

donc $$mp = SQ = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz-\frac{1}{4}aa};$$

or, puisque le point m appartient à l'hyperbole, il faut (323)

que l'on ait $\overline{pm}^2 : \overline{PM}^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$. Cette proportion donne

$$(1)\ldots\ -\tfrac{1}{4}\frac{aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \tfrac{1}{4}aa,$$

équation qui va nous servir à démontrer la propriété dont il s'agit. Mais auparavant nous ferons observer que si de part ou d'autre du centre C, on prend sur l'axe AB la partie CR qui soit moyenne proportionnelle entre BP et AP, c'est-à-dire telle que $\overline{CR}^2 = AP \times BP = zz - \frac{1}{4}ad$; et qu'ayant élevé la perpendiculaire RN′, terminée en N′ par la ligne NN′, menée par le centre C parallèlement à TM, on fasse CN = CN′, alors NN′ est ce qu'on appelle *un diamètre conjugué* au diamètre MM′, et le *paramètre* du diamètre MM′ est une troisième proportionnelle à MM′ et NN′. Revenons maintenant à notre objet; soit

$$CM = \tfrac{1}{2}a'; \ CN = CN' = \tfrac{1}{2}b'; \ CO = z', \text{ et } Om = y'.$$

Les triangles semblables CPM, CQO donnent

$$CM : CP :: CO : CQ; \quad \text{c'est-à-dire } \tfrac{1}{2}a' : z :: z' : k = \frac{2zz'}{a'}.$$

Les triangles *m*SO et CN′R, semblables à cause des côtés parallèles, donnent

$$CN' : CR :: mO : mS, \quad \text{ou } \tfrac{1}{2}b' : CR :: y' : g = \frac{2y' \times CR}{b'};$$

donc

$$g^2 = \frac{4y'^2 \times C^2}{b'^2}; \text{ or } CR^2 = z^2 - \tfrac{1}{4}a^2; \text{ donc } g^2 = \frac{4y'^2z^2 - a^2y'^2}{b'^2}.$$

Mettant ces valeurs de g^2 et k^2, dans l'équation (1), on trouvera (2) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; équation semblable à celle qu'on a eue pour le premier axe.

338. $y' = 0$ donne $z' = \pm\frac{1}{2}a'$; la courbe rencontre donc la ligne MM′, en deux points opposés M et M′, éloignés du

centre, chacun de la quantité $\frac{1}{2}a'$, ou CM; ainsi tous les diamètres sont coupés en deux parties égales au centre.

339. L'équation (2) donnant deux valeurs égales et de signe contraire, pour y', fait voir que si l'on prolonge mO de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe; chaque diamètre MM' coupe donc en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine M.

340. La même équation donne $y'y' : x'x' - \frac{1}{4}a'a' :: b'b' : a'a'$, ou $\overline{mO}^2 : MO \times OM' :: \overline{NN'}^2 : \overline{MM'}^2$; c'est-à-dire que *le carré d'une ordonnée quelconque mO à un diamètre, est au produit* $MO \times OM'$ *de ses deux abscisses, comme le carré du diamètre conjugué est au carré de ce premier diamètre.*

341. Si du centre C on abaisse sur TM la perpendiculaire CF, les triangles semblables CFT, TPM, donneront...., $TM : PM :: CT : CF$, et par conséquent $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Les triangles semblables CRN', TPM donneront..... $PT : TM :: CR : CN'$ ou CN; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; donc

$$CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT},$$

donc $\overline{CF}^2 \times \overline{CN}^2 = \frac{\overline{PM}^2 \times \overline{CT}^2 \times \overline{CR}^2}{\overline{PT}^2}$; or, $\overline{PM}^2 = yy \ldots = \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$; $\overline{CR}^2 = zz - \frac{1}{4}aa$ (337); $\overline{CT}^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$, ... $\overline{PT}^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$ (336); substituant ces valeurs, on trouve $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$; or, si l'on prolonge MT jusqu'à l'asymptote, en I, MI sera égal à CN, comme nous le verrons ci-dessous, et CINM sera, par conséquent, un parallélogramme dont la surface sera $CF \times MI = CF \times CN$; donc, quelque part où soit le point M, le parallélogramme CIMN sera toujours égal en surface au rectangle des deux demi-axes, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$, ou $\frac{1}{4}ab$.

342. Les triangles semblables TPM et CRN′ donnent $TP : PM :: CR : RN'$; donc $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, et $\overline{RN'}^2 = \frac{\overline{PM}^2 \times \overline{CR}^2}{\overline{PT}^2} = \frac{bbzz}{aa}$, après avoir substitué les valeurs algébriques et fait les réductions; or les triangles rectangles CPM et CRN′ donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$, et $\overline{CN'}^2$ ou..... $\overline{CN}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RN'}^2$; donc $\overline{CM}^2 - \overline{CN}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 - \overline{CR}^2 - \overline{RN'}^2$; substituant dans le second membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs algébriques trouvées ci-dessus, on aura, après les réductions faites, $\overline{CM}^2 - \overline{CN}^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; c'est-à-dire que *la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques, est toujours la même, et est égale à la différence des carrés des deux demi-axes.* Ainsi, dans l'hyperbole équilatère, chaque diamètre est égal à son conjugué.

343. Si dans $\overline{CN}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RN'}^2$, on substitue pour $\overline{CR}^2$ et $\overline{NR'}^2$ leurs valeurs algébriques, on aura..... $\overline{CN}^2 = zz - \frac{1}{4}a^2 + \frac{bbzz}{aa}$; or nous avons trouvé (336), $\overline{TM}^2 = \left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right)\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$; donc $\overline{TM}^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz} \times \overline{CN}^2$; mais les triangles semblables MPT et MP′T′ donnent $\overline{PT}^2 : \overline{TM}^2 :: \overline{P'M}^2 : \overline{T'M}^2$, donc $\overline{T'M}^2 = \frac{\overline{CN}^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4}aa}$; donc $\overline{TM}^2 \times \overline{T'M}^2 = \overline{CN}^4$, ou $TM \times T'M = \overline{CN}^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM′, on aura..... $2CM' : 2CN :: 2CN : p'$ et par conséquent $\overline{CN}^2 = \frac{1}{2}p' \times CM'$: donc $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM'$; d'où $CM' : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

344. De là on peut conclure la méthode suivante pour avoir les axes de l'hyperbole, et par conséquent pour décrire cette

courbe, lorsqu'on ne connaît que deux diamètres conjugués, et l'angle qu'ils font entre eux. On prendra sur MC (fig. 44) une ligne $MH = \frac{1}{2}p'$, et sur le milieu I de CH on élevera une perpendiculaire IK, qui coupera en quelque point K la ligne MT', menée par le point M parallèlement au conjugué NN'. De ce point K, comme centre, avec un rayon égal à la distance de K à C, on décrira un cercle qui rencontrera MT' aux deux points T et T', par lesquels et par le centre C tirant TC et CT', ces lignes seront les directions des axes; car il est clair, 1°. que l'angle TCT' sera droit, puisque la circonférence passe par le point C, et qu'elle a TT' pour diamètre. 2°. Par la nature du cercle, on a (*Géom.* 127) CM : TM :: MT' : MH; donc puisqu'on a fait $MH = \frac{1}{2}p'$, on a CM : TM :: T'M : $\frac{1}{2}p'$. Ayant ainsi déterminé les directions des axes, on en déterminera la grandeur en abaissant du point M les perpendiculaires MP, MP', et prenant CA moyenne proportionnelle entre CP et CT, et CD' moyenne proportionnelle entre CP' et CT'; c'est une suite des expressions que nous avons trouvées (336) pour CT et CT'. Quand les deux diamètres conjugués que l'on connaît sont égaux, alors le paramètre leur est égal aussi, ce qui rend MH = MC. Les deux points de sections H et C se confondant alors, MC est une tangente au cercle; ainsi il faut tout simplement, pour avoir le centre K, élever sur CM une perpendiculaire au point C.

De l'hyperbole entre ses asymptotes.

345. L'hyperbole considérée, par rapport à ses asymptotes, a quelques propriétés dont la connaissance peut être utile; nous allons les exposer. Il faut se rappeler ici comment on détermine les asymptotes. (*Voy.* 330.) Nous allons rapporter chaque point E de l'hyperbole (fig. 45) aux deux asymptotes CLO, CL'*o*, en menant la ligne EQ parallèle à l'une d'entre elles, et nous chercherons la relation qu'ont entre elles les lignes EQ et CQ. Pour trouver cette relation, nous menerons par le point quelconque E, la ligne OE*o* parallèle au second

axe DD', et la ligne ES parallèle à CLO; par le sommet A nous tirerons AG parallèle à CL'o. Soit

$$CA = \tfrac{1}{2}a;\ CD = AL = AL' = \tfrac{1}{2}b;\ CP = z,$$
$$PE = y;\ AG = m;\ GL = n;\ CQ = t;\ QE = u.$$

Les triangles semblables CPO, CAL, donnent CA : AL :: CP : PO; d'où $PO = Po = \frac{bz}{a}$; donc $EO = \frac{bz}{a} - y$, et $Eo = \frac{bz}{a} + y$; donc $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$, en mettant pour yy sa valeur $\frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$; donc $EO \times Eo = \overline{CD}^2 = \overline{AL}^2$; propriété qui appartient à tout point de l'hyperbole, puisque le point E a été pris arbitrairement.

346. Les triangles QEO, ESo et AGL, semblables entre eux, donnent AL : AG :: EO : EQ; et AL : GL :: Eo : ES; donc, multipliant ces deux proportions par ordre, afin d'y introduire $EO \times Eo$ dont on a la valeur, on aura..... $\overline{AL}^2 : AG \times GL :: EO \times Eo : EQ \times ES$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}bb : mn :: \frac{1}{4}bb : ut$; donc $ut = mn$; équation de l'hyperbole entre ses asymptotes. Ainsi en quelque point E que ce soit de l'hyperbole, on a toujours $EQ \times ES$, ou plutôt..... $EQ \times CQ = AG \times GL$. Or si l'on suppose que le point E tombe en A, CQ devient CG, et QE devient AG; on a donc $CG \times AG = AG \times GL$; donc $CG = GL$. Mais le point G se trouvant, par là, être le milieu de CL, on doit avoir $CG = AG = GL$; car le cercle décrit sur CL comme diamètre, lequel aurait par conséquent CG pour rayon, passerait par le point A, à cause de l'angle droit A; on a donc $m = n$; et par conséquent, $ut = m^2 = \overline{CG}^2$. Ce carré constant m^2 ou $\overline{CG}^2$, auquel le produit ut ou $CQ \times QE$ est toujours égal, s'appelle la *puissance* de l'hyperbole.

347. De la propriété que nous venons de démontrer, on peut déduire cette autre : *d'un point quelconque* E *de l'hyper-*

bole, si l'on tire, de quelque manière que ce soit, une droite REr *terminée aux asymptotes, les parties* RE, mr, *interceptées entre la courbe et les asymptotes, seront égales.* Car si par le point m on mène hmH parallèle à OEo, les triangles semblables REO et RmH donnent ER : Rm :: EO : Hm; et les triangles semblables rhm et roE donnent Er : mr :: Eo : mh; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura

$$ER \times Er : Rm \times mr :: EO \times Eo : Hm \times mh;$$

or les deux produits $EO \times Eo$ et $Hm \times mh$ sont égaux chacun à $\overline{CD}^2$ (345); donc $ER \times Er = Rm \times mr$, ou..... $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; faisant les multiplications indiquées, et supprimant de part et d'autre $ER \times mr$, on aura $ER \times Em = Em \times mr$; donc $ER = mr$.

348. De là on conclura que toute tangente Tt à l'hyperbole, terminée aux asymptotes, est divisée en deux parties égales au point de contact M.

349. Si, par le point M, on tire IM parallèle à DD′, et si par un point quelconque E, on tire REr parallèle à la tangente Tt, les triangles semblables TMI et REO donneront TM : IM :: RE : EO; et les triangles semblables Mit, Eor donneront Mt ou TM : Mi :: Er : Eo; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura..... $\overline{TM}^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$; or les deux produits $MI \times Mi$ et $EO \times Eo$ sont chacun égaux à $\overline{CD}^2$; donc $\overline{TM}^2 = RE \times Er$.

350. Si du centre C on mène le diamètre CMV, il divisera en deux parties égales la ligne Rr parallèle à Tt, puisque (348) il passe par le milieu M de Tt; nommant donc CM, $\frac{1}{2}a'$; TM, $\frac{1}{2}q$; CV, z'; l'ordonnée VE, y'; les triangles semblables CMT, CVR, donneront CM : MT :: CV : VR, c'est-à-dire $\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}q$, ou $a' : q :: z' : VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; donc

$RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, et $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; donc, puisque.... $RE \times Er = \overline{TM}^2 = \frac{1}{4}qq$, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; or, (337) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; substituant, on aura... $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$; d'où $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, c'est-à-dire MT = CN, CN étant le demi-diamètre conjugué de CM; c'est ce que nous avons promis (341) de démontrer. On a donc (fig. 43) MI = CN.

351. On a donc aussi, pour toute droite RE parallèle au demi-diamètre conjugué CN (fig. 45), $RE \times Er = \overline{CN}^2$.

352. On voit donc que, connaissant deux demi-diamètres conjugués CM, CN (fig. 46), et l'angle qu'ils font entre eux, il est très facile de décrire l'hyperbole par des points trouvés successivement. En effet, ce qui a été dit (348 et 350) fait voir qu'en menant par l'origine M du demi-diamètre CM la ligne TM*t* parallèle à CN, et prenant de part et d'autre du point M les parties MT, M*t* égales chacune à CN, si par le centre C on tire les lignes CT et C*t*, elles seront les asymptotes. Et ce qui a été démontré (347) fait voir que si, par le point M, on tire arbitrairement tant de droites PMQ, PMQ, etc., qu'on voudra, et qu'on fasse sur chacune PO = MQ, les points O, trouvés de cette manière, appartiendront tous à l'hyperbole cherchée. On peut ensuite faire servir chaque point O à en trouver d'autres tels que V, V, etc., en tirant les droites ROS, ROS, etc., et faisant SV = RO.

353. On voit aussi par là comment, entre deux lignes données pour asymptotes, on peut décrire une hyperbole qui passe par un point donné entre ces lignes.

354. Enfin, en divisant l'angle des asymptotes et son supplément, chacun en deux parties égales, on aura les directions des deux axes, dont on déterminera la grandeur comme il a

été dit 344, ce qui donne un second moyen de résoudre la question dont il s'agissait au même endroit.

De la Parabole.

355. Il s'agit maintenant de trouver les propriétés de la courbe dont chaque point serait aussi éloigné d'un point fixe F (fig. 47) que d'une droite XZ dont la position est connue, c'est-à-dire d'une courbe telle, que pour chaque point M, abaissant la perpendiculaire MH, on ait toujours MF = MH. Du point F menons FV perpendiculaire sur XZ, et partageons FV en deux parties égales en A; A sera un point de la courbe, puisque AV = AF; ce point est le *sommet*. Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *parabole*, nous allons chercher une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires MP, abaissées sur FV, et leurs distances AP au point A. Nous nommerons donc AV ou AF, c; AP, x; PM, y; alors nous aurons..... VP = AV + AP = $c + x$ = MH; et puisque MF = MH, nous aurons aussi MF = $c + x$; d'ailleurs FP = AP − AF = $x - c$; or, le triangle rectangle FPM donne $\overline{EP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{FM}^2$; donc $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; donc transposant et réduisant, $yy = 4cx$; c'est là l'équation de la courbe; et voici ce qu'elle nous apprend. 1°. Cette équation donne $y = \pm\sqrt{4cx}$; donc, pour une même valeur de x = AP, on a deux valeurs égales de y ou PM; mais comme l'une est positive et l'autre négative, elles s'étendent à droite et à gauche de la ligne indéfinie API, qu'on appelle l'*axe*, c'est-à-dire qu'elles sont PM et PM′; la courbe a donc deux branches AM, AM′, parfaitement égales et qui s'étendent à l'infini, puisqu'il est clair que plus x augmentera, plus $\sqrt{4cx}$, et paconséquent y, augmentera. 2°. Si l'on fait x négatif, on aura $y = \pm\sqrt{-4cx}$, c'est-à-dire imaginaire; la courbe ne s'étend donc point au-dessus du point A. 3°. Si l'on fait $x = c$, pour avoir l'ordonnée qui passe par le point F qu'on appelle *le foyer*, on a $y = \pm\sqrt{4cc} = \pm 2c$, c'est-à-dire que $Fm'' = 2c$;

donc $m''m''' = 4c$. Cette ligne $m''m'''$, qui passe par le foyer, est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'axe de la parabole. Ainsi le *paramètre de l'axe de la parabole est quadruple de la distance* AF *du sommet au foyer.*

4°. Donc si l'on nomme p ce paramètre, on aura $4c = p$, et l'équation de la parabole deviendra par conséquent $yy = px$.

356. Ayant l'équation d'une parabole, il est aisé de décrire cette courbe par des points trouvés successivement, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, et calculant les valeurs correspondantes de y.

357. On peut encore la décrire par points de cette autre manière : ayant choisi le point A que l'on veut prendre pour sommet, et la ligne indéfinie TVI qui doit être la direction de l'axe, on prendra les parties AV, AF, égales chacune à $\frac{1}{4}p$, le point F sera le foyer; alors on élevera sur chaque point de l'axe des perpendiculaires indéfinies MM', et traçant du point F, comme centre, et de la distance VP, comme rayon, deux petits arcs qui coupent chaque perpendiculaire en deux points M et M', ces points seront à la parabole, puisque FM, qu'on fait par là égale à VP, sera égale à MH, en imaginant la droite VH perpendiculaire à l'axe. Cette droite XVH s'appelle la *directrice.*

358. Enfin, on peut décrire la parabole par un mouvement continu, en employant une *équerre* VHf; on attache sur un point quelconque f d'une des branches de cette équerre, l'extrémité d'un fil de longueur égale à fH, et ayant fixé l'autre extrémité au point F, on applique, par le moyen d'un style M, une partie du fil contre fH; et tenant toujours le fil tendu, on fait glisser l'autre côté de l'équerre le long de ZX; le style M, dans ce mouvement, trace la parabole MA.

359. L'équation $yy = px$, nous apprend que, pour chaque point M, *le carré de l'ordonnée* MP *est égal au produit de l'abscisse correspondante par le paramètre.* On voit dans cette même équation, que *les carrés* yy *des ordonnées sont entre*

eux comme les abscisses x, c'est-à-dire que..... $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: AP : Ap$; car $\overline{PM}^2 = p \times AP$; et $\overline{pm}^2 = p \times Ap$; donc $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : Ap$.

L'équation de l'ellipse trouvée (285), est..... $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$, si l'on suppose que le grand axe a est infini; alors xx doit être supprimé comme incapable de diminuer ax; il en est de même de $4cc$ à l'égard de $4ac$; l'équation se réduit donc à $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = \frac{4aacx}{aa}$; c'est-à-dire $yy = 4cx$, qui est l'équation de la parabole. *La parabole n'est* donc *qu'une ellipse dont le grand axe est infini.*

360. Si, après avoir joint les points F et H par la ligne FH, on mène du point M, sur cette ligne, la perpendiculaire MOT, cette dernière sera tangente à la parabole, c'est-à-dire ne la rencontrera qu'au seul point M. En effet, d'un autre point quelconque N de cette ligne, menons NF, NH et la ligne NZ perpendiculaire sur XZ; si quelque autre point tel que N de cette ligne pouvait appartenir à la parabole, il faudrait que l'on eût NF = NZ; or, NZ est plus petit que NH, qui, en vertu de la construction, est égale à NF.

361. L'angle FMO étant, par cette construction, égal à OMH, lequel est égal à fMN, il s'ensuit que FMO est égal à fMN; donc les rayons de lumière partis du point F et tombant sur la concavité MAM′ se réfléchissent tous parallèlement à l'axe; et réciproquement les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe vont tous se rassembler au foyer F.

362. La ligne MH étant parallèle à VP, les triangles HMO, TOF sont semblables, et de plus égaux, puisque HO est égal à OF; donc $FT = MH = PV = x + c$; par conséquent, $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; donc la *sous-tangente* PT *de la parabole est double de l'abscisse* AP.

363. Si, du point M, on mène la perpendiculaire MI sur

la tangente TM, les triangles semblables TPM, PMI, donneront TP : PM :: PM : PI, c'est-à-dire $2x : y :: y : \text{IP} = \frac{y^2}{2x}$, ou, parce que $y^2 = px$, $\text{PI} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$. *La sous-normale de la parabole est donc la même pour chaque point, et est égale à la moitié du paramètre.*

364. On emploie la parabole pour tracer le *maître couple* des vaisseaux auxquels on veut donner beaucoup de façons. On décrit un rectangle ABCD (fig. 48), dont la longueur AB est celle du *bau*, et la hauteur est le *creux* du navire : de part et d'autre du milieu E de DC, on prend EG, EH, égales chacune au demi-plat de la varangue, et ayant mené GM et HL, perpendiculaires à DC et égales chacune à l'acculement, on décrit deux paraboles égales AM, BL, qui aient leurs sommets en A et en B, pour axe commun la ligne AB, et dont la première passe par M et la seconde par L. Pour pouvoir tracer ces paraboles, il faut connaître leur paramètre; or, si l'on prolonge GM jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en P, alors MP sera une ordonnée, et AP l'abscisse correspondante, mais l'équation $yy = px$, faisant voir que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre l'abscisse et le paramètre, nous indique que pour trouver le paramètre, on peut tirer AM, et à son extrémité M, élever une perpendiculaire MK qui rencontrera AB au point K, et déterminera KP pour ce paramètre; car à cause de l'angle droit AMK, la perpendiculaire PM est moyenne proportionnelle entre AP et PK. Ayant déterminé ainsi le paramètre, il sera facile d'avoir tant de points de la parabole que l'on voudra, par la méthode donnée (357). Lorsque ces paraboles sont tracées, on achève le plat de la varangue, en employant deux arcs de cercle, dont l'un MO tourne sa convexité en bas, et l'autre OS la tourne en haut; mais il faut non-seulement que les deux arcs MO et OS se touchent, ce qui est aisé, d'après ce qui a été dit en Géométrie (49), il faut encore que MO touche la parabole en M; c'est ce qui aura lieu

si le centre de l'arc MO est en quelque point R de la perpendiculaire MI à la parabole; or, nous venons de voir (363) que pour déterminer cette perpendiculaire, il fallait prendre la sous-normale PI égale à la moitié du paramètre ; il n'y aura donc qu'à tirer du point M, au milieu I de PK, la ligne MI, et prendre le centre de l'arc MO sur cette droite MI. On prend ordinairement ce centre de manière que le point O, où l'arc MO, rencontre la ligne MS tirée au bord S de la quille, soit le milieu de MS ; c'est pourquoi ayant pris MF et FO égales chacune au quart de MS, on élèvera du point F sur MS la perpendiculaire RF, qui déterminera le centre R de l'arc MO, puis par le point R et le point O, l'on tirera RO, que l'on prolongera de la quantité OT égale à RO, et le point T sera le centre de l'arc OS; en sorte que les deux arcs MO et OS se toucheront en O, et le premier touchera la parabole en M. L'autre moitié s'achève de même.

365. Toute ligne MX (fig. 49) tirée du point M de la parabole, parallèlement à l'axe AQ, s'appelle un *diamètre ;* chaque diamètre a son *paramètre,* qui est en général le quadruple de la distance MF de l'origine de ce diamètre au foyer. Toute droite mO menée d'un point m de la parabole, parallèlement à la tangente TM, qui passe par l'origine ou le sommet M de ce diamètre, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre. Nous allons voir que les ordonnées à un diamètre quelconque ont la même propriété que les ordonnées à l'axe. Menons l'ordonnée MP à l'axe, et des points m et O menons-lui les parallèles mp, QQ; enfin du point m menons mS parallèle à l'axe. Nommons AP, x; PM, y; Qp, g; AQ, k. Nous aurons $Ap = k - g$. Les triangles semblables TPM, mSO, donnent

TP : PM :: mS : SO, c'est-à-dire $2x : y :: g :$ SO $= \frac{gy}{2x}$; donc

PM $-$ OS $=$ QO $-$ SQ $=$ QS $= pm = y - \frac{gy}{2x}$; or, puisque le point m appartient à la parabole, il faut (359) que l'on ait $\overline{pm}^2 : \overline{PM}^2 :: Ap :$ AP, c'est-à-dire

$\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2 : yy :: k-g : x$; d'où $k-x = \frac{g^2 y}{4x}$.

Soit MO $= x'$, et mO $= y'$. Nous aurons.....
MO $=$ PQ $=$ AQ $-$ AP $= k - x$; donc $x' = k - x$, et par conséquent $\frac{gg}{4x} = x'$, ou $gg = 4xx'$: mais le triangle rectangle mSO donne $\overline{mS}^2 + \overline{SO}^2 = \overline{mO}^2$, ou $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$. Mettant pour gg sa valeur $4xx'$, et pour yy sa valeur px, on trouvera $(4x + p)x' = y'y'$. Mais si l'on appelle p' le paramètre du diamètre MX, on aura $p' = 4$FM $= 4x + 4c = 4x + p$: donc enfin, $p'x' = y'y'$. L'équation à l'égard d'un diamètre quelconque est donc la même qu'à l'égard de l'axe. *Le carré de l'ordonnée* mO *à un diamètre quelconque* MX, *est donc égal au produit de l'abscisse par le paramètre de ce diamètre; et les carrés des ordonnées à un diamètre quelconque de la parabole sont entre eux comme les abscisses correspondantes.*

366. Il suit de tout ce qui précède, que si l'on veut décrire une parabole qui ait une ligne indéfinie MX pour diamètre, une ligne donnée p' pour paramètre de ce diamètre, et dont les ordonnées fassent un angle donné avec ce même diamètre, on tirera par l'origine M une ligne NMT, dont l'angle NMX avec la ligne MX, soit égal à l'angle donné. Par le même point M, on menera MF, faisant de l'autre part avec MT, l'angle FMT égal à NMX; et ayant fait MF $= \frac{1}{4}p'$, le point F sera le foyer de la parabole (361 et 365); tirant donc par le point F la ligne indéfinie TFQ parallèle à MX, et qui rencontre MT en T, ce sera la direction de l'axe, dont on déterminera le sommet A, en abaissant la perpendiculaire MP, et partageant PT en deux parties égales en A (362). Alors ayant le foyer et le sommet, il sera facile de décrire la parabole (357 et 358).

367. Les trois courbes que nous venons de considérer successivement ont été nommées *sections coniques*, parce qu'on les obtient en coupant un cône par un plan. Par exemple, on a

l'ellipse AM*m*BA (fig. 50) si l'on coupe le cône CHI par un plan AMBA, de manière que ce plan étant oblique à la base du cône, rencontre d'ailleurs les deux côtés CH, CI, au-dessous du sommet C : il faut seulement en excepter le cas où ce plan ferait, avec le côté CI, l'angle CAB égal à celui que fait l'autre côté CH avec la base ; dans ce cas, la section serait un cercle. Si le plan coupant ne rencontre l'un des côtés CH qu'autant que celui-ci sera prolongé au-dessus du sommet C, on a l'hyperbole AM*m* (fig. 51). Enfin, on a la parabole, si le plan coupant est parallèle à l'un CH des côtés du cône (fig. 52). En voici la démonstration. Concevons que par l'axe d'un cône (droit ou oblique) CHI, on fasse passer un plan perpendiculaire à la base du cône, la section sera un triangle. Coupons maintenant le cône par trois plans AM*m*, FMG, H*m*I, perpendiculaires à ce triangle; les deux derniers seront parallèles à la base, et les sections FMG, H*m*I, seront des cercles (*Géom.* 199) qui rencontreront la section AM*m* en M et en *m*. Les intersections FG, HI, des plans de ces cercles, avec le triangle par l'axe, seront les diamètres de ces mêmes cercles. Les intersections PM, *pm*, de ces cercles, avec le plan AM*m*, seront (*Géom.* 188) perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, et seront en même temps ordonnées de ces cercles et de la section AM*m*. Cela posé, les triangles semblables APG, A*p*I, donnent AP : A*p* :: PG : *p*I, et les triangles semblables BFP, BH*p*, donnent PB : *p*B :: FP : H*p* ; d'où.....

AP × PB : A*p* × *p*B :: PG × FP : *p*I × H*p* ; or, par la nature du cercle FP × PG = $\overline{\text{PM}}^2$ et H*p* × *p*I = $\overline{pm}^2$; donc...

AP × PB : A*p* × *p*B :: $\overline{\text{PM}}^2$: $\overline{pm}^2$; donc les carrés des ordonnées de la section AM*m* sont entre eux comme les produits des abscisses ; or, ces abscisses tombent de différens côtés de l'ordonnée (fig. 50) et d'un même côté (fig. 51) ; donc AM*m* (fig. 50) est une ellipse, et (fig. 51) une hyperbole. Quant à la figure 52, en supposant les mêmes choses que ci-dessus, on a $\overline{\text{PM}}^2$ = FP × PG, $\overline{pm}^2$ = H*p* × *p*I ; ou à cause des

parallèles Pp, FH et FP, Hp, qui donnent

$$\text{FP} = \text{H}p, \quad \overline{pm}^2 = \text{FP} \times p\text{I};$$

donc $\overline{\text{PM}}^2 : \overline{pm}^2 :: \text{FP} \times \text{PG} : \text{FP} \times p\text{I} :: \text{PG} : p\text{I} :: \text{AP} : \text{A}p$, à cause des triangles semblables AFG, ApI; donc les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses; donc la courbe est une parabole.

Réflexions sur les Équations aux Sections coniques.

368. Il suit de ce que nous avons démontré (308), que si dans l'ellipse on représente par x l'abscisse CO (fig. 38), comptée du centre sur le diamètre MM′, y l'ordonnée mO parallèle au diamètre conjugué CN, $\text{CM} = \frac{1}{2}a$, $\text{CN} = \frac{1}{2}b$, on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$ pour l'équation à ce diamètre, quelque angle que fassent d'ailleurs ces deux diamètres conjugués. Et si, par le point m, on mène mO′, parallèle à MM′, et qui sera alors une ordonnée adiamètre NN′, alors nommant CO′, x', et mO′, y', on aura $y = x'$, et $x = y'$, et l'équation deviendra $x'x' = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - y'y'\right)$; d'où..... $y'y' = \frac{aa}{bb}\left(\frac{1}{4}bb - x'x'\right)$. C'est-à-dire qu'en prenant les abscisses du centre, l'équation, par rapport à quelque diamètre que ce soit, est toujours de même forme, tant qu'on prend les ordonnées parallèles au diamètre conjugué. Si b est égal à a, l'équation devient $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, que nous avons vu (284) appartenir au cercle. Mais il faut bien faire attention que c'est en supposant les ordonnées perpendiculaires au diamètre; car lorsqu'elles font tout autre angle qu'un angle droit, l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ appartient à l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués égaux.

Pour l'hyperbole, si l'on nomme x l'abscisse CO (fig. 43), prise depuis le centre sur le diamètre MM′ terminé à la courbe, et y l'ordonnée mO, parallèle au diamètre conjugué NN′; $\text{CM} = \frac{1}{2}a$, CN ou $\text{CN}' = \frac{1}{2}b$, on aura (337) $yy = \frac{bb}{aa}\left(xx - \frac{1}{4}aa\right)$ pour l'équation à ce diamètre quel que soit d'ailleurs l'angle compris entre les deux diamètres conjugués. Mais si menant, par le point m', la ligne m'O′, parallèle au diamètre CM, on nomme y' la ligne m'O′, qui est alors une ordonnée au diamètre NN′, et si l'on fait l'abscisse $\text{CO}' = x'$, on aura $x' = y$ et $y' = x$, ce qui changera l'équation en $y'y' = \frac{aa}{bb}\left(x'x' + \frac{1}{4}bb\right)$, d'où l'on voit que l'équation, par

rapport au diamètre conjugué NN′, n'est pas semblable à celle que l'on trouve pour le diamètre MM′ terminé à la courbe.

A l'égard de la parabole, nous avons vu (365) qu'en prenant les abscisses sur un diamètre quelconque, depuis l'origine de ce diamètre, et menant les ordonnées parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, l'équation était toujours $yy = px$, y étant l'ordonnée, x l'abscisse, et p le paramètre de ce diamètre.

Enfin, à l'égard de l'hyperbole considérée par rapport à ses asymptotes, en prenant les abscisses depuis le centre, sur une des asymptotes, et les ordonnées parallèles à l'autre asymptote, nommant les premières x, les secondes y, et aa la puissance de l'hyperbole, l'équation de l'hyperbole, sous ce dernier aspect, est $xy = aa$.

369. Mais il faut bien remarquer que pour que ces équations se rapportent aux deux lignes ou axes dont on est convenu, il est essentiel que l'une des indéterminées, y, par exemple, se compte depuis la ligne même sur laquelle on prend les x; car on pourrait avoir une équation de quelqu'une des formes que nous venons de parcourir, et qui cependant ne se rapporterait point aux diamètres conjugués, si cette équation est à l'ellipse ou à l'hyperbole, ou qui, lorsqu'elle appartient à une parabole, n'exprimerait point la relation entre les abscisses et ce que nous avons appelé jusqu'ici les *ordonnées*; par exemple (fig. 53), si CM′, CN, sont deux diamètres conjugués de l'ellipse, à l'égard desquels on ait l'équation $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, CM′ étant $\frac{1}{2}a$, CN, $\frac{1}{2}b$, CQ, x, et QM, y; si par le centre C on tire une droite indéfinie FCE qui rencontre les ordonnées QM en E; si l'on nomme les lignes CE, z; qu'enfin par un point B pris à une distance connue BC $= m$, on mène BF parallèle à QM, et qu'on nomme CF, n, alors les triangles semblables, CBF, CQE, donnent $m : n :: x : z$; donc, $x = \frac{mz}{n}$; si l'on substitue cette valeur de x dans l'équation ci-dessus, elle donnera..... $yy = \frac{bbmm}{aann}\left(\frac{aann}{4mm} - zz\right)$; équation de même forme, mais que l'on aurait tort, comme on le voit, de regarder comme appartenant aux diamètres conjugués; car les abscisses z étant prises sur CE, les ordonnées y ou QM se comptent du point Q, où la ligne EM parallèle à CN rencontre CM′.

370. On voit donc, en général, 1°. que si l'on a une équation du second degré à deux indéterminées x et y, et si l'une des indéterminées se compte depuis la ligne sur laquelle on prend l'autre, cette équation appartiendra à l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, ou au cercle, si, ne renfermant d'autres puissances de x et de y que les carrés, ces deux carrés se trouvent avec différens signes dans différens membres, et si en même temps la quantité toute connue qui se trouve dans un même membre avec le carré

qui aura le signe —, a elle-même le signe +; car si l'on avait, par exemple, $yy = \frac{bb}{aa}\left(-\frac{1}{4}aa - xx\right)$, cette équation n'exprimerait aucune ligne possible, puisqu'elle donne $y = \pm\sqrt{\frac{bb}{aa}\left(-\frac{1}{4}aa - xx\right)}$, quantité absurde (97).

371. 2°. Si les deux carrés yy et xx, passés dans différens membres, ont le même signe, et s'il n'y a d'autres puissances de x et de y que ces carrés, l'équation appartiendra toujours à une hyperbole, laquelle sera rapportée à un diamètre terminé à la courbe ou à son conjugué, selon que le terme tout connu aura le même signe que les carrés xx et yy, ou des signes différens.

372. 3°. Si l'équation ne renferme que l'un des carrés et n'a que deux termes dont le second soit le produit de l'autre indéterminée par une quantité connue, elle appartiendra à une parabole rapportée à l'un de ces diamètres, si ces deux termes placés dans différens membres ont le même signe; mais s'ils ont différens signes, l'équation n'exprime aucune ligne possible.

373. 4°. Enfin si l'équation n'ayant que deux termes, l'un est le produit des deux indéterminées x et y, et l'autre une quantité toute connue, elle exprime une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

374. Telles sont les équations aux sections coniques rapportées aux différentes lignes avec la condition exprimée (370). Nous en verrons l'usage dans peu; mais il n'est pas inutile de dire d'avance que toutes les fois qu'on aura une équation à deux indéterminées x et y, qui aura les conditions que nous venons d'exposer, il sera toujours facile de construire la section conique à laquelle elle appartiendra, et cela, en se conduisant comme dans cet exemple.

Supposons qu'on ait l'équation $ncd - qyy = gxx$, je l'écrirais ainsi : $yy = \frac{g}{q}\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$; or, sous cette forme, je vois (308 et 370) que cette équation appartient à une ellipse dont le rapport des carrés des deux diamètres conjugués est $\frac{g}{q}$, et dont le carré de celui de ces diamètres sur lequel les x sont comptés, est $\frac{4ncd}{g}$. J'ai donc $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, et $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$, ce qui détermine les deux diamètres conjugués a et b. Quant à l'angle qu'ils font, c'est celui des lignes x et y; angle qui est censé connu par la question. Or, nous avons vu (315) comment, connaissant ces trois choses, on peut décrire l'ellipse. On se conduira de même pour les équations aux autres sections, lorsqu'elles se rapporteront à quelques-unes de celles que nous avons exposées ci-dessus. Nous allons voir qu'en général toute équation du second degré, à deux indéterminées, exprime toujours une section conique, ou

n'exprime aucune ligne possible (*); et cela se démontre en faisant voir que toute équation pareille peut toujours être ramenée à quelqu'une de celles que nous avons données ci-dessus. Mais pour répandre plus de jour sur la méthode dont nous allons faire usage, et sur les constructions auxquelles elle conduit, il est à propos de placer ici les réflexions suivantes.

375. Puisque toute question qui peut être résolue par l'Algèbre, conduit toujours à une ou à plusieurs équations, toute équation à deux indéterminées, u et t, peut toujours être considérée comme venant d'une question où ces deux indéterminées u et t représentaient les deux inconnues. Quelle qu'ait été cette question, on peut toujours considérer l'équation comme exprimant la nature d'une courbe, et cela est bien facile à concevoir; car si l'on donne arbitrairement et successivement à l'une des deux inconnues, à u, par exemple, plusieurs valeurs, et qu'à l'aide de l'équation et des règles de l'Algèbre on calcule à chaque fois la valeur de t, il est évident que rien n'empêche de marquer sur une ligne indéfinie AR (fig. 53, 54 et 55) les valeurs AP, AP, etc., qu'on a données à u, de mener par les points P, P, etc., des lignes PM, PM, etc., parallèles entre elles et sous un angle déterminé, et de faire ces dernières égales aux valeurs correspondantes qu'on a trouvées pour t: la suite des points M, M, etc., déterminés de cette manière, formera une courbe dont la nature dépendra du rapport des lignes AP et PM; et puisque ce rapport est exprimé par l'équation dont ces lignes ont été déduites, cette équation exprime donc la nature de cette courbe. Cela posé, concevons que la courbe soit une section conique : il est clair que, comme dans la question qui a donné cette équation, on ignorait, ou l'on pouvait ignorer totalement, si un pareil usage de cette équation donnerait une section conique, on n'a pas cherché à disposer les lignes AP et PM, de manière que l'une ayant sa direction sur un diamètre, l'autre fût parallèle à la tangente menée par le sommet de ce diamètre, ce qui est d'abord nécessaire pour que l'équation ait l'une des formes ci-dessus. On voit donc par là comment il peut se faire qu'une équation, quoique n'ayant pas l'une de ces formes, appartienne néanmoins à une section conique.

376. Voyons donc maintenant comment on peut ramener toute équation du second degré, et qui renferme deux indéterminées, à avoir l'une des formes sous lesquelles se présentent les équations des sections coniques, rapportées aux lignes que nous avons fixées (368).

377. La méthode que nous allons exposer suppose qu'on sache faire

---

(*) Il faut seulement en excepter le cas où elle serait le produit de deux facteurs du premier degré, tels que $ax+by+c$, et $dx+fy+g$; mais alors elle n'est pas réellement du second degré. Nous n'examinerons pas ici cette espèce d'équation.

disparaître le second terme dans une équation du second degré à une inconnue. La règle pour cette opération est simple : il faut, après avoir dégagé le carré de l'inconnue, faire la somme de cette inconnue, plus la moitié du coefficient du 2e terme, pris avec son signe, et égaler cette somme à une nouvelle inconnue. Par exemple, pour faire disparaître le second terme de l'équation $x^2+3x=\frac{9}{4}$, je fais $x+\frac{3}{2}=z$; d'où $x=z-\frac{3}{2}$; substituant cette valeur de x dans l'équation proposée, j'ai $zz=\frac{18}{4}$; équation qui n'a plus de second terme.

378. On peut même, si on le veut, égaler l'inconnue augmentée de la moitié du coefficient du second terme, non à une inconnue simple, mais à une inconnue multipliée ou divisée par une quantité arbitraire; et cette remarque nous servira dans quelques momens. Par exemple, dans l'équation $x^2-4x=7$, je puis faire $x-2=\frac{k}{n}z$; j'aurai, en opérant toujours de la même manière, $\frac{kk}{nn}zz=11$; on n'en aura pas moins la même valeur pour x, quelque valeur qu'on donne à k et à n; en effet, cette équation donne $\frac{k}{n}z=\sqrt{11}$; et puisque $x-2=\frac{k}{n}z$, on a $x-2=\sqrt{11}$, précisément comme on l'aurait obtenu par le premier procédé. En un mot, cela ne change rien à ce que l'on cherche; mais en introduisant ainsi une quantité arbitraire, on se ménage les moyens de remplir certaines vues auxquelles on ne satisferait quelquefois que d'une manière indirecte, ou moins simple, en s'y prenant autrement.

Moyens de ramener aux Sections coniques toute Équation du second degré à deux indéterminées, lorsqu'elle exprime une chose possible.

379. Supposons qu'on ait l'équation

$$(1)\ldots\ dt^2+cut+eu^2+fdt+geu+hd^2=0,$$

qui renferme toutes les équations complètes du second degré à deux indéterminées u et t. Concevons que cette équation appartienne à une courbe MM (fig. 53 et 54), dont AP et PM sont les coordonnées. Voici comment on s'assurera que cette courbe est toujours une section conique, et comment on déterminera cette section. Il faut, lorsqu'il ne manque aucun des deux carrés t^2 et u^2, faire disparaître successivement le second terme de cette équation par rapport à t, et le second terme par rapport à u, ce que l'on fera de la manière suivante. L'équation (1) donne

$$(2)\ldots\ tt+\left(f+\frac{cu}{d}\right)t+\frac{euu}{d}+\frac{geu}{d}+hd=0.$$

Je fais donc (377) $t = y - \frac{1}{2}\left(f + \frac{cu}{d}\right)$. L'équation (2) devient

$$(3)\ldots\ 4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2efd - 4ged)u + (cc - 4de)uu.$$

Comme d, c, e, f, etc., désignent des quantités connues, on peut supposer $ffdd - 4hd^3 = r$, $2efd - 4ged = q$ et $cc - 4de = m$; l'équation (3) deviendra

$$(4)\ldots\ 4d^2y^2 = r + qu + mu^2,$$

qui donne

$$u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4d^2}{m}y^2.$$

Pour faire disparaître le second terme par rapport à u, on supposera $u = \frac{qx}{2mn} - \frac{q}{2m}$, n étant une indéterminée que l'on déterminera dans peu (*). L'équation précédente donnera

$$(5)\ldots\ \frac{q^2x^2}{4m^2n^2} - \frac{q^2}{4m^2} + \frac{r}{m} = \frac{4d^2y^2}{m},$$

équation qui appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, tant qu'aucune des quantités d, m, q, r, etc., n'est zéro, excepté le cas où nous allons voir qu'elle n'exprimerait aucune ligne possible.

Examinons maintenant dans quel cas la courbe est une ellipse, dans quel cas une hyperbole, et enfin dans quel cas il n'y a pas de courbe. Pour cet effet, dégageons y^2 et nous aurons

$$(6)\ldots\ y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(x^2 - n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}\right),$$

équation dans laquelle q, n et d étant au carré, les signes ne peuvent changer que lorsque m ou r, au lieu d'être positifs, seront négatifs; mais le changement du signe de r n'en apportant aucun à ceux des carrés yy et xx, la courbe ne change point par le changement du signe de r. A l'égard de m, s'il est négatif, l'équation (6) donne

$$(7)\ldots\ y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right).$$

On voit donc (370 et 371) que tant que m sera positif, la courbe sera une hyperbole, et qu'au contraire, elle sera une ellipse, quand m sera négatif; or, la quantité m a représenté ci-dessus $cc - 4de$; et dans cette dernière, la quantité c étant au carré, cc est toujours positif; donc m ou $cc - 4de$ ne peut devenir négatif qu'autant que $4de$ surpassera cc, et cela, soit que d et e soient tous deux positifs, soit qu'ils soient tous deux négatifs.

(*) Cette quantité n est introduite pour pouvoir ramener directement l'équation aux diamètres conjugués. Si l'on égalait simplement à x, l'équation finale acquerrait la forme de l'équation à l'ellipse ou à l'hyperbole; mais elle serait dans le cas que nous avons examiné (369).

380. Donc *si l'on veut savoir dans quel cas une équation du second degré, à deux indéterminées* u *et* t, *telles que* ..... $dt^2+cut+eu^2+fdt+geu+hd^2=0$, *appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, il n'y a qu'à examiner si le carré* cc *du coefficient du terme* ut, *moins le quadruple du produit des coefficiens de* t^2 *et de* u^2, *fait une quantité positive ou négative : dans le premier cas, la courbe sera une hyperbole; et dans le second cas, une ellipse, à moins que* d *ne soit* $=e$; *alors la courbe peut être un cercle, ainsi qu'on le verra plus bas.* Il faut seulement excepter de cette règle le cas où r étant négatif, serait plus grand que $\frac{qq}{4m}$ pour l'ellipse; car alors la quantité $nn+\frac{4mrnn}{qq}$ devenant $nn\left(1-\frac{4mr}{qq}\right)$, est négative si $\frac{4mr}{qq}$ est plus grand que 1, ou, ce qui revient au même, si r est plus grand que $\frac{qq}{4m}$, ce qui rend la valeur de y imaginaire, et alors il n'existe pas de courbe. Il reste à faire voir comment on peut décrire l'ellipse et l'hyperbole que nous venons de reconnaître; considérons l'ellipse.

381. Des deux équations $t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$, et $u+\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$, que nous avons eues pour faire disparaître les seconds termes, la seconde, par la supposition actuelle que m est négative, se change en $u-\frac{q}{2m}=\frac{-qx}{2mn}$; mais comme n est une indéterminée, on peut la supposer indifféremment positive ou négative : en la supposant négative, on a $u-\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$; construisons ces équations pour avoir la position des diamètres conjugués. La première, savoir, $t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$, fait voir que pour obtenir y, il faut augmenter chaque t de $\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}$; on menera donc par le point A, origine des u et des t (fig. 53) la ligne $AB=\frac{1}{2}f$, parallèle à la ligne PM ou t. Par le point B, on menera BKI parallèle à la ligne AR sur laquelle se comptent les u; et ayant pris arbitrairement la ligne BK, on menera, parallèlement à AB, la ligne KL qui soit à BK :: $\frac{1}{2}c:d$; si l'on tire par les points B et L la ligne indéfinie BLQ, alors les lignes QM, comptées des points Q où cette ligne coupe les lignes PM, seront les valeurs de y. En effet, on a $QM=PM+PQ=PM+PI+IQ=t+\frac{1}{2}f+IQ$; or, les triangles semblables BKL et BIQ, donnent BK : KL :: BI ou AP : IQ; c'est-à-dire $d:\frac{1}{2}c::u:IQ=\frac{cu}{2d}$; donc $QM=t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$. Puisque

les y se comptent depuis la ligne LQ, il s'ensuit (369) que pour que l'équation de l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués, les x doivent être comptés sur la ligne BLQ, et que le point d'où elles seront prises sera le centre; en sorte que QLB est la direction d'un des diamètres. Voyons à déterminer ce centre. La seconde équation..... $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, fait voir que si, sur $AP = u$ on prend $AG = \frac{q}{2m}$, la quantité GP qui vaut $AP - AG$, sera $u - \frac{q}{2m}$, et par conséquent $\frac{qx}{2mn}$; on a donc $GP = \frac{qx}{2mn}$; or, si par le point G on mène GNC parallèle aux lignes PM, le point C où elle rencontrera LQ, sera l'origine des x, et par conséquent le centre; en effet, nous venons de voir que les x doivent être comptés sur LQ; or, lorsque GP est zéro, sa valeur $\frac{qx}{2mn}$ doit être zéro; x doit donc être zéro alors, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les x commenceront au point C: ainsi les lignes QM étant y, les lignes CQ sont x. De là il est facile d'avoir la valeur de n; car on a..... $GP = \frac{qx}{2mn}$, ou, mettant pour x sa valeur CQ, et pour $\frac{q}{2m}$ sa valeur AG, $GP = \frac{AG \times CQ}{n}$; donc $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; mais les parallèles QP; CG et AB donnent $GP : AG :: CQ : BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$; donc $n = BC$; c'est-à-dire que pour que l'équation de l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués dont les directions sont QB et CN, il faut mettre pour n la valeur de BC, qui est déterminée par les constructions précédentes.

Il ne reste donc plus, pour être en état de décrire cette ellipse, qu'à déterminer la grandeur des diamètres conjugués; et l'angle BCN qu'ils font entre eux, se trouve déterminé par les opérations précédentes. Or, cela est facile, en imitant ce que nous avons fait (374). Il ne s'agit que de comparer l'équation (7) du n° 379 à l'équation $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$. Cette comparaison donne

$$a = \sqrt{4nn + \frac{16mnnr}{qq}}, \qquad b = \sqrt{\frac{q^2}{4mdd} + \frac{r}{dd}};$$

et puisque m, n, q, r, d, sont connus, on a les valeurs des diamètres conjugués a et b, avec lesquelles, et connaissant d'ailleurs l'angle BCN qu'ils doivent faire, on décrira l'ellipse de la manière qui a été enseignée (315).

382. Remarquons que si les valeurs de a et b sont égales, et qu'en même temps l'angle BCN soit droit, la courbe est alors un cercle. Si l'on veut

déterminer dans quel cas cela aura lieu, il n'y a qu'à supposer dans notre équation à l'ellipse que $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, ce qui donne $nn = \frac{qq}{16mdd}$. Si, de plus, l'angle BCD est droit, on doit avoir $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 = \overline{AG}^2$, or, $BC = n$, et les triangles semblables BCD, BLK donnent.....

$BK : KL :: BD$ ou $AG : CD$, c'est-à-dire $d : \frac{1}{2}c :: \frac{q}{2m} : CD$, d'où l'on tire $CD = \frac{cq}{4md}$; donc $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, ou $m + cc = 4dd$; mais puisque m est négatif, on a (379) $cc - 4de = -m$, ou $m = 4de - cc$; il faudra donc que $d = e$.

383. On voit donc que *pour savoir si la courbe est un cercle, une ellipse ou une hyperbole*, il est inutile d'avoir égard aux trois derniers termes fdt, geu et hd^2 de l'équation (1) du n° 379, cela dépend seulement des trois premiers, en sorte que si d, c et e sont tels que $cc - 4de$ soit positif, la courbe sera une hyperbole; elle sera une ellipse, si au contraire $cc - 4de$ est négatif, excepté le cas où l'on aura en même temps $d = e$, c'est-à-dire où les deux carrés u^2 et t^2 auront le même coefficient; alors elle sera un cercle si, de plus, l'angle des nouvelles coordonnées est droit.

384. Tout ce que nous venons de dire, à l'exception de ce que renferme le n° 382, s'applique également à l'hyperbole, c'est-à-dire à l'équation (6) du n° 379, à la différence des signes près. Ainsi, en réalisant tout ce qui précède et l'appliquant à la figure 54, il n'y a d'autre changement à faire que de porter AG à l'opposite de AP, ce qui est indiqué par l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que l'on a eue d'abord (379). Du reste, tout est le même en changeant le mot *ellipse* en celui d'*hyperbole*.

385. Il nous reste deux cas à examiner: ce sont, 1°. celui où l'on aurait $cc - 4de = 0$; 2°. celui où l'on aurait tout-à-la-fois $d = 0$ et $e = 0$. Dans le premier cas, la courbe est une parabole. Comme la quantité m est alors zéro, la construction précédente devient inutile, parce qu'après avoir fait évanouir le second terme par rapport à t, le terme u^2 ne s'y trouve plus (379). Ce cas se reconnaît facilement en examinant si dans l'équation, on a $cc = 4de$, c'est-à-dire si $dt^2 + cut + eu^2$ est un carré. Dans ce cas, on fera disparaître le second terme par rapport à t, et l'équation se réduira à $4ddyy = r + qu$; pour ramener cette dernière à la forme $yy = px$, qui (368) est celle de la parabole rapportée à un diamètre dont les ordonnées sont parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, on fera $\frac{r + qu}{4dd} = nx$ (n étant une indéterminée). On aura $yy = nx$. Il ne s'agira donc plus que de cons-

truire l'équation $t+\frac{1}{2}f+\frac{eu}{2d}=y$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à t, et l'équation $\frac{r+qu}{4dd}=nx$, qui aura servi à la seconde réduction. La première de ces deux équations étant précisément la même que celle que nous avons construite (381), se construira de même ici; ainsi il n'y a qu'à appliquer à la figure 55, mot à mot, ce qui a été dit (381) pour la figure 53, relativement à la construction de $t+\frac{1}{2}f+\frac{eu}{2d}=y$, les y seront les lignes QM (fig. 55), et l'on aura BLQ pour la direction du diamètre sur lequel les x doivent être comptés. Pour déterminer l'origine des x, et par conséquent le sommet de ce diamètre, on emploiera l'équation $\frac{r+qu}{4dd}=nx$, qui, donnant $u+\frac{r}{q}=\frac{4ddnx}{q}$, fait voir que si l'on prend à l'opposite de AP la quantité $AG=\frac{r}{q}$, on aura $GP=\frac{4ddnx}{q}$; donc si par le point G, on mène GCD parallèle aux lignes PM, et qui rencontre QLB en C, le point C sera l'origine des x, puisque l'équation $GP=\frac{4ddnx}{q}$ fait voir que quand GP est zéro, x doit être zéro, et que d'ailleurs les x doivent être comptés sur la ligne de laquelle partent les y, c'est-à-dire sur BQ. Il ne s'agit plus que de déterminer le paramètre n. Or, on vient de voir que.... $GP=\frac{4ddnx}{q}$; mais les parallèles CD et QI donnent BC : BD ou... AG :: CQ : DI ou GP; c'est-à-dire $BC:\frac{r}{q}::x:\frac{4ddnx}{q}$; donc..... $BC=\frac{r}{4ddn}$; donc $n=\frac{r}{4BC\times dd}$; or, r et d sont donnés dans l'équation, et BC est déterminé par la construction; on connaît donc n ou le paramètre; d'ailleurs cette même construction détermine, en même temps, l'angle, des coordonnées CQ et QM ou x et y; il est donc aisé de construire la parabole selon qu'il a été enseigné (366).

386. Puisque l'équation générale appartient à la parabole lorsqu'on a $cc=4de$, il s'ensuit que lorsque le produit ut des deux indéterminées ne se trouve point dans cette équation, il faut pour qu'elle appartienne à la parabole, qu'il y manque aussi un des deux carrés t^2 ou u^2; car e étant alors zéro, l'équation $cc=4de$ ou $o=4de$ fait voir que d ou $e=o$.

387. Si les deux carrés sont tous deux dans l'équation, et que le produit ut ne s'y trouve point, alors la construction donnée (381), et qui convient aux figures 53 et 54, devient plus simple, parce que c étant zéro, la ligne KL est zéro, et BL tombe sur BK, qui devient alors un diamètre; les lignes des x et des y sont donc parallèles à celles des u et des t. Dans

ce même cas l'évanouissement du second terme par rapport à u se fera sans employer l'inconnue n, parce que BC, qui est n (381) étant alors égal à BD ou AG, on a $n=\frac{q}{2m}$, ce qui réduit l'équation $u+\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$, qu'on a eue pour faire disparaître le second terme, par rapport à u, à $u+\frac{q}{2m}=x$. Il suit de là, qu'outre les conditions mentionnées (383), il faut, dans le cas présent, pour que la courbe soit un cercle, que l'angle des coordonnées u et t soit droit.

388. Lorsque le produit ut se trouve dans l'équation, si après avoir fait évanouir le second terme par rapport à l'une des deux indéterminées, par exemple, par rapport à t, il ne se trouvait plus d'autre puissance de l'indéterminée u que le carré; alors, quoiqu'il n'y ait plus de second terme à faire disparaître, il n'en faudrait pas moins faire une transformation qui consisterait à faire $u=\frac{lx}{n}$, $\frac{l}{n}$ étant une fraction inconnue, mais que l'on déterminerait lors de la construction, d'une manière semblable à ce que nous venons de faire (381). Nous en donnerons un exemple plus bas.

389. Si des trois termes t^2, ut et u^2, il ne manque que l'un des deux carrés, l'équation appartient toujours à une hyperbole, ou n'exprime aucune courbe, parce que si d ou e est zéro, la quantité $cc-4de$ se réduisant à cc, est essentiellement positive (383).

390. Enfin, si les deux carrés t^2 et u^2 manquent en même temps, auquel cas on a une équation de cette forme, $gut+ht-ku-l=0$; g, h, k, l, pouvant être indifféremment positifs ou négatifs, on peut encore faire usage de la construction donnée (381). L'équation appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes; mais comme les abscisses et les ordonnées ne sont point comptées du centre, on les y ramenera de la manière suivante. L'équation proposée donne

$$(8)\ldots\ \left(t-\frac{k}{g}\right)u+\frac{h}{g}t-\frac{l}{g}=0.$$

Soit $t-\frac{k}{g}=y$; d'où $t=y+\frac{k}{g}$. L'équation (8) deviendra

$$\left(u+\frac{h}{g}\right)y+\frac{hk}{g^2}-\frac{l}{g}=0.$$

Posant $u+\frac{h}{g}=x$, on trouvera l'équation

$$(10)\ldots\ xy=\frac{l}{g}-\frac{hk}{gg},$$

qui appartient à l'hyperbole entre ses asymptotes, les abscisses x étant

comptées depuis le centre sur une des asymptotes, et les ordonnées y étant comptées depuis cette asymptote parallèlement à l'autre; enfin la puissance de cette hyperbole est $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (346).

Avant de procéder à la construction de cette hyperbole, on exécutera celle des deux équations $t - \frac{k}{g} = y$, et $u + \frac{h}{g} = x$, qui ont servi à réduire. La première fait voir qu'il faut diminuer chaque t de la quantité $\frac{k}{g}$ pour avoir y. On menera donc par le point A (fig. 56), origine des u et des t, une ligne AB parallèle aux lignes PM ou t, et égale à $\frac{k}{g}$: tirant ensuite par le point B la ligne CBQ parallèle à AP, les lignes QM seront les y, puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$. Pour avoir les x, l'équation $u + \frac{h}{g} = x$, fait voir qu'il faut augmenter les u, c'est-à-dire les lignes AP, de la quantité $\frac{h}{g}$; on portera donc, à l'opposite de AP, la ligne $AG = \frac{h}{g}$, en tirant GS parallèle aux lignes PM, laquelle rencontre BQ en C, CQ sera x, et C sera le centre de l'hyperbole, dont CQ et CS seront les asymptotes : ayant les asymptotes et l'équation (10), on décrira l'hyperbole de la manière qui a été enseignée (353).

Si les trois premiers termes t^2, ut et u^2 manquaient dans l'équation, alors elle n'exprimerait plus qu'une ligne droite dont la construction est facile, après ce que nous avons dit sur celle des équations qui ont servi aux réductions précédentes.

391. Ainsi, 1°. *toute équation du second degré, à deux indéterminées, et qui n'est point décomposable en deux facteurs du premier degré, tels que* $mx + ny + q$, *exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune courbe.* 2°. *Cette courbe est ellipse, ou hyperbole, ou parabole, selon que le carré du coefficient du produit* ut *des deux indéterminées, moins le quadruple du produit des coefficiens des deux carrés* t^2 *et* u^2 *est négatif, ou positif, ou zéro; et, en particulier, elle peut être un cercle, lorsque ce même résultat étant négatif, les coefficiens de* u^2 *et de* t^2 *sont égaux.* 3°. *Et pour ramener toute équation, appartenant à une section conique, aux équations que nous avons données en traitant de ces courbes, il faut se conformer à ce qui a été enseigné* (379, 385, 387, 388 et 390).

Application de ce qui précède, à la résolution de quelques questions indéterminées.

392. Pour faire connaître l'usage des transformations que nous venons d'enseigner, proposons-nous cette question : *Trouver quelle est la courbe* (fig. 57) *dont les distances de chaque point* M *à deux points fixes* A *et* B *seraient toujours dans le rapport constant de* g *à* h. Imaginons que de chaque point M, on ait abaissé une perpendiculaire MP sur la ligne AB; cherchons la relation de ces perpendiculaires avec leurs distances AP au point A, et pour cet effet nommons AP, u, PM, t, et la ligne connue AB $= c$. Cela posé, les triangles rectangles APM, BPM donnent AM $= \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{u^2 + t^2}$ et BM $= \sqrt{\overline{BP}^2 + \overline{PM}^2}$, or, BP $=$ AP $-$ AB $= u - c$; donc BM $= \sqrt{u^2 - 2cu + cc + tt}$; *or*, AM : BM :: g : h; donc $\sqrt{uu + tt} : \sqrt{u^2 - 2cu + cc + tt} :: g : h$; on en déduit

$$(gg - hh)\,uu + (gg - hh)\,tt - 2ggcu + ggcc = 0;$$

équation qui (383) appartient au cercle. Pour ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (368), je vois que comme elle ne contient pas de second terme par rapport à t, il suffit, à l'égard de cette indéterminée, de supposer $t = y$, ce qui donne

$$(gg - hh)\,uu + (gg - hh)\,yy - 2ggcu + ggcc = 0;$$

il faut donc faire disparaître le second terme par rapport à u; et comme le produit ut ne se trouve point dans l'équation, il suffit (387) d'employer la règle donnée (377). Je fais $u = \frac{ggc}{gg - hh} + x$, et je trouve.....

$yy = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2} - xx$, équation qui, étant comparée à.....

$yy = \frac{1}{4}aa - xx$, donne le rayon $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{gg - hh}$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre, qui doit être sur ABP, puisque $t = y$, Or, pour avoir x, il faut diminuer u de $\frac{ggc}{gg - hh}$; on prendra donc.....

AC $= \frac{ggc}{gg - hh}$, et alors CP sera x; ainsi, du point C, comme centre, et du rayon $\frac{hgc}{gg - hh}$, on décrira un cercle; chaque point M de ce cercle aura la propriété dont il s'agit.

393. Nous prendrons pour seconde question celle-ci : *Trouver hors de*

la ligne donnée AR (fig. 58) *tous les différens points* M, *tels qu'en tirant aux deux points* A *et* R *les lignes* MA, MR, *l'angle* AMR *soit toujours égal à un même angle donné.* Représentons par r le rayon des tables, et par m la tangente de l'angle donné, auquel AMR doit être égal; abaissons la perpendiculaire MP; faisons $AP = u$, $PM = t$, $AR = b$; alors $PR = b - u$. Rappelons-nous ces trois propositions démontrées (*Géom.* 284, 285 et 278):

$$1^{o}.\ \sin\ (A+B) = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{r};$$

$$2^{o}.\ \cos\ (A+B) = \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{r};$$

$$3^{o}.\ \text{tang}\,(A+B) = \frac{r \sin (A+B)}{\cos (A+B)}.$$

Cela posé, les triangles rectangles APM, RPM, donnent (*Géom.* 295) AM : AP :: r : sin AMP; AM : PM :: r : sin MAP, ou cos AMP;..... RM : RP :: r : sin RMP; RM : PM :: r : sin MRP ou cos RMP; d'où l'on tire $\sin AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; $\cos AMP = \frac{r \times PM}{AM}$; $\sin RMP = \frac{r \times RP}{RM}$; $\cos RMP = \frac{r \times PM}{RM}$; donc, puisque AMR = AMP + PMR, on aura

$$\sin AMR = \frac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM},\ \text{et.....}$$

$$\cos AMR = \frac{r \times \overline{PM}^{2} - r \times AP \times RP}{AM \times RM};\ \text{donc,}\ \frac{r \sin AMR}{\cos AMR},\ \text{ou.....}$$

$$\text{tang}\,AMR = \frac{r \times AR \times PM}{\overline{PM}^{2} - AP \times RP};\ \text{ou, en mettant les valeurs algébriques}$$

et réduisant, $mtt + muu - mbu - rbt = 0$; équation du cercle (383), ainsi qu'on devait bien s'y attendre. Pour déterminer le centre et le rayon, il faut ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}\,aa - xx$. Pour cet effet, je dégage tt, ce qui donne $tt - \frac{rb}{m}\,t - bu + uu = 0$, je fais (377) $t - \frac{rb}{2m} = y$; opérant comme à l'article cité, l'équation trouvée devient $yy - \frac{rrbb}{4mm} - bu + uu = 0$. Reste donc à faire disparaître le second terme par rapport à u; je fais (387) $u - \frac{b}{2} = x$; l'équation devient $yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, laquelle, comparée à $yy = \frac{1}{4}\,aa - xx$, donne le rayon $\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}}$. Pour trouver le centre et déterminer, en même temps, ce rayon, l'équation $t - \frac{rb}{2m} = y$, m'apprend que si je mène

AB parallèle à PM, c'est-à-dire si j'élève au point A la perpendiculaire $AB = \frac{rb}{2m}$, et si je tire BCQ parallèle à AR, les lignes QM seront y, mais l'équation $u - \frac{b}{2} = x$ me fait voir que si je prends $AG = \frac{b}{2}$, GP sera x; donc si, par le point G, je mène CG parallèle à PM, le point C sera le centre. D'ailleurs, si l'on tire AC, on aura, à cause de l'angle droit G, $AC = \sqrt{\overline{AG}^2 + \overline{GC}^2} = \sqrt{\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}}$; AC sera donc le rayon, comme nous l'avons déjà trouvé plus haut. Cette construction se réduit donc à élever sur le milieu de AR la perpendiculaire $GC = \frac{rb}{2m}$, et à décrire un cercle du point C, comme centre, avec CA pour rayon : tout angle MAR qui aura son sommet à la circonférence de ce cercle, et qui passera par les points A et R, sera égal à l'angle donné. Or, pour construire la quantité $\frac{rb}{2m}$, il n'y aura autre chose à faire qu'à mener une droite AO qui fasse avec AB l'angle BAO égal à l'angle donné : elle coupera GC au point cherché C; car dans le triangle rectangle ABC, on a r : tang BAC :: AB : BC ou AG, c'est-à-dire $r : m :: AB : \frac{1}{2}b$; donc AB ou $CG = \frac{rb}{2m}$. Tout se réduit à mener par le point A la ligne AO qui fasse avec AR l'angle RAO égal au complément de l'angle donné. Cette ligne coupera en C la perpendiculaire élevée sur le milieu de AR, en sorte que C sera le centre et CA le rayon.

394. De là il est facile de résoudre la question suivante : *Connaissant la position des trois points* R, A, R′ (fig. 59), *et les angles sous lesquels on voit les lignes* RA, AR′, *d'un certain point* M, *trouver ce point* M. Sur les milieux G et G′ des deux lignes RA et R′A, on élevera les perpendiculaires GC et G′C′; par le point A, on menera les lignes AC et AC′ faisant avec AR et AR′, chacune avec chacune, les angles RAC, R′AC′, égaux chacun au complément de l'angle RMA, R′MA, sous lequel la ligne correspondante est vue. Des points C et C′, comme centres, et des rayons CA et C′A, on décrira deux cercles qui se couperont en A et en M; le point M sera le point cherché. C'est une suite évidente de la solution précédente. Ce problème peut servir à marquer, sur la carte d'un pays, la position d'un point d'où l'on a relevé trois objets connus. Si les angles observés RMA, R′MA étaient égaux aux angles RR′A et R′RA, alors le problème ne serait plus déterminé, les deux cercles se confondraient, et chaque point de leur circonférence satisferait à la question.

395. Pour troisième question, il s'agira de trouver la courbe, ou les courbes

qui auraient la propriété suivante : AZ, AT (fig. 60) *sont deux lignes qui font entre elles un angle quelconque donné ; il s'agit de trouver les courbes dont la distance de chaque point* M *à un point fixe* F, *pris sur* AZ, *soit toujours dans un même rapport avec la distance* MT *du même point* M *à la droite* AT, *cette distance étant mesurée parallèlement à* AZ. D'un point quelconque M de cette courbe, imaginons la ligne MP parallèle à AT, et la perpendiculaire MS sur AZ; l'angle MPS est donné; c'est pourquoi son sinus et son cosinus sont censés connus; nous les nommerons p et q, en représentant par r le rayon des tables. Nommons AP, u, et PM, t; la ligne connue AF, c.

Cela posé, dans le triangle rectangle MPS, nous aurons (*Géom.* 295) $r : \sin \text{MPS} :: \text{MP} : \text{MS}$ et $r : \sin \text{PMS ou cos MPS} :: \text{PM} : \text{PS}$; c'est-à-dire $r : p :: t : \text{MS} = \frac{pt}{r}$, et $r : q :: t : \text{PS} = \frac{qt}{r}$. Donc.....

$\text{FS} = \text{PS} - \text{PF} = \text{PS} - \text{AP} + \text{AF} = \frac{qt}{r} - u + c$; or, le triangle rectangle MSF donne

$$\text{MF} = \sqrt{\overline{\text{MS}}^2 + \overline{\text{FS}}^2};$$

donc $\text{MF} = \sqrt{\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2}$,

ou, parce que (*Géom.* 281) $p^2 + q^2 = r^2$, on aura.....

$\text{MF} = \sqrt{t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc}$; puis donc que MF doit être à MT ou AP dans un rapport donné, si l'on représente ce rapport par celui de g à h, on trouvera

$$h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2 - g^2)u^2 + \frac{2ch^2qt}{r} - 2ch^2u + h^2c^2 = 0;$$

équation qui renferme les sections coniques (379) et qui (391) appartiendra à l'ellipse, si $\frac{4q^2h^4}{r^2} - 4h^4 + 4h^2g^2$ est négatif, ou parce que.....

$r^2 - q^2 = p^2$, si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est négatif; au contraire, elle appartiendra à l'hyperbole si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est positif. Elle sera à la parabole si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2} = 0$, ou si $rg = ph$; enfin la courbe sera un cercle, lorsqu'on aura $h^2 = h^2 - g^2$, ce qui ne peut jamais avoir lieu qu'autant que g sera zéro, ou que h sera infinie, parce que, dans ce dernier cas, on doit négliger g^2 vis-à-vis de h^2.

Si l'on veut maintenant construire la courbe dans chacun de ces cas, il n'y a qu'à imiter ce qui a été fait (379 *et suiv.*); comme nous avons alors opéré sur l'ellipse, pour voir la similitude des opérations et des constructions à l'égard de ces deux courbes, nous allons ici appliquer à l'hyperbole ce qui a été fait au même endroit cité, c'est-à-dire chercher à

ramener l'équation à la forme $yy = \frac{bb}{aa}\left(xx - \frac{1}{4}aa\right)$. Je dégage donc t^2 dans l'équation trouvée ci-dessus, et pour faire disparaître le second terme, par rapport à t, je fais $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$; observant que $r^2 - q^2 = p^2$, et posant ensuite $p^2h^2 - r^2g^2 = r^2k^2$, je trouve

$$u^2 - \frac{2ch^2p^2}{r^2k^2}\,u + \frac{h^2}{k^2}\,y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0.$$

Soit $$u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n};$$

on trouvera $y^2 = -\frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2 + \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn\right)$; mais puisqu'il s'agit de l'hyperbole, la quantité r^2kk, qui n'est autre chose que $p^2h^2 - r^2g^2$, est négative, puisque, selon la remarque que nous venons de faire ci-dessus, $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$, ou $\frac{4h^2}{r^2}(r^2g^2 - p^2h^2)$ doit être positif pour que la courbe soit une hyperbole. Ainsi il faut rendre k^2 négatif, en observant, lorsqu'on voudra substituer sa valeur dans l'équation, de remettre, pour cette valeur, la quantité $r^2g^2 - p^2h^2$, au lieu de $p^2h^2 - g^2r^2$; l'équation devient donc $y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2 - \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn\right)$. Comparant cette équation avec.... $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - \frac{1}{4}aa\right)$, on aura $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}$ et $\frac{1}{4}aa = \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} + nn$, d'où l'on tirera les deux diamètres conjugués a et b, que nous allons voir être les deux axes mêmes de l'hyperbole. Déterminons donc la direction des diamètres conjugués, auxquels notre équation réduite se rapporte. Conformément à ce qui a été fait (381), il faut construire $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, et $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; mais comme k^2 est négatif, il faut changer cette dernière en (1)... $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; je ne change point le signe du terme affecté de x, quoique k^2 y entre, parce que la quantité n peut être prise arbitrairement positive ou négative. Il faut donc, en continuant d'imiter ce qui a été fait au même endroit cité, mener par le point A, parallèlement à PM, la ligne $AB = \frac{cq}{r}$, et tirant par le point B la ligne BI parallèle à AZ, prendre arbitrairement sur le prolongement de cette ligne, la partie BK, puis mener KL parallèle à PM, et telle que l'on ait BK : KL :: r ; q; alors si, par le point B et le point L, vous tirez LBQ qui rencontre les lignes PM en Q; les lignes QM seront y. Car

$$QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{cq}{r};$$

or, les triangles semblables BKL, et BQI donnent BK : KL :: BI ou AP : QI, c'est-à-dire $r : q :: u : \mathrm{QI} = \frac{qu}{r}$; donc $\mathrm{QM} = t - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y$.

Mais on peut abréger cette construction, en menant tout de suite du point F la ligne FB perpendiculaire sur TA; car il est évident que l'angle FAB est égal à APM, et que, par conséquent, dans le triangle rectangle ABF, on a $r : q :: c : \mathrm{AB} = \frac{qc}{r}$; ainsi, puisque QM est parallèle à AB, les y sont perpendiculaires sur BQ, et par conséquent BQ est la direction d'un des axes, dont l'autre par conséquent est parallèle à QM.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre. Or, l'équation (1) fait voir qu'il faut prendre, à l'opposite des u, la quantité $\mathrm{AG} = \frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$, et tirer GC parallèle à PM, ou perpendiculaire à BQ, qui déterminera le point C pour l'origine des x, et par conséquent pour le centre. En effet, les x doivent être pris sur CQ, puisque les y se comptent depuis cette ligne; or, l'équation (1) donne $\mathrm{GP} = \frac{\mathrm{AG} \times x}{n}$; les lignes x commencent donc en même temps que les lignes GP; donc les lignes x doivent commencer au point C, et sont par conséquent CQ; donc le point G est le centre. On s'y prendra d'une manière semblable pour l'ellipse. A l'égard de la parabole, puisqu'on a, dans ce cas, $rg = ph$, l'équation que l'on a eue en y et u, après l'évanouissement du second terme par rapport à t, et après avoir introduit pour $r^2 + q^2$ sa valeur p^2, devient, en mettant dans la valeur de k^2, au lieu de g, sa valeur tirée de $rg = ph$, devient, dis-je, $y^2 = \frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2}$; pour la réduire à la forme ordinaire de l'équation à la parabole, on fera (385) $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, ce qui donnera $yy = nx$; et ayant construit de la même manière que dans le cas précédent, l'équation $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, qu'on a eue pour l'évanouissement du second terme par rapport à t, on construira l'équation $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, d'une manière analogue à ce qui a été fait (385). Cette dernière construction se rapporte à la figure 61.

398. Qu'il soit question maintenant de *trouver* (fig. 62) *la courbe que décrirait un point donné* M *de la ligne donnée* OH, *ou de son prolongement, si l'on faisait glisser les extrémités* O *et* H *le long des deux côtés* CO, CH, *de l'angle donné* OCH. D'un point quelconque M de cette courbe, menons MP parallèle à CH, puis MN perpendiculaire à CO; faisons $\mathrm{CP} = u$, $\mathrm{PM} = t$; et puisque l'angle OCH ou son égal OPM est donné, son supplément MPN est donné aussi : nommons donc p le sinus et q le cosinus de ce dernier, en supposant le rayon r; enfin désignons par g et h les lignes données OM et MH. Le triangle rectangle PNM nous

donne $r : p :: t : \text{MN}$, et $r : q :: t : \text{PN}$; donc $\text{MN} = \frac{pt}{r}$, et $\text{PN} = \frac{qt}{r}$. Les parallèles CH et PM nous donnent $\text{MH} : \text{PC} :: \text{MO} : \text{PO}$, c'est-à-dire $h : u :: g : \text{PO} = \frac{gu}{h}$; donc $\text{NO} = \frac{qt}{r} + \frac{gu}{h}$; or, le triangle rectangle MNO donne $\overline{\text{MN}}^2 + \overline{\text{NO}}^2 = \overline{\text{MO}}^2$, c'est-à-dire.....

$\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} + \frac{2gqut}{rh} + \frac{g^2u^2}{h^2} = gg$; donc, puisque $p^2 + q^2 = r^2$, on aura $t^2 + \frac{2gqut}{rh} + \frac{g^2u^2}{h^2} = gg$, équation à l'ellipse (380).

Pour ramener cette équation à la forme $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, il faut d'abord faire disparaître le second terme par rapport à t. Je fais donc $t + \frac{gqu}{rh} = y$, et observant que $r^2 - q^2 = p^2$, je trouve $y^2 + \frac{g^2u^2p^2}{r^2h^2} = g^2$; or, quoique dans cette équation il n'y ait pas de second terme par rapport à u, néanmoins (388) comme le terme ut s'est trouvé dans l'équation primitive, je fais une transformation pour u, en faisant $u = \frac{lx}{n}$, et j'ai.....

$y^2 = \frac{g^2p^2l^2}{r^2h^2n^2}\left(\frac{r^2h^2n^2}{p^2l^2} - x^2\right)$. Mais comme on n'a besoin que d'une seule indéterminée n, je supposerai $l = r$, ce qui réduira l'équation à.....

$y^2 = \frac{g^2p^2}{h^2n^2}\left(\frac{h^2n^2}{p^2} - x^2\right)$. Pour déterminer l'ellipse, j'en cherche d'abord les diamètres conjugués, en comparant à l'équation $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$: cette comparaison donne $a = \frac{ghn}{p}$ et $b = ag$. Voyons maintenant quelles en sont les directions, et quelle est la valeur de n. Les deux équations à construire sont $t + \frac{gqu}{rh} = y$ et $u = \frac{lx}{n} = \frac{rx}{n}$. Pour la première, si l'on prend arbitrairement CK, et que l'on mène ensuite KL parallèle à PM, et telle que l'on ait $\text{CK} : \text{KL} :: rh : gq$; alors les lignes QM, comptées depuis la rencontre des lignes PM avec CL, seront y; en effet les triangles semblables CKL et CPQ donnent $\text{CK} : \text{KL} :: \text{CP} : \text{PQ}$, c'est-à-dire.....

$rh : gq :: u : \text{PQ} = \frac{gqu}{rh}$; donc $\text{QM} = \text{PM} + \text{PQ} = t + \frac{gqu}{rh} = y$.

Les lignes QM étant y, il faut maintenant que les x soient comptés sur CQ; or, l'équation $u = \frac{rx}{n}$ fait voir que les x commencent en même temps que les u; donc le point C est l'origine des x; donc C est le centre, et CQ et CH sont les directions des deux diamètres conjugués. Quant à la valeur de n, l'équation $u = \frac{rx}{n}$ ou $\text{CP} = \frac{r \times \text{CQ}}{n}$, donne $n = \frac{r \times \text{CQ}}{\text{CP}}$; mais.....

$CP : CQ :: CK : CL$; donc $\frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK}$; donc $n = \frac{r \times CL}{CK}$; mais puisque CK est arbitraire, on peut le supposer $= r$, ce qui donne $n = CL$; on a donc tout ce qu'il faut pour construire l'ellipse (315).

Application des mêmes principes à quelques questions déterminées.

397. Après avoir résolu la seconde question indéterminée que nous nous sommes proposée (393), nous en avons fait usage (394) pour résoudre une question déterminée. Nous avons tacitement considéré cette dernière comme en renfermant deux autres, toutes deux indéterminées, et qui étant chacune de même espèce que la première, ont été résolues chacune de la même manière. L'intersection des deux courbes ou cercles qui étaient le *lieu* de chacune de ces deux questions partielles, a donné la résolution de la question déterminée. Lorsque l'équation finale qui exprime les conditions d'une question passe le second degré, on s'y prend d'une manière semblable pour la résoudre. Dans le cas où l'on pourrait n'employer qu'une inconnue, on en emploie deux, et l'on cherche à former, par les conditions de la question, deux équations qui, étant construites séparément, donnent chacune une courbe dont chaque point satisfait à l'équation qui lui appartient : si le problème est possible, les deux courbes se rencontrent en un ou plusieurs points, selon que la question est susceptible d'une ou de plusieurs solutions, selon qu'elle renferme plusieurs cas dépendans des mêmes données et des mêmes raisonnemens. Ces intersections fournissent les différentes solutions de la question. Tant que les deux équations à deux indéterminées ne passeront pas le second degré, on voit donc que la résolution ne dépendra jamais que de l'intersection de deux sections coniques tout au plus; au lieu que, dans ces mêmes cas, si l'on n'employait qu'une seule inconnue, ou si, par le moyen des deux équations trouvées, on éliminait ou chassait une des deux inconnues, l'équation monterait au troisième et plus souvent au quatrième degré. Mais si l'une des équations, ou toutes les deux, passent le second degré, alors la résolution dépend de l'intersection de courbes plus élevées que les sections coniques. Voyons d'abord quelques exemples des questions qui ne passeraient pas le quatrième degré.

398. Proposons-nous, pour première question, *de trouver deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données* a *et* b. Si je nomme t et u ces deux moyennes proportionnelles, j'aurai la progression..... $:: a : t : u : b$, qui me donne ces deux proportions $a : t :: t : u$ et $t : u :: u : b$, et par conséquent, ces deux équations, $au = t^2$ et $bt = u^2$, qui toutes deux se rapportent directement à la parabole. C'est pourquoi si l'on tire (fig. 63) deux lignes indéfinies AZ, AX, qui fassent entre elles un angle quelconque, que, pour plus de simplicité, on supposera droit, et si sur l'une AZ, comme diamètre, et du point A, comme sommet de ce diamètre, on

construit (366) une parabole dont le paramètre du diamètre AZ soit a, et dont l'angle des coordonnées soit XAZ, cette parabole sera le lieu de l'équation $au = t^2$, en sorte que les lignes AP étant u, les lignes PM seront t. Pareillement, si sur AX, comme diamètre, et du point A, comme sommet, on construit une parabole dont le paramètre du diamètre AX soit b, et dont l'angle des coordonnées soit XAZ, cette parabole sera le lieu de l'équation $bt = u^2$, en sorte que les lignes AP' étant t, les lignes P'M' seront u. Mais pour que la question soit résolue, il faut que les deux équations $au = t^2$ et $bt = u^2$ aient lieu en même temps, c'est-à-dire que la valeur de u dans l'une soit la même que la valeur u dans l'autre, et qu'il en soit de même de t; or, c'est ce qui arrive évidemment au point M où se rencontrent les deux paraboles; car les u étant comptés sur AZ, et les t sur AX ou parallèlement à AX, il est visible que si l'on tire MP et PM parallèlement à AX et AZ, la valeur MP de u dans la parabole AMM' est la même que la valeur AP de u dans la parabole AMM; pareillement, la valeur AP de t, dans la parabole AM'M', est la même que la valeur PM de t dans la parabole AMM; on aperçoit aisément que le point M est le seul point pour lequel, à une même valeur de u, dans les deux courbes, correspondent deux valeurs égales de t: il faut cependant en excepter le point A, autre intersection de deux courbes; mais comme u et t y sont zéro, il est évident que ce point ne satisfait point à la question. Les valeurs de u et t sont donc AP et PM, le point M étant le point de rencontre.

399. Au reste, quoiqu'on puisse toujours parvenir à la solution en construisant séparément les équations que l'on trouve, quelquefois en préparant ces équations, on peut trouver des constructions plus simples; par exemple, si l'on ajoute les deux équations $au = t^2$ et $bt = u^2$, on aura $au + bt = u^2 + t^2$; équation du cercle, en supposant que les u et les t seront pris sur des lignes perpendiculaires entre elles. Or, quoique la parabole soit facile à construire, le cercle l'est encore davantage: ainsi, dans le cas présent, je préférerais de construire d'abord l'équation $au = t^2$ seulement, comme ci-dessus; après quoi je construirais l'équation du cercle $au + bt = u^2 + t^2$, en la changeant en cette autre $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$, par l'évanouissement des seconds termes par rapport à t et à u, en faisant $t - \frac{1}{2}b = y$, et $u - \frac{1}{2}a = x$. Alors prenant $AB = \frac{1}{2}b$, et tirant BQ parallèle à AP, j'aurais les lignes QM pour les valeurs de y. Prenant ensuite $AO = \frac{1}{2}a$ et menant OC parallèle à AX, j'aurais les lignes CQ pour valeurs de x; c'est pourquoi, du point C, comme centre, avec un rayon $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} = AC$, je dé-

crirais un cercle qui, coupant la parabole AM au point M, me donnerait PM et AP pour les valeurs de t et de u.

400. On peut varier beaucoup ces constructions : par exemple, si l'on ajoute l'une des deux équations avec l'autre multipliée par une quantité arbitraire $\frac{l}{n}$ positive ou négative, on aura $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$; équation qui peut appartenir à l'ellipse ou à l'hyperbole, selon la quantité qu'on prendra pour $\frac{l}{n}$, en sorte qu'on peut construire avec l'une ou l'autre de ces deux courbes, comme on vient de le faire avec le cercle. On peut même construire avec l'une et avec l'autre, ou avec l'une seulement, combinée avec un cercle, et cela en donnant à $\frac{l}{n}$ des valeurs convenables, et qui sont faciles à déterminer, d'après ce qui a été dit (391).

401. Proposons-nous, pour seconde question, de *diviser un angle ou un arc donné, en trois parties égales*. Soit EO (fig. 64) l'arc qu'il s'agit de diviser, A son centre : après avoir supposé $EM = \frac{1}{3}EO$, et mené les rayons MA, AE, si l'on abaisse les perpendiculaires OR et MP; les lignes OR et AR, qui sont les sinus et cosinus de l'arc donné, seront censées connues, et il s'agira de déterminer AP et PM. Faisons donc $OR = d$, $AR = a$, $AE = r$, $AP = u$ et $PM = t$. Cela posé, le triangle rectangle APM donne $u^2 + t^2 = rr$. Or, les triangles semblables APM, ARS, donnent $AP : PM :: AR : RS$, c'est-à-dire $u : t :: a : RS = \frac{at}{u}$. Mais si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en V, l'arc MV sera égal à l'arc MO, comme étant chacun double de ME; donc l'angle $OMS = AMV = ASR = OSM$. Donc le triangle SOM est isoscèle, et par conséquent $OS = OM = MV = 2t$; donc, puisque $OR = OS + SR$, on aura $d = 2t + \frac{at}{u}$ ou $tu + \frac{1}{2}ut = \frac{1}{2}du$. Les deux équations à construire sont donc $t^2 = r^2 - u^2$, et $tu + \frac{1}{2}ut = \frac{1}{2}du$. La première est toute construite, puisque c'est l'équation du cercle EMO. Quant à la seconde, elle appartient à l'hyperbole (390); et comme les deux carrés manquent, il faut, conformément à ce qui a été dit au même endroit cité, passer dans un même membre tous les termes affectés de u, ce qui donne $\frac{1}{2}du - tu = \frac{3}{2}at$; faisant $\frac{3}{2}d - t = y$, on a $uy + \frac{1}{2}ay = \frac{1}{4}ad$. Je fais ensuite $u + \frac{3}{2}a = x$, et j'ai $xy = \frac{1}{4}ad$, équation à l'hyperbole entre les asymptotes, que l'on déterminera de la manière suivante. L'équation $\frac{1}{2}d - t = y$ fait voir que si, par le point A, origine des u et des t, on mène AB pa-

rallèle à PM et égale à $\frac{1}{2}d$, et que l'on tire QBC parallèle à AP, les lignes QM, comptées dans un sens opposé aux PM, seront y; en effet, $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2}d - t = y$; donc CQ est la direction d'une des asymptotes. La seconde équation $u + \frac{1}{2}c = x$, fait voir que si l'on prolonge AP vers G de la quantité $AG = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}AR$, les lignes GP ou leurs égales CQ, en tirant GC parallèle à PM, seront x; donc C est le centre, et les lignes CQ et GC sont les asymptotes. On décrira donc, par la méthode donnée (353), une hyperbole entre ces asymptotes, laquelle passe par le point A, ainsi que l'indique l'équation.....

$xy = \frac{1}{2}e \times \frac{1}{2}d = AG \times AB = CB \times AB$; cette hyperbole coupera le cercle au point cherché M.

Si l'arc EO était de plus de 90°, son cosinus RA tombant alors du côté opposé, serait négatif; il faudrait, dans les équations ci-dessus, supposer c négatif. Et si l'arc EO était de plus de 180°, et de moins de 270°, comme l'arc EOE'O', son sinus et son cosinus seraient négatifs; il faudrait donc changer les signes de c et de d dans les équations trouvées ci dessus.

Si l'on prolonge GC de la quantité $CG' = CG$, et CB de la quantité $CB' = CB$, et qu'ayant mené B'A' et G'A' parallèles à CG' et CB', on décrive entre les lignes CG' et CB', comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A', cette hyperbole rencontrera le cercle en deux points A', M', comme la première le rencontre aux deux points M et M''. Or, de ces quatre points, trois méritent d'être remarqués, savoir, les points M, M' et M''. Le premier donne l'arc EM pour le tiers de l'arc donné EO. Le second, M', donne l'arc E'M' pour le tiers de E'O, supplément de EO. Enfin, le troisième, M'', donne E'M'' pour le tiers de EOE'O', c'est à dire de l'arc OE augmenté de la demi-circonférence. En effet, l'arc E'O a pour sinus et cosinus les lignes RO et AR, ainsi que l'arc EO, avec cette seule différence, que AR, considéré comme cosinus de l'arc E'O, plus grand que 90°, est négatif; donc, pour avoir la solution, dans ce second cas, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer, dans celle qui précède, que c est négatif; or, ce changement n'affecte que la seconde équation, et change sa réduite $xy = \frac{1}{4}cd$, en $xy = -\frac{1}{4}cd$, équation qui appartient à l'hyperbole A'M', et qui fait donc voir que la solution de ce cas sera fournie par l'intersection M' de cette branche d'hyperbole avec le cercle; nous verrons, dans un moment, pourquoi ce n'est pas le point A'. P'M' est donc le sinus de l'arc cherché, dans ce second cas. Cet arc est donc E'M', c'est-à-dire que E'M' est le tiers de E'O.

A l'égard de la troisième solution, si l'on augmente l'arc EO de 180°, ce qui se fera en prenant $E'O' = EO$, alors l'arc EOE'O' a pour sinus

et cosinus les lignes R'O' et AR', qui sont nécessairement égales aux lignes RO et AR, avec cette différence seulement que, tombant toutes deux de côtés opposés à ces dernières, elles sont négatives; donc pour avoir la solution qui convient à ce cas, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer c et d négatifs. Or, ce changement n'en produit aucun dans l'équation où entrent c et d, c'est-à-dire dans l'équation $xy = \frac{1}{4}cd$; donc la première hyperbole doit donner, par son intersection M'', la solution de ce troisième cas; donc P''M'' est le sinus de l'arc cherché dans ce troisième cas; cet arc est donc E'M'', c'est-à-dire que E'M'' est le tiers de EOE'O'. Ainsi la même construction qui sert à trouver le tiers d'un arc donné A, sert aussi à trouver le tiers de $180^\circ - A$, et le tiers de $180^\circ + A$.

On peut appliquer ici ce que nous avons dit (399) sur les différentes sections coniques qu'on peut employer pour construire, en combinant à volonté les deux équations en u et t. A l'égard de la quatrième intersection, nous avons dit qu'elle se faisait au point A', ce qui est évident, puisque l'hyperbole est assujettie à passer par le point A', qui est déterminé en faisant B'A' = AB, et CB' = CB, ce qui fait voir que A'R = AR et R'A' = RO; donc le point A' appartient à la circonférence. Mais il ne donne point une nouvelle solution; puisqu'il est connu, et déterminé par des opérations indépendantes des équations qui ont donné la solution.

402. Si, de l'équation $atu + ct = du$, trouvée ci-dessus, on tire la valeur de t, pour la substituer dans l'équation $u^2 + t^2 = r^2$, et si l'on observe que $c^2 + d^2 = r^2$, et si l'on divise ensuite par $u + c$, on trouvera..... (1), $\therefore 4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, équation qui doit renfermer les trois cas que nous venons d'examiner: elle doit donc avoir trois racines; or, la construction fait voir que u a eu effet trois valeurs, savoir, AP, AP', AP'', et ces deux dernières tombant de côtés opposés à la première, on voit que cette équation a trois racines ou valeurs de u, dont deux sont négatives, savoir, $u = -AP'$, $u = -AP''$, et la troisième positive, savoir, $u = AP$.

403. L'équation (1) est dans le cas irréductible, et ses racines étant les cosinus de $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^\circ - EO)$, $\frac{1}{3}(180^\circ + EO)$, on peut, par le moyen des tables des sinus, trouver les trois racines d'une équation du troisième degré, dans le cas irréductible, avec une approximation suffisante; voici la méthode. Représentons toute équation du troisième degré, dans le cas irréductible, par $u^3 - pu + q = 0$; en comparant à l'équation..... $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, nous aurons $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, $-\frac{cr^2}{4} = q$; d'où $r = \sqrt{\frac{4}{3}p}$, et $c = -\frac{3q}{p}$. Représentons par R le rayon des tables; alors nous aurons le cosinus de l'arc EO, rapporté aux tables, en calculant le quatrième terme de cette proportion $r : c$, ou.....

$\sqrt{\frac{3}{4}p} : \frac{3q}{p} :: R : \frac{3qR}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}}$; ce quatrième terme étant cherché dans les tables, donnera le sinus du complément de l'arc EO ; c'est pourquoi, ajoutant 90° au nombre de degrés que l'on trouvera, ou, au contraire, retranchant ce nombre de 90°, selon que q sera positif ou négatif dans l'équation, la somme ou la différence sera EO, que je représente par A ; on cherchera donc, dans les mêmes tables, les cosinus des trois arcs $\frac{A}{3}$, $\frac{180°-A}{3}$, et $\frac{180°+A}{3}$; mais pour les réduire au rayon r, on multipliera chacun par $\frac{r}{R}$, c'est-à-dire par $\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$; les trois valeurs de u seront donc.....

$$u=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}\cos\frac{A}{3},\quad u=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}\cos\frac{180°-A}{3},\quad \text{et } u=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}\cos\frac{180°+A}{3};$$

telle est l'expression des valeurs absolues de u ; mais ce qui a été dit (402) fait voir que, eu égard à leurs signes, les valeurs de u sont

$$u=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}\cos\frac{A}{3},\quad u=-\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}\cos\frac{180°-A}{3},\quad \text{et } u=-\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}\cos\frac{180°+A}{3};$$

valeurs où il faudra observer de changer le signe de celles dans lesquelles l'arc $\frac{A}{3}$, ou $\frac{180°-A}{3}$, ou $\frac{180°+A}{3}$ passera 90°. On peut faciliter ces opérations par le moyen des logarithmes.

404. Proposons-nous maintenant cette question plus générale que celle que nous avons résolue (273). *D'un point* D (fig. 65) *donné de position à l'égard des deux lignes* AR, AP, *qui font entre elles un angle connu, mener la ligne* PD *de manière que sa partie interceptée* RP *soit égale à une ligne donnée.* Du point D menons la ligne DS perpendiculaire à AP prolongé, et la ligne DO parallèle à AR ; menons aussi du point R la ligne RN perpendiculaire à AP. Les lignes DO, DS, OS et AO, sont censées connues, tant parce que la position du point D est supposée connue, que parce que l'angle RAP, ou son supplément RAN égal à DOS, est donné ; c'est pourquoi nous ferons $DO=r$, $DS=p$, $OS=q$, $AO=d$, et la ligne donnée $RP=c$. Enfin nous nommerons u et t les inconnues AP et AR. Cela posé, les triangles semblables DSO, RNA, donneront $DO : DS :: AR : RN$, et $DO : OS :: AR : AN$; ou $r : p :: t : RN=\frac{pt}{r}$, et $r : q :: t : AN=\frac{qt}{r}$; donc $NP=\frac{qt}{r}+u$; or $\overline{RN}^2+\overline{NP}^2=\overline{RP}^2$; subs-

tituant les valeurs algébriques de RN, NP, PR, et observant que..... $p^2+q^2=r^2$, on trouve $t^2+\frac{2qut}{r}+u^2=cc$. Mais comme on a deux inconnues, il faut deux équations ; or les triangles semblables DQP, RAP, donnent DQ : RA :: QP : AP, ou $r:t::d+u:u$, et par conséquent, $ru=td+ut$. Ce sont là les deux équations qu'il faut construire pour résoudre la question. La première (380) appartient à l'ellipse, et la seconde à l'hyperbole. Pour construire la première, je fais $t+\frac{qu}{r}=y$; d'où..... $yy+\frac{ppuu}{rr}=cc$. Je fais $u=\frac{l}{n}x$ (388), et j'ai $yy+\frac{pplxx}{rrnn}=cc$; je pose $l=r$, d'où $y^2=\frac{p^2}{n^2}\left(\frac{c^2n^2}{p^2}-x^2\right)$. Comparant à $yy=\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa-xx\right)$, on trouvera les diamètres conjugués $a=\frac{2cn}{p}$, et $b=2c$. Déterminons leur position et la valeur de n ; mais pour mieux sentir l'usage de cette construction, convenons auparavant que, donnant successivement à n ou AP plusieurs valeurs, on mène, parallèlement à AR, les lignes PM égales aux valeurs correspondantes de t, ce qui produira la courbe dont l'équation nous occupe actuellement. Cela posé, ayant pris arbitrairement AK sur AP, et mené KL parallèle à PM et qui soit à AK :: $q:r$, on aura..... $QM=PM+PQ=t+\frac{qu}{r}$, à cause des triangles semblables AKL, et APQ ; donc $QM=y$; AQ est donc la direction d'un des diamètres, et les x doivent être comptés sur ce diamètre ; or l'équation $u=\frac{l}{n}x=\frac{r}{n}x$, fait voir que les x commencent en même temps que les u ; donc les x sont AQ. Cela étant, l'équation $u=\frac{rx}{n}$ devient donc $AP=\frac{r\times AQ}{n}$, qui donne $n=\frac{r\times AQ}{AP}$, ou AP : AQ :: $r:n$; c'est-à-dire AK : AL :: $r:n$; comme AK est arbitraire, on peut le supposer $=r$, et l'on aura, par conséquent, $n=AL$. Il ne s'agit donc plus que de construire (315) une ellipse dont les diamètres conjugués fassent entre eux un angle égal à AQM, et dont celui qui a AQ pour direction soit $=\frac{2cn}{p}$, et l'autre, qui a AR pour direction, soit $=2c$. Cette ellipse sera le lieu de la première équation. Mais on peut remarquer, en passant, que cette ellipse est précisément celle que décrirait le milieu d'une ligne égale à 2RP, glissant le long des côtés AP, AR ; c'est ce dont il est aisé de se convaincre, en comparant avec la solution donnée (396) et y supposant $g=h=c$. Quand l'angle RAP est droit, l'ellipse devient un cercle dont le rayon est c.

Il ne reste plus qu'à construire $ru=dt+ut$; je fais $r-t=y'$, et ensuite $u+d=x'$, ce qui donne $x'y'=rd$, équation de l'hyperbole entre ses asymptotes. On prendra donc, en vertu de l'équation $r-t=y'$, sur

AR, la quantité $AT = r = OD$, c'est-à-dire que par le point D on tirera DTV parallèle à AP; alors les lignes VM seront y' en les comptant de V vers M, c'est-à-dire dans un sens opposé à PM, car $VM = PV - PM = r - z$; donc $VM = y'$. Ensuite, en vertu de l'équation $u + d = x'$, on prendra $OA = d$, c'est-à-dire qu'on menera par le point D la ligne DO parallèle à AT; alors les lignes DV seront x', puisque $DV = OP = AO + AP = d + u$. On construira donc (353) entre les lignes DO et DV, comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A, puisqu'on a $x'y' = rd = AO \times AT$; cette hyperbole rencontrera l'ellipse aux deux points M et M', par lesquels menant MR et M'R', parallèles à AP, on aura deux points R et R', tels que tirant les droites DRP, DR', les parties PR et P'R', interceptées dans les angles égaux RAP, R'AP', seront égales à la ligne c. Si, en prolongeant les asymptotes, on décrit l'hyperbole opposée (fig. 66) $M'A'M''$, dans le cas où elle rencontrera l'ellipse, elle déterminera deux nouveaux points M'', M''', par lesquels menant des parallèles à AP, on aura sur AT deux nouveaux points R'', R'''; si maintenant on mène les lignes $R''D$, $R'''D$, les parties comprises dans l'angle TAS seront aussi égales à la ligne donnée c. Telle est, en général, la manière dont on doit s'y prendre pour résoudre les questions déterminées qui n'excéderont pas le quatrième degré.

405. Si l'on avait résolu la question sans employer deux inconnues, on pourrait néanmoins faire usage de la même méthode, en introduisant une nouvelle inconnue. Par exemple, si l'on proposait de *trouver un cube qui fût à un cube connu* a^3 *dans un rapport donné, exprimé par celui de* m *à* n; en nommant u le côté de ce cube, on aurait $u^3 : a^3 :: m : n$, et par conséquent $nu^3 = ma^3$. Pour construire cette équation, je supposerais $u^2 = at$; alors l'équation se changerait en $natu = ma^3$, ou $tu = \frac{ma^2}{n}$. Je construirais donc la parabole qui a pour équation $u^2 = at$, et l'hyperbole qui a pour équation $tu = \frac{ma^2}{n}$. L'intersection de ces deux courbes me donnerait la valeur de n et s. Si l'on multiplie par u l'équation $tu = \frac{ma^2}{n}$, et qu'on y substitue de nouveau pour u^2 sa valeur at, on aura..... $at^2 = \frac{ma^2u}{n}$, ou $t^2 = \frac{ma}{n}u$; autre équation de la parabole, que l'on peut construire conjointement avec l'équation $u^2 = at$. On peut remarquer, en passant, que ces équations sont celles qu'on aurait en cherchant deux moyennes proportionnelles entre a et $\frac{ma}{n}$; ainsi on peut construire précisément de la même manière qu'on l'a fait (398).

406. L'équation $nu^3 = ma^3$ donne $u = \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$; la construction des radicaux cubes se fait donc par le moyen des sections coniques. Il en est

de même des radicaux quatrièmes, lorsqu'ils renferment des radicaux cubes, car s'ils ne couvraient que des radicaux carrés, ou des quantités rationnelles, leur construction se ramenerait toujours au cercle; en effet, en prenant une moyenne proportionnelle m entre a et b, on aurait $\sqrt{ab}$; prenant une moyenne proportionnelle n entre a et m, on aurait $\sqrt[4]{a^2m^2}$ ou $\sqrt{am}$, qui exprime une moyenne proportionnelle entre a et m.

407. Quand l'équation déterminée aurait un plus grand nombre de termes, on la construirait toujours d'une manière analogue.

408. Mais en introduisant ainsi arbitrairement une nouvelle équation, il peut arriver que les deux courbes ne se rencontrent point, quoique la question qui aura donné l'équation ait une ou plusieurs solutions; c'est pourquoi, pour éviter tout embarras, nous allons exposer un procédé qui a lieu également pour tous les degrés. Supposons que l'équation soit $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = 0$; on fera... $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = a^2t$, t marquant une indéterminée, et α, p, q, des nombres ou des lignes connus; alors, si l'on conçoit qu'on donne à u successivement plusieurs valeurs AP, AP, etc. (fig. 67), et que l'on porte (*) les valeurs correspondantes de t (qui seront faciles à avoir, puisque t ne monte qu'au premier degré) en PM, PM, etc., sous un angle quelconque que, pour plus de simplicité, on peut supposer droit, il en naîtra une courbe. Or, pour savoir où cette courbe rencontre l'axe AP, il faut supposer $t = 0$; ce qui donne l'équation proposée; donc les distances AO, AO', AO'', etc., auxquelles la courbe rencontre l'axe, seront les différentes valeurs de u. Mais si l'on veut une construction, cela sera aisé, en donnant à l'équation cette forme $t = \frac{u^3}{a^2} - \frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q$; or la construction de chacun des termes $\frac{u^3}{a^2}$, $\frac{u^2}{a}$, $\frac{pu}{a}$, pour chaque valeur de u donnée en lignes, est facile et s'exécute par ce qui a été dit (245).

409. Quand il entrera plus d'une inconnue dans la question, on pourra ramener la construction à celle que nous venons de donner, en réduisant toutes les inconnues à une seule, par la méthode donnée (161 *et suiv.*).

410. La question étant indéterminée, si u ou t, dans l'équation qui en résulte, ne monte pas au-delà du 2e degré, on pourra toujours construire cette équation, à quelque degré que monte l'autre indéterminée, en donnant à celle-ci des valeurs arbitraires qui seront les abscisses; et calculant les valeurs correspondantes de la première, dont on fera les ordonnées.

(*) En observant de porter de côtés opposés de l'axe AP, celles qui se trouveraient avoir des signes contraires.

Mais si les deux indéterminées passent le second degré, alors il faudra, pour chaque valeur que l'on donnera à l'une d'elles, trouver les valeurs de l'autre, par la méthode qu'on vient de donner. Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur les constructions de cette dernière espèce, qu'on rencontre d'ailleurs assez rarement.

411. Avant de terminer cette troisième partie, nous ferons encore remarquer quelques usages de l'application des équations aux courbes. Puisque toute équation à une section conique est toujours du second degré, et que l'équation la plus générale de ce degré peut toujours être réduite à cette forme $dt^2+cut+eu^2+ft+gu+h=0$, il s'ensuit qu'on peut toujours faire passer une section conique par cinq points donnés, pourvu que ces points, pris trois à trois, ne soient pas en ligne droite, parce qu'une section conique ne peut rencontrer une ligne droite, en plus de deux points. En effet, concevons que A, B, C, D, E.... (fig. 68) soient cinq points donnés et qui aient cette condition : si l'on rapporte ces cinq points à la ligne AD qui joint deux d'entre eux, en menant les lignes BF, CH, EG, sous un angle donné, ou perpendiculaires à AD, alors les distances AF, BF; AG, GE; AH, HC; AD, qui sont censées connues, peuvent être regardées comme les abscisses et les ordonnées d'une ligne courbe. Or, je dis qu'on peut toujours supposer que cette ligne courbe a pour équation $dt^2+cut+eu^2+ft+gu+h=0$; en effet, soit $AF=n$, $BF=m$, $AG=n'$, $GE=m'$, $AH=n''$, $CH=m''$, $AD=n'''$; il est visible que, 1°. pour le point A, on aura $u=0$, et $t=0$, ce qui réduit l'équation à $h=0$. 2°. Pour le point B, on aura $u=n$ et $t=m$, ce qui change l'équation en $dm^2+cmn+en^2+fm+gn=0$, parce que $h=0$. 3°. Pour le point E, on aura $u=n'$, $t=m'$, et par conséquent, $dm'^2+cm'n'+en'^2+fm'+gn'=0$. 4°. Pour le point C, on trouvera de même $dm''^2+cm''n''+en''^2+fm''+gn''=0$. 5°. Enfin, pour le point D, où $t=0$ et $u=n'''$, on aura $en'''^2+gn'''=0$, ou $en'''+g=0$. Or, ces quatre équations renfermant toutes les quantités e, e, f, g, au premier degré; il sera facile d'en avoir les valeurs; alors, en les substituant dans l'équation $dt^2+cut+eu^2+ft+gu=0$, puisque $h=0$, on aura e, e, f, g, en quantités toutes connues, et l'équation se divisera par d. Il sera donc alors facile de construire la courbe et de déterminer si elle est ellipse, hyperbole, parabole ou cercle. Si l'on ne donnait que quatre points, alors un des coefficiens serait arbitraire, ce qui donnerait lieu d'imposer, à volonté, une condition, et deux, si l'on ne donne que trois points, et ainsi de suite.

On distingue les lignes par le degré de leur équation. Ainsi la ligne droite, dont l'équation n'est que du premier degré, est ligne du premier ordre. Les sections coniques sont les lignes du second ordre. On voit donc qu'on peut, par la même méthode, déterminer l'équation d'une ligne du troisième ordre, qu'on assujettirait à passer par autant de points moins un

que l'équation générale de cet ordre, à deux indéterminées, peut avoir de termes différens : il en est de même dans les ordres supérieurs.

412. Cette même méthode peut servir à lier, par une loi approchée et simple, plusieurs quantités connues, dont la loi serait ou trop composée, ou inconnue. Supposons, par exemple, que l'on connaisse trois quantités que je représente par les lignes CB, ED, GF (fig. 69), et que ces quantités dépendent de trois autres AB, AD, AF. Il s'agit de trouver une quantité HI, intermédiaire aux premières, ou qui en soit voisine, et qui dérive de AH de la même manière que CB, ED, etc., dérivent de AB, AD, etc. On peut satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, en prenant une équation à deux indéterminées u et t qui ait au moins autant de termes différens qu'il y a de quantités telles que CB, ED, GF. Mais entre tous ces différens moyens, celui qui donne plus de facilité pour les différens usages qu'on peut faire de cette méthode, est de regarder la ligne IH comme l'ordonnée, et la ligne AH comme l'abscisse d'une courbe qui passerait par les points donnés C, E, G, etc., qui aurait pour équation celle-ci, $t = a + bu + cu^2 + \text{etc.}$, en prenant autant de termes que l'on a de quantités ou de points C, E, G, etc.; alors supposant, comme ci-dessus, que u valant AB, t vaut CB; que u valant AD, t vaut DE; que u valant AF, t vaut GF, et ainsi de suite, on aura autant d'équations pour déterminer a, b, c, etc., qu'on a de points. Ayant déterminé les valeurs de a, b, c, etc., si on les substitue dans l'équation $t = a + bu + cu^2 + \text{etc.}$, on aura une équation dans laquelle tout sera connu, excepté u et t. Si donc on met pour u la distance connue AH, qui convient à la quantité HI que l'on cherche, alors on aura la valeur correspondante de t, c'est-à-dire HI. On voit par là la confirmation de ce que nous avons dit (281). En effet, si l'on voulait imiter le contour ABCDEF (fig. 70), on abaisserait d'un certain nombre de points de ce contour, des perpendiculaires sur une ligne déterminée XZ; puis, par la méthode qu'on vient de voir, on déterminerait l'équation d'une courbe qui passerait par tous ces points, et dans laquelle t étant au premier degré, u montât au degré marqué par le nombre de ces points moins un; alors cette équation servirait à déterminer des perpendiculaires intermédiaires qui approcheraient d'autant plus des véritables, qu'on aura pris d'abord un plus grand nombre de points A, B, C, D, etc.

Appendice.

413. Nous nous étions proposé de faire entrer dans ce volume plusieurs autres matières; mais pour ne point passer de justes bornes, nous sommes obligé de les renvoyer au suivant. Cependant, nous placerons encore ici quelques propositions dont nous aurons occasion de faire usage par la suite, et dont quelques-unes nous serviront à démontrer l'une

des règles que nous avons données (*Géom.* 361, *Quest.* VI) pour trouver les angles d'un triangle sphérique, lorsqu'on en connaît les trois côtés.

414. Quand le rayon $r = 1$, on a (*Géom.* 284, 285 et 278)

1°. $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$;

2°. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$;

3°. $\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a}$, $\quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$.

415. Cela posé, si l'on divise la valeur de $\sin(a \pm b)$ par celle de $\cos(a \pm b)$, on aura

$$\text{tang}(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b};$$

divisant haut et bas, par $\cos a \cos b$, on trouvera

$$\text{tang}(a \pm b) = \frac{\text{tang } a \pm \text{tang } b}{1 \mp \text{tang } a \text{ tang } b}.$$

Si l'on divise la valeur de $\cos(a \pm b)$ par celle de $\sin(a \pm b)$, on trouvera

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \pm \text{tang } b}{1 \mp \cot a \text{ tang } b}.$$

416. Ces valeurs de $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$, $\text{tang}(a + b)$ peuvent servir à trouver les sinus, cosinus et tangente des arcs multiples d'un arc donné, et par conséquent les équations qui serviraient à diviser un angle en plusieurs parties égales. Il n'y a qu'à supposer successivement $b = a$, $= 2a$, $= 3a$, et ainsi de suite. Par exemple, $b = a$, donne

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

et

$$\cos 2a = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

(en mettant pour $\cos^2 a$ sa valeur $1 - \sin^2 a$). En supposant $b = 2a$, on aura

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a,$$

et

$$\cos 3a = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a.$$

Or, les deux équations précédentes donnent les valeurs de $\sin 2a$ et de $\cos 2a$; si donc on les substitue dans celles-ci, on aura les valeurs de $\sin 3a$, $\cos 3a$, exprimées au moyen des sinus et cosinus de l'arc simple a, et ainsi de suite. On obtiendra de la même manière $\operatorname{tang} 2a$, $\operatorname{tang} 3a$, etc., en employant la formule qui donne $\operatorname{tang}(a+b)$ et supposant successivement $b = a$, $= 2a$, $=$ etc.

417. Si l'on ajoute la valeur de $\sin(a+b)$ à celle de $\sin(a-b)$, on aura $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$, et par conséquent

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) + \tfrac{1}{2}\sin(a-b).$$

En ajoutant pareillement la valeur de $\cos(a+b)$ à celle de $\cos(a-b)$, on trouvera

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b,$$

ou

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a+b) + \tfrac{1}{2}\cos(a-b).$$

Retranchant $\cos(a+b)$ de $\cos(a-b)$, on trouvera

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b;$$

d'où

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b).$$

418. Si l'on fait $a+b = m$ et $a-b = n$, et qu'après avoir ajouté et retranché, on divise les deux membres par 2, on aura $a = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$ et $b = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n$, d'où l'on conclura

1°. $\sin m + \sin n = 2\sin(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) \times \cos(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n)$;
2°. $\cos m + \cos n = 2\cos(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) \times \cos(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n)$;
3°. $\cos n - \cos m = 2\sin(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) \times \sin(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n)$.

Ces propositions seront très utiles; on voit avec quelle facilité elles se trouvent et se démontrent par le calcul. Nous nous

bornerons, pour le présent, à faire voir l'usage pour la démonstration de la règle donnée (*Géom.*, 361, *Quest.* VI).

419. Soit donc ABC (fig. 71) un triangle sphérique AD un arc de cercle, abaissé de l'angle A perpendiculairement sur le côté opposé BC; prenons sur ce même côté BE = BA, et ayant imaginé l'arc de grand cercle AE, par son milieu O et par le point B, imaginons aussi l'arc de grand cercle BO, qui divisera l'angle ABC en deux parties égales. Cela posé, dans le triangle EBO, on aura (*Géom.*, 349), en supposant le rayon = 1, 1 : sin BE ou sin AB :: sin OBE ou $\sin\frac{1}{2}$ABC : sin OE; donc sin OE ou $\sin\frac{1}{2}$AE = sin AB × $\sin\frac{1}{2}$ABC; or, (416) cos $2a = 1 - 2\sin^2 a$, ou, en faisant $2a = m$, cos $m = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}m$; donc $\sin^2\frac{1}{2}m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos m$, et par conséquent on peut, au lieu de $\sin^2\frac{1}{2}$AE, mettre $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos AE; donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos$AE = $\sin^2$AB × $\sin^2\frac{1}{2}$ABC; or, (*Géom.* 357) dans le triangle ABC, on a

cos BD : cos CD ou cos (BC — BD) :: cos AB : cos AC;

c'est-à-dire

cos BD : cos BC cos BD + sin BC sin BD :: cos AB : cos AC;

et par conséquent,

cos BD cos AC = cos AB cos BC cos BD + cos AB sin BC sin BD;

d'où

$$\sin BD = \frac{\cos BD \cos AC - \cos AB \cos BC \cos BD}{\cos AB \sin BC}.$$

Par le même principe, on aura dans le triangle BAE

cos BD : cos DE ou cos (AB — BD) :: cos AB : cos AE;

c'est-à-dire

cos BD : cos AB cos BD + sin AB sin BD :: cos AB : cos AE;

donc

cos BD cos AE = cos AB cos AB cos BD + cos AB sin AB sin BD;

d'où l'on tire

$$\sin BE = \frac{\cos BD \cos AE - \cos^2 AB \cos BD}{\cos AB \sin BB};$$

égalant ces deux valeurs de sin BD, on aura

$$\cos AE = \frac{\sin AB \cos AC - \cos AB \sin AB \cos BC + \cos^2 AB \sin BC}{\sin BC};$$

substituant cette valeur dans l'équation, et observant que $1 - \sin^2 AB = \cos^2 AB$, on trouvera

$$\sin BC \sin AB - \cos AC + \cos AB \cos BC = 2 \sin AB \times \sin BC \sin^2 \tfrac{1}{2} ABC;$$

or, (414) $\cos AB \cos BC + \sin BC \sin AB = \cos (BC - AB)$; donc

$$\cos (BC - AB) - \cos AC = 2 \sin AB \sin BC \sin^2 \tfrac{1}{2} ABC;$$

mais (418) $\cos (BC - AB) - \cos AC$ est la même chose que $2 \sin (\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} CB + \frac{1}{2} AB - AB) \sin (\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB - BC)$, ou, en nommant S la somme des trois côtés, la même chose que $2 \sin (\frac{1}{2} S - AB) \sin (\frac{1}{2} S - BC)$; donc

$$2 \sin (\tfrac{1}{2} S - AB) \times \sin (\tfrac{1}{2} S - BC) = 2 \sin AB \sin BC \sin^2 \tfrac{1}{2} ABC,$$

d'où, après avoir divisé par 2, on tire

$$\sin AB \times \sin BC : \sin (\tfrac{1}{2} S - AB) \times \sin (\tfrac{1}{2} S - BC) :: 1 \text{ ou } r^2 : \sin^2 \tfrac{1}{2} ABC,$$

ce qui donne, en employant les logarithmes, la règle qu'il s'agissait de démontrer.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE SECTION.

Dans laquelle on donne les Principes du Calcul des Quantités algébriques.

Des Opérations fondamentales sur les quantités considérées généralement, N°s 1... 2
De l'Addition et de la Soustraction, 3... 12
De la Multiplication, 13... 27
De la Division, 28... 38
De la manière de trouver le plus grand commun Diviseur de deux quantités littérales, 39... 40
Des Fractions littérales, 41... 52
Des Équations du premier degré à une seule Inconnue, 53... 66
Application des principes précédens à la résolution de quelques Questions simples, 67
Réflexions sur les Quantités positives et les Quantités négatives, 68... 71
Des Équations du premier degré à deux Inconnues, 72... 77
Des Équations du premier degré à trois et à un plus grand nombre d'Inconnues, 78... 84
Application des règles précédentes à la résolution de quelques Questions qui renferment plus d'une inconnue, 85
Des Cas où les Questions proposées restent indéterminées quoïqu'on ait autant d'Équations que d'Inconnues, et des cas où les Questions sont impossibles, 86... 90
Des Problèmes indéterminés, 91... 92
Des Équations du second degré à une seule Inconnue, 93... 99
Application de la règle précédente à la résolution de quelques Questions du second degré, 100...107
De l'Extraction de la racine carrée des quantités littérales, 108...116
Du Calcul des quantités affectées du signe √, 117...120
De la formation des Puissances des Quantités monomes, de l'extraction de leurs Racines, et du Calcul des Radicaux et des Exposans, 121...141
De la formation des Puissances des quantités complexes, et de l'Extraction de leurs Racines, 142...153
De l'Extraction des Racines des Quantités complexes, 154...155
De la manière d'approcher de la Racine des Puissances imparfaites des quantités littérales, 156...160
Des Équations à deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré, 161...168
Des Équations à plus de deux Inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré, 169
Des Équations à deux termes, 170...171

Des Équations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré, Nos 172
De la Composition des Équations, 173...186
Des Transformations qu'on peut faire subir aux équations, 187...191
De la résolution des Équations composées, 192...193
Application au troisième degré, 194...198
Application au quatrième degré, 199...209
Réflexions sur la méthode précédente, et sur son application aux degrés supérieurs au quatrième, 210...216
Des Diviseurs commensurables des Équations, 217...222
De l'Extraction des racines des Quantités en partie commensurable et en partie incommensurable, 223...224
De la manière d'approcher des Racines des Équations composées, 225
Réflexions sur la méthode précédente, 226
De la manière d'avoir les racines égales des Équations, 227
Recherche des Racines imaginaires des Équations, 228

SECONDE SECTION.

Dans laquelle on applique l'Algèbre à l'Arithmétique et à la Géométrie, 229
Propriétés générales des progressions arithmétiques, 230...234
De la Sommation des Puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque, 235...239
Propriétés et usages des progressions géométriques, 240...242
De la Sommation des suites récurrentes, 243
De la Construction géométrique des Quantités algébriques, 244...248
Diverses questions de Géométrie, et réflexions, tant sur la manière de les mettre en Équation, que sur les diverses solutions que donnent ces Équations, 249...276
Autres applications de l'Algèbre à divers objets, 277...280
Des Lignes courbes en général, et en particulier des Sections coniques, 281...284
De l'Ellipse, 285...316
De l'Hyperbole, 317...344
De l'Hyperbole entre ses Asymptotes, 345...354
De la Parabole, 355...367
Réflexions sur les Équations aux Sections coniques, 368...378
Moyens de ramener aux sections coniques toute Équation du second degré à deux indéterminées, lorsqu'elle exprime une chose possible, 379...391
Application de ce qui précède à la résolution de quelques Questions indéterminées, 392...396
Application des mêmes principes à quelques Questions déterminées. 397...412
Appendice, 413...419

FIN DE LA TABLE.

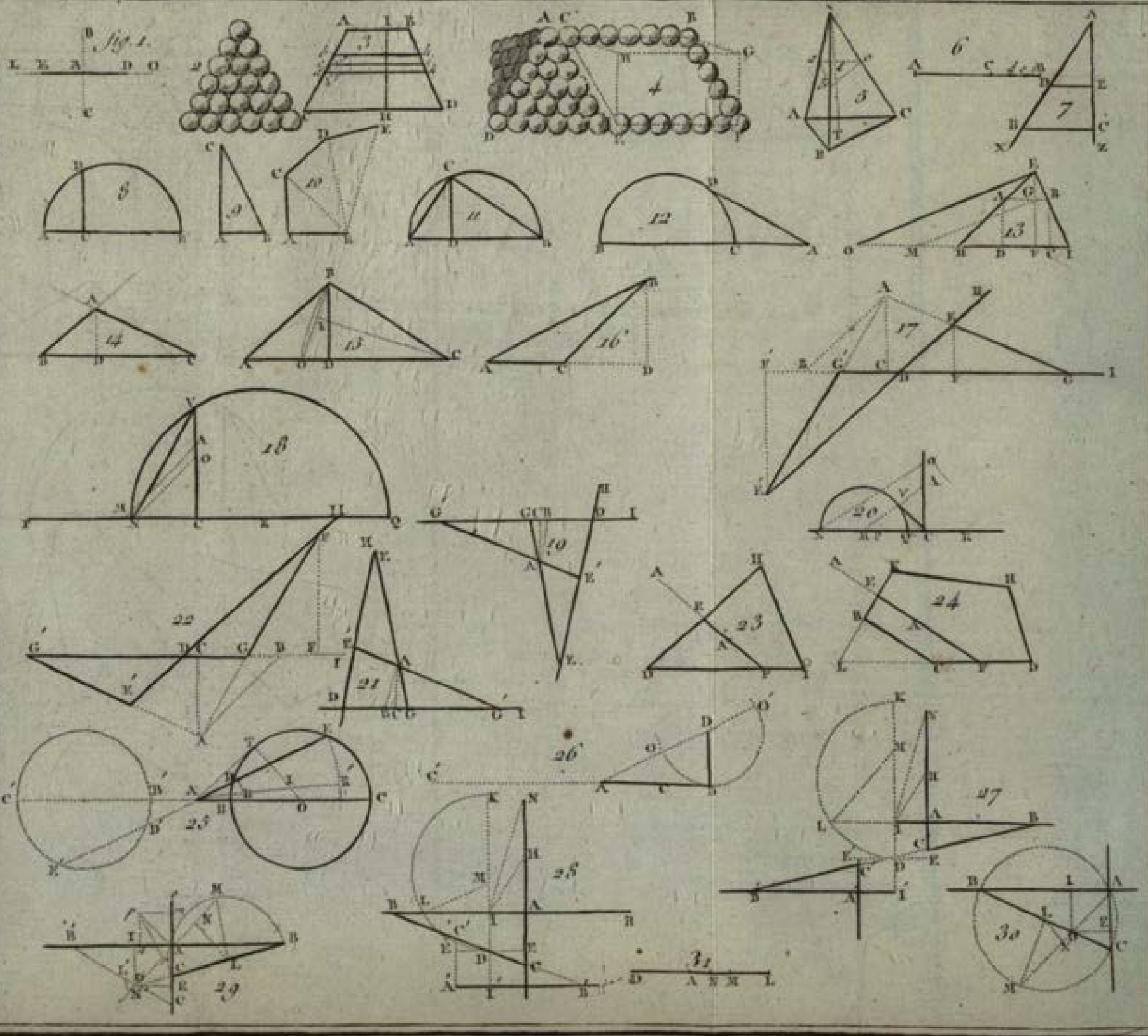
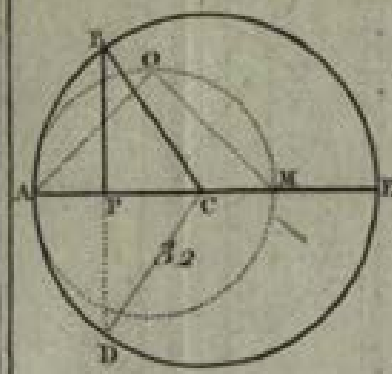
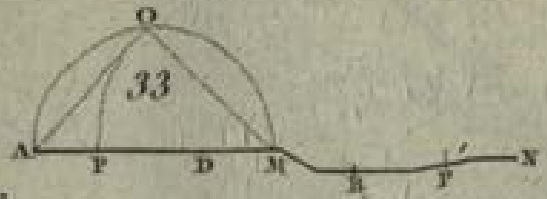
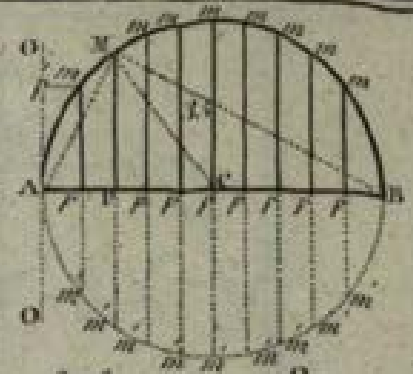
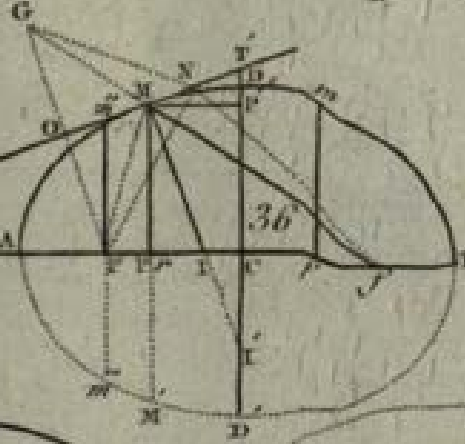


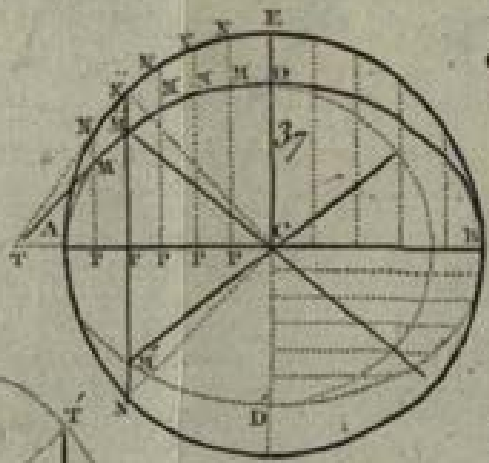
Fig. 1.
3
4
3
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31

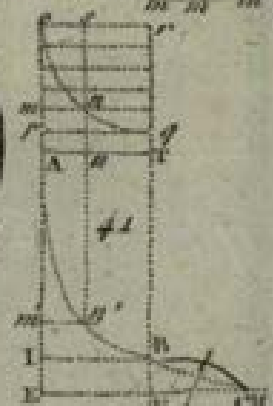


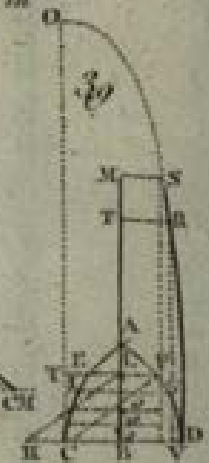


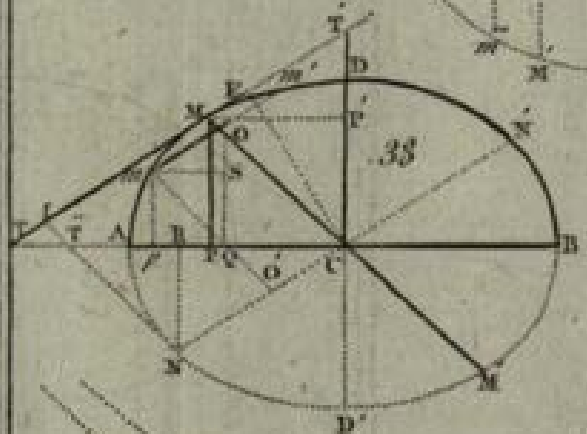


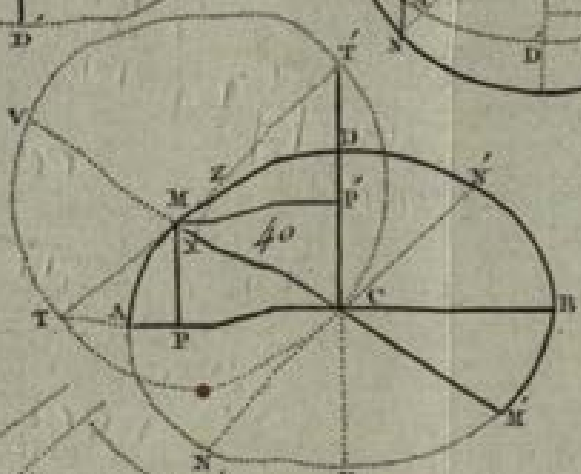


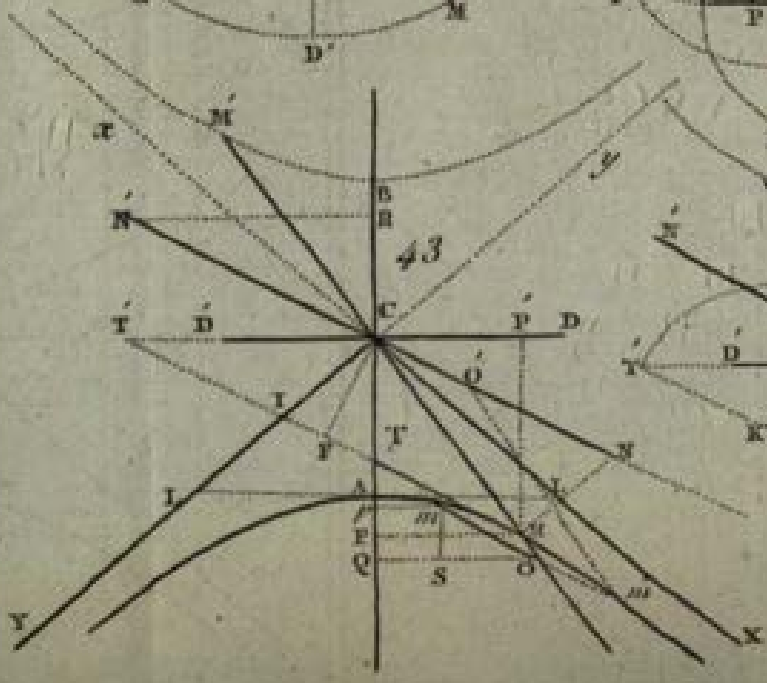


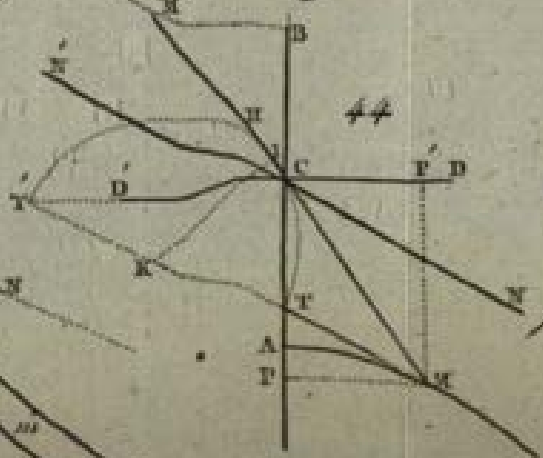


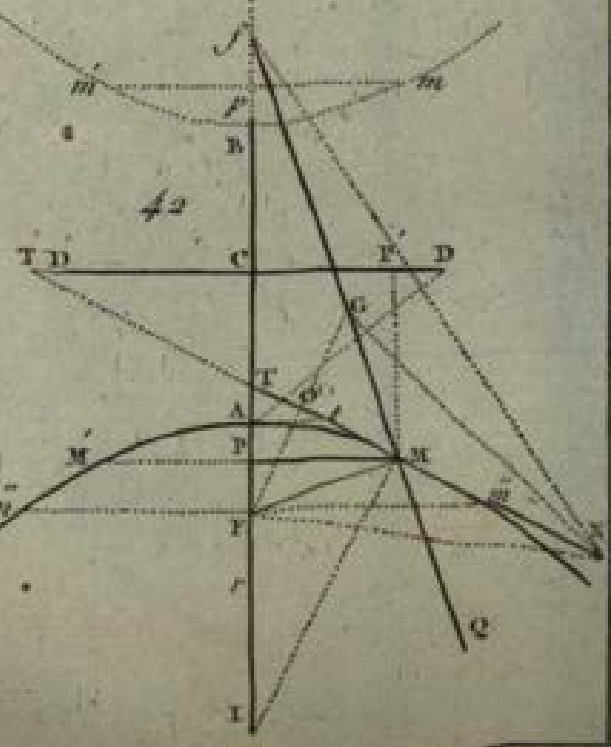


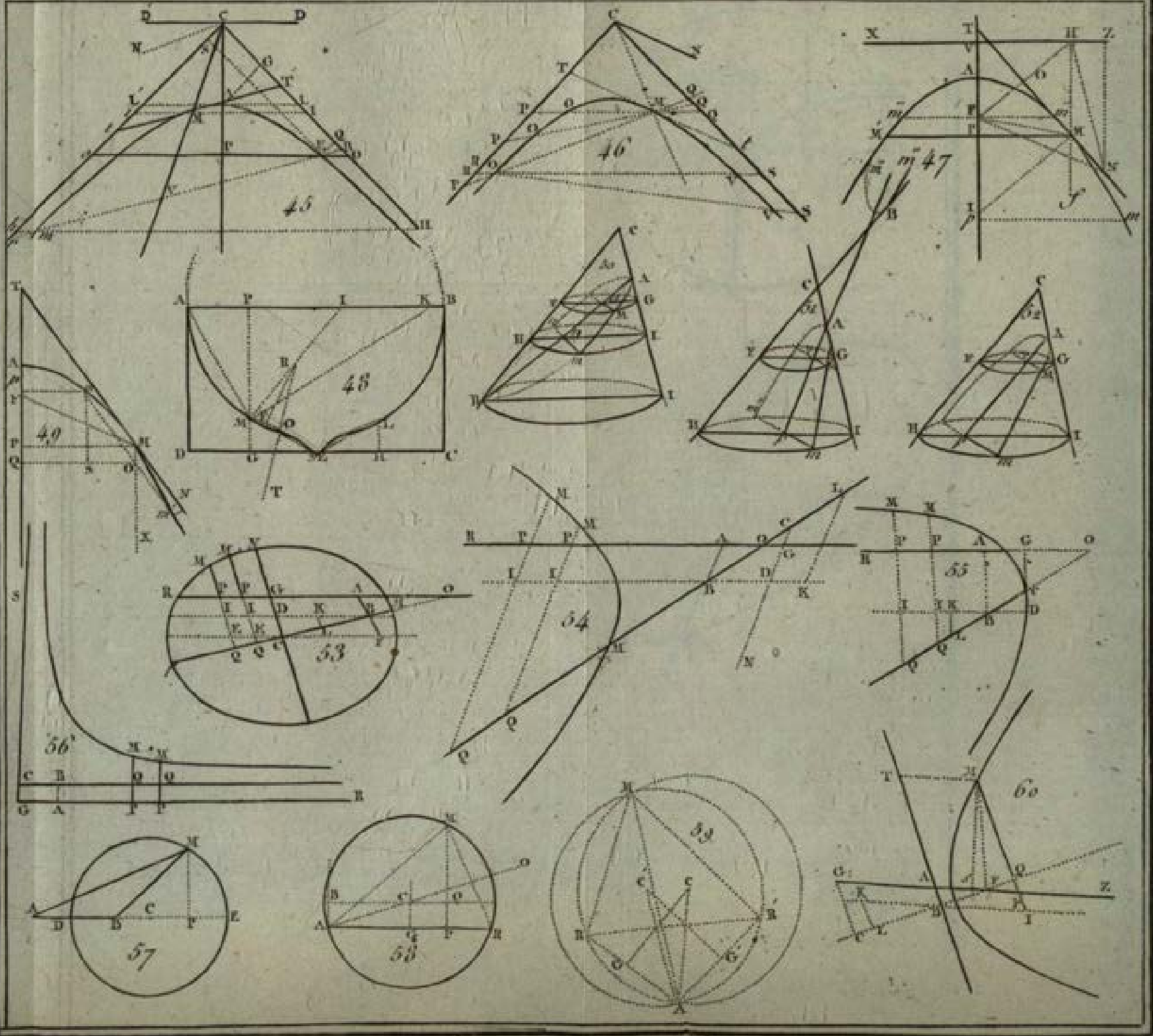


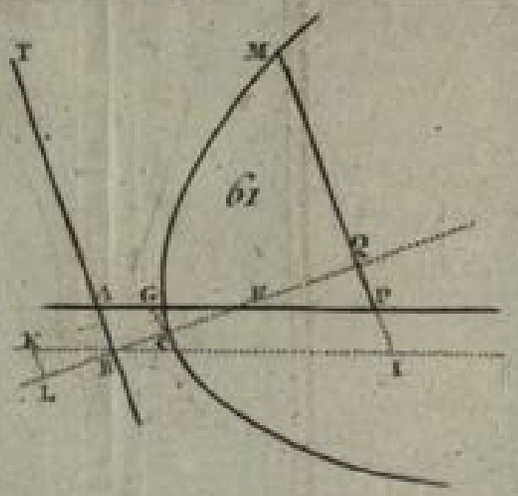


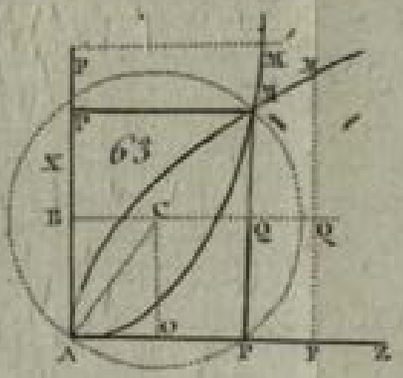


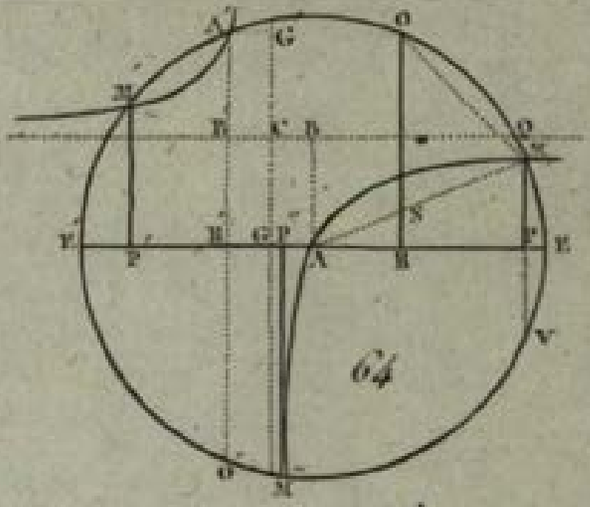


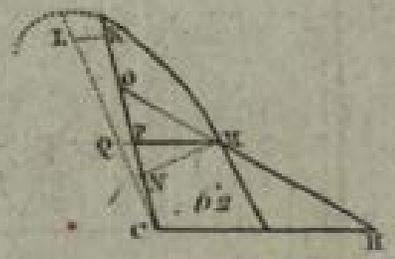


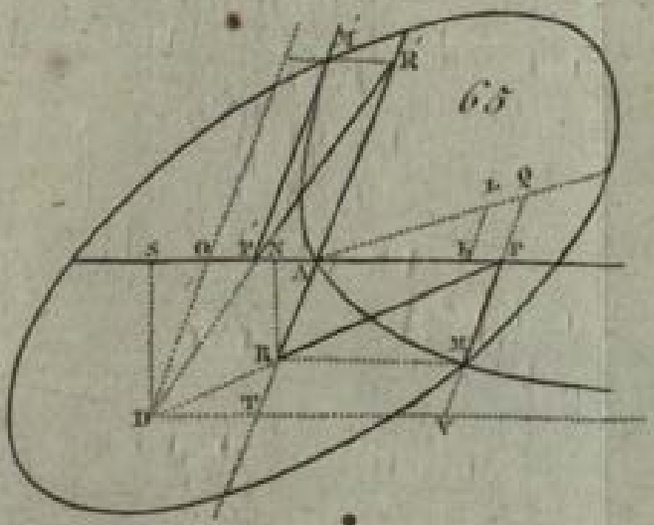

45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

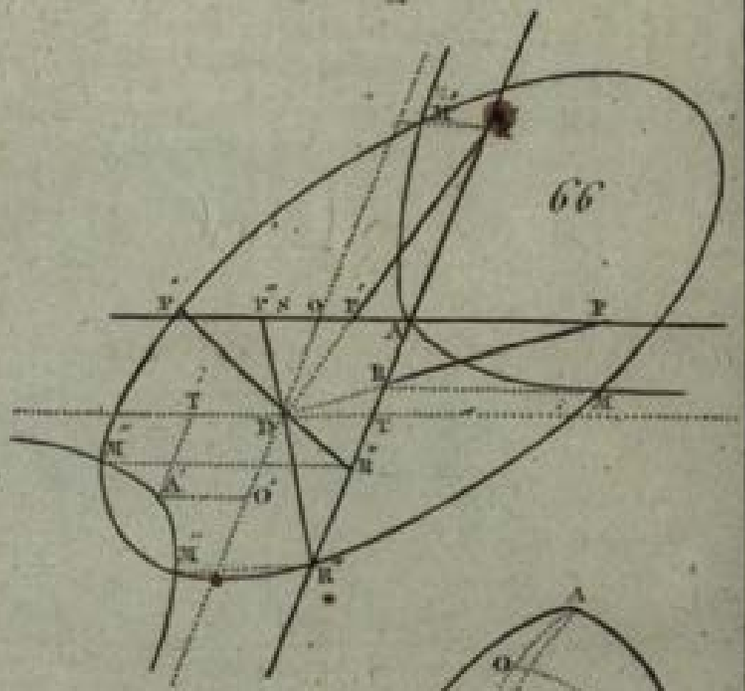

61

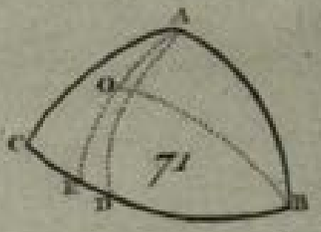

63

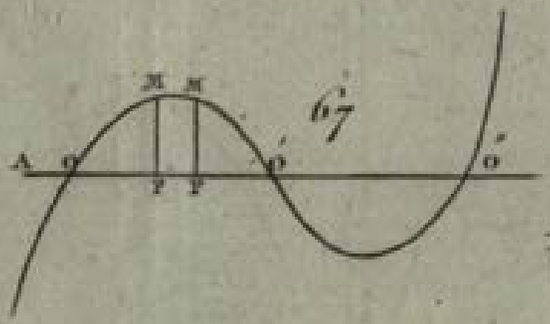

64

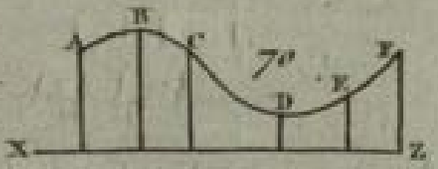

62

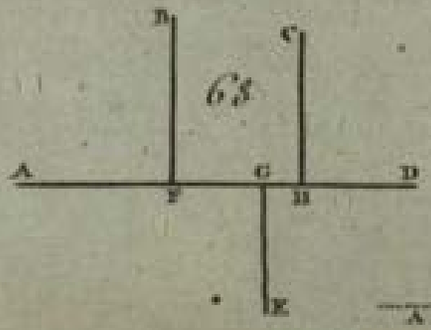

65

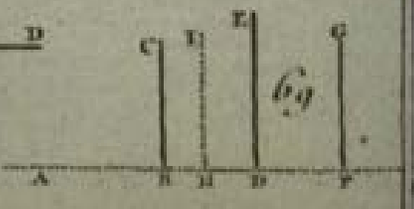

66


71


67


70


68


69

NOTES

SUR

L'ALGÈBRE.

Ouvrages du Baron Reynaud.

1° *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 5 fr.

2°. *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de la Marine, et des Forêts (17e édit., 1834) 4 fr. 50 c.

3°. *Élemens d'Algèbre*, 8e édition, 1830. 7 fr. 50 c.

4°. *Cours de Mathématiques*, à l'usage des Élèves de la Marine, par MM. *Reynaud* et *Nicollet*; 3 v. in-8°, 1829.

1er vol., Arithmétique et Algèbre, par M. *Reynaud*. 5 fr.

2e vol., Géométrie et Trigonométrie, par M. *Nicollet*. 7 fr.

3e vol., Statique (sous presse).

5°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie des Tables de logarithmes de Lalande (3e édition). 3 fr.

6°. *Table de logarithmes* (à sept décimales) pour les nombres et les lignes trigonométriques; in-12 (édition stéréotype) 1829. 3 fr. 50 c.

7°. *Traité d'Application* de l'Algèbre à la Géométrie (2e édit. sous presse).

8°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, in-4°. 12 fr.

9°. *Problèmes et développemens* sur les diverses parties des Mathématiques. 6 fr.

10°. *Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique*, suivi de notions sur la *Chimie* et sur l'*Astronomie*, à l'usage des Élèves qui se préparent aux examens pour la Marine et le Baccalauréat ès-lettres, 2e édition, revue, corrigée et considérablement augmentée; 2 vol. in-8° avec 21 pl., 1832. (Chaque volume se vend séparément 7 fr.) 12 fr. 50 c.

11°. *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, suivis de la *Théorie des plans* et des *préliminaires de la Géométrie descriptive*, comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École Polytechnique, 1833. 5 fr.

12°. Élémens de *Géométrie descriptive*, suivis de la *Perspective*, des *Ombres*, de la *Gnomonique*, etc. (sous presse).

13°. *Traité d'Arpentage* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud. 7 fr.

Notes sur Bezout.

14°. *Arithmétique de Bezout* avec les notes, 15e édit., 1832. 3 fr. 50 c.

15°. *Géométrie de Bezout* avec des notes contenant un grand nombre de problèmes, et des *Élémens de Géométrie descriptive* (7e édition). 6 fr.

16°. *Algèbre* et Application de l'Algèbre à la Géométrie, avec les notes, 7 fr.

Les Notes sur l'Arithmétique, sur la Géométrie et sur l'Algèbre, se vendent séparément.

Nota. L'*Arithmétique* (17e édition), l'*Algèbre* (8e édition), l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, comprenant la *Trigonométrie*, et les Notes sur l'*Algèbre* et sur la *Géométrie*, sont particulièrement destinées aux Élèves qui se proposent d'entrer à l'École royale Polytechnique et à l'École spéciale Militaire de Saint-Cyr. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

DE L'IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

NOTES

SUR

L'ALGÈBRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

QUI SE DESTINENT A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A LA MARINE, A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR ET A L'ÉCOLE FORESTIÈRE;

PAR LE BARON REYNAUD,

Examinateur pour l'admission à ces Écoles, Chevalier de la Légion d'Honneur et de St.-Michel, Docteur de la Faculté des Sciences, Membre de plusieurs Académies, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

SEPTIÈME ÉDITION.

PARIS,

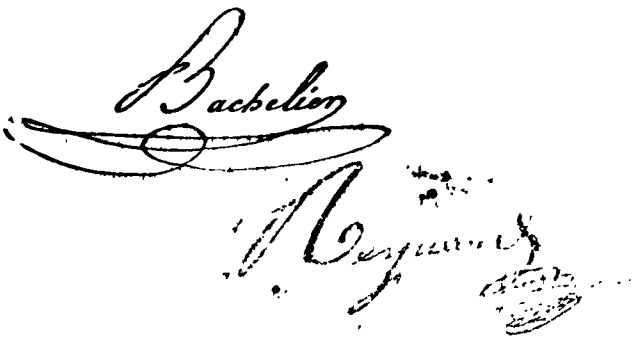
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, etc.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1834

Tout Exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et celle du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.



Se vend aussi :

A BORDEAUX,

CHEZ GASSIOT FILS AINÉ, LIBRAIRE,

FOSSÉS DE L'INTENDANCE, N° 61.

AVERTISSEMENT.

Mon but, en publiant cette nouvelle édition, a été de réunir, dans un petit volume, toute la *partie de l'Algèbre exigée pour l'admission à l'École Polytechnique.* J'ai cherché surtout à faire connaître l'esprit des méthodes, en motivant toutes les transformations qui servent à résoudre les équations. La concision d'un ouvrage en augmente sans doute la difficulté; mais les efforts qu'il faut faire développent l'intelligence en exerçant le jugement; l'enchaînement des idées est plus facile à saisir, les démonstrations se gravent mieux dans la mémoire, et l'on est mieux disposé à suivre avec succès les Cours de l'École Polytechnique. Enfin, pour faciliter aux Élèves l'intelligence des démonstrations, je leur ai donné des développemens proportionnés à leur difficulté.

Le *premier chapitre* contient les quatre opérations fondamentales de l'algèbre et les fractions. La division est présentée avec beaucoup de soin. J'ai fortement insisté sur les fractions qui deviennent indéterminées ou infinies, et sur le signe qu'on doit donner aux valeurs infinies.

Le *deuxième chapitre* traite des équations et des problèmes du premier degré. J'ai cherché à faire connaître le sens exact qu'on doit attacher aux expressions des inconnues, lorsqu'elles deviennent négatives, ou indéterminées, ou infinies. La théorie des inégalités est présentée d'une manière nouvelle.

Le *chapitre troisième* contient la théorie des *combinaisons*, la formation des *puissances*, la formule du *binome de Newton*, l'extraction des *racines*, et le calcul des *radicaux* de tous les degrés. Il est facile d'en déduire, comme cas particulier, tout ce qui est relatif aux quarrés et à la racine quarrée, ainsi qu'aux cubes et à la racine cubique; on évite, de cette manière, la répétition des parties de ces théories qui ont été traitées en Arithmétique avec les plus grands détails.

Le *quatrième chapitre* se compose des équations et des problèmes du second degré, et des *fractions continues*. On n'y trouvera pas les propriétés relatives aux trinomes du second degré, parce qu'elles ne sont qu'un cas particulier des principes qui sont exposés dans la théorie générale des équations. La démonstration du principe du n° 102 me paraît plus simple que celle qu'on en donne ordinairement.

Le *cinquième chapitre* traite des rapports, des proportions, des progressions et des logarithmes. En remarquant l'analogie qui existe entre les propriétés des logarithmes, démontrées dans l'Arithmétique, et les règles relatives aux exposans, on est conduit naturellement à considérer les logarithmes comme des exposans; et l'on en déduit avec facilité que les logarithmes qui résultent de la comparaison des termes correspondans de deux progressions, sont les mêmes que ceux que l'on obtient dans l'Algèbre, en considérant les logarithmes des quantités comme les exposans des puissances auxquelles il faut élever un nombre constant, pour obtenir ces quantités.

L'expression de la somme des termes d'une progression géométrique conduit très naturellement au quotient de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$.

Le *sixième et dernier chapitre* se compose de la *théorie générale des équations*. Cette théorie est exposée avec tous les développemens convenables à sa difficulté et à son importance. Pour ne pas interrompre l'enchaînement des idées, j'ai réuni dans des *Préliminaires*, les propriétés fondamentales qui servent à résoudre les équations numériques de tous les degrés. J'ai admis que toute équation a une racine, et que tout polynome entier n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers; ces propriétés, dont les démonstrations sont très compliquées, paraissent d'ailleurs assez évidentes; la première a été démontrée par M. *Cauchy;* la seconde a été établie rigoureusement, dans une brochure que j'ai publiée sur la théorie du plus grand commun diviseur et de l'élimination. J'ai donné les expressions générales des diverses limites entre lesquelles sont comprises toutes les racines d'une équation; mais le peu d'étendue de ces Notes ne m'a pas permis de faire connaître les limites plus approchées qu'on peut obtenir dans quelques cas particuliers. La *règle des signes de Descartes* me paraît présentée d'une manière simple et nouvelle; j'en ai déduit (n°s 142 et 143) des méthodes générales, pour déterminer combien une équation admet au moins de racines imaginaires. J'ai cherché à donner une idée nette de ce qu'il faut entendre, en Algèbre, par *plus grand commun diviseur;* cette importante théorie est présentée

avec beaucoup de détail; j'en ai déduit (n° 153) le moyen de parvenir à une équation qui détermine toutes les valeurs des inconnues, propres à satisfaire au système de deux équations contenant deux inconnues. Cette équation à une seule inconnue peut donner en outre des valeurs qui ne conviennent pas au système proposé; mais, lorsque pour calculer les racines incommensurables d'une équation numérique à une seule inconnue, on sera conduit à déterminer une quantité δ moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de l'équation proposée, le procédé du n° 153 suffira pour calculer cette quantité, à l'aide de l'équation aux différences. Je donne les propriétés principales des fonctions dérivées. Je passe à la résolution d'une équation numérique à une seule inconnue. J'ai cherché à motiver les transformations qu'on effectue pour calculer les racines réelles commensurables et incommensurables. J'indique deux méthodes pour trouver les solutions communes à deux équations contenant deux inconnues; dans la 1re méthode, on opère directement sur les équations proposées, et l'on réduit la question à traiter deux équations dont l'une ne renferme qu'une seule inconnue; cette dernière équation peut fournir des valeurs *étrangères* de l'inconnue, mais on indique le moyen de distinguer ces valeurs. *MM. Gérono* et *Vincent* ont donné une méthode très élégante, pour parvenir à l'équation finale, sans résoudre des équations (cette méthode se trouve dans l'*Algèbre* de *M. Bourdon*). Dans la 2e méthode, on obtient plus simplement les solutions com-

munes aux deux équations proposées, en décomposant chaque équation et chaque reste en facteurs; ces décompositions fournissent le moyen d'abréger la recherche du plus grand commun diviseur de polynomes contenant deux lettres. Je traite le système de trois équations à trois inconnues; et l'élimination sert à transformer des *équations irrationnelles* en des équations rationnelles; je discute les difficultés qui peuvent se présenter. En changeant la définition que l'on donnait des *équations réciproques*, j'en ai déduit le moyen de résoudre des équations d'une forme nouvelle. J'ai traité ensuite les équations binomes et trinomes. Des considérations générales sur les valeurs algébriques des radicaux terminent la partie de l'Algèbre exigée pour l'admission à l'École Polytechnique. J'ai cru rendre service aux Élèves, en ajoutant une démonstration rigoureuse du beau *théorème de M. Sturm*.

NOTA. Les numéros placés entre parenthèses indiquent des renvois aux articles auxquels il faut recourir pour comprendre les démonstrations. Par exemple, dans la ligne 3 de la page 12, le signe (n° 8) indique qu'il faut recourir au principe établi dans l'article 8 de la page 9.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

§ Ier. *Préliminaires.*

Numéros.		Pages.
1.	Définitions, notations et conventions	1...4
2.	Réduction des termes semblables	4...6

§ II. *Des quatre opérations fondamentales de l'Algèbre.*

3.	De l'*addition*	6 et 7
4.	De la *soustraction*	7 et 8
5.	Des quantités négatives	8
6.	Des valeurs absolues et relatives	8
7.	Définition de la *multiplication*	8 et 9
8.	La valeur numérique d'un produit ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications	9
9.	Multiplication des monomes	10..12
10....12.	Multiplication des polynomes	12..14
13.	Définition de la *division*	14
14.	Propriété du quotient	15
15.	Division des monomes. De l'exposant zéro et des exposans négatifs	15..17
16.	Division d'un polynome par un monome	17
17....19.	Division d'un polynome par un autre	17..21
20.	Division d'un polynome par une quantité indépendante de la lettre ordonnatrice	21
21.	*Preuves* des quatre règles	21 et 22

§ III. *Des fractions littérales.*

22.	La division conduit aux *fractions*	22
23.	Propriétés principales des fractions	22 et 23
24....27.	Calcul des fractions	23..26
28 et 29.	Des fractions qui deviennent nulles, ou infinies ou indéterminées. Considérations sur le signe de l'infini	26..29

CHAPITRE II.

Des équations et des problèmes du 1er degré.

§ Ier. *Préliminaires.*

30.	Des *équations* et des *identités*; des équations numériques et littérales; etc	30 et 31

Numéros. Pages.

31. Lorsqu'on fait les mêmes opérations sur des quantités égales, les résultats sont égaux..... 31

32. Faire disparaître les dénominateurs contenus dans une équation..... 31 et 32

33. Déterminer le *degré* d'une équation..... 32

§ II. *Des équations du premier degré.*

34. Résolution d'une équation à une seule inconnue..... 32..34

35. Règle générale..... 34

36. Une équation à deux inconnues admet une infinité de solutions. Chaque inconnue est *fonction* de l'autre inconnue. En général, toute quantité qui dépend de plusieurs autres quantités est dite *fonction* de ces quantités..... 34

37. Résolution de deux équations à deux inconnues..... 34 et 35

38. Résolution de trois équations à trois inconnues..... 35 et 36

39. Résolution de m équations contenant m inconnues..... 36

40. Examen du cas où toutes les inconnues n'entrent pas dans chaque équation..... 36

41. Discussion des cas particuliers qui peuvent se présenter lorsqu'on résout des équations numériques. Des équations *impossibles* et *indéterminées*..... 36 et 37

42....46. Résolution de m équations littérales contenant m inconnues..... 37..42

47. Règle générale pour former les expressions générales des inconnues en fonction des coefficiens..... 42 et 43

48. Lorsqu'on a n équations entre $n+m$ inconnues, on peut donner des valeurs arbitraires à m inconnues.... 43

49. Lorsqu'on a $n+m$ équations entre n inconnues, la possibilité du système de ces équations dépend de m équations de condition..... 43

50. Discussion des formules générales qui expriment les valeurs des inconnues..... 44..46

§ III. *Des inégalités.*

51 et 52. Propriétés principales des *inégalités*..... 46..50

§ IV. *Analyse indéterminée du premier degré.*

53. De ce qu'on entend par *solutions entières*..... 50

54....58. Recherche des solutions entières d'une équation du premier degré à deux inconnues. Propriétés de ces solutions..... 50..55

Numéros. Pages.

59. Solutions entières de m équations contenant $m+n$ inconnues..... 55..57

§ V. *Problèmes du premier degré.*

60. Problèmes déterminés du premier degré..... 57..59
61. Discussion des différens cas qui peuvent se présenter, lorsqu'on résout des problèmes du premier degré..... 59..64

CHAPITRE III.

Des arrangemens, des permutations et des combinaisons. De la formation des puissances et de l'extraction des racines.

§ Ier.

62 et 63. Des *arrangemens*, des *permutations* et des *combinaisons*..... 65..72

§ II. *De la formation des puissances.*

64. Définitions et notations..... 72
65. *Puissances* des monomes..... 72 et 73
66. Propriétés des puissances des quantités plus grandes et plus petites que l'unité..... 73 et 74
67 et 68. Loi de formation du produit de m binomes $x+a$, $x+b$, etc..... 74..76
69. Formule du *binome de* NEWTON..... 77
70. Propriétés de cette formule. On en déduit le moyen de former les puissances des polynomes..... 77..79

§ III. *De l'extraction des racines, et du calcul des radicaux.*

71. Réflexions préliminaires..... 79
72. La $m^{ième}$ puissance de $\sqrt[m]{a}$ est a..... 79
73. Extraction des racines des monomes..... 79..81
74. Calcul des *radicaux* en ne considérant que leurs valeurs absolues..... 81..83
75....77. Des différentes valeurs algébriques d'un radical..... 83..85
78. Règle générale pour le calcul des radicaux algébriques... 85
79 et 80. Calcul des quantités affectées d'exposans négatifs et fractionnaires..... 85..87
81 et 82. Extraction des racines des polynomes..... 87..90

CHAPITRE IV.

Des équations et des problèmes du second degré. Fractions continues.

§ Ier. *Des équations et des problèmes du second degré.*

Numéros.		Pages.
83.	Résolution de l'*équation incomplète du second degré*, $x^2 = a$	91 et 92
84...89.	Résolution et discussion de l'*équation complète du second degré*	93...98
90.	Résolution de l'équation $x^4 + px^2 + q = 0$	98
91 et 92.	Problèmes du second degré	98..100

§ II. *Fractions continues.*

93.	Notions préliminaires	101
94.	Règle générale pour former les *réduites*	101 et 102
95...99.	Propriétés des *réduites*	102..105
100.	Déterminer la valeur d'une *fraction continue* avec une approximation donnée	105 et 106
101.	Exprimer une quantité en fraction continue	106..108
102.	Les réduites successives sont les fractions qui approchent le plus de la fraction continue totale	108..110
103.	Les propriétés des fractions continues fournissent le moyen de trouver les solutions entières de l'équation indéterminée $\pm ax \pm by = c$	110

CHAPITRE V.

Proportions, progressions et logarithmes.

§ Ier. *Des rapports, des proportions et des progressions.*

104.	Des *rapports* et des *proportions*	111
105 et 106.	Des *progressions arithmétiques*	111..113
107..110.	Des *progressions géométriques*	113..117

§ II. *Des logarithmes.*

111.	Les *logarithmes* peuvent être considérés comme des exposans	117 et 118
112..117.	Propriétés générales des logarithmes dans un système quelconque	118..122
118.	Calcul d'une *Table de logarithmes* dans le système dont la *base* est 10	122
119.	Résolution des *équations exponentielles*	122 et 123
120.	Problèmes sur les *intérêts composés*	123..125

Numéros. Pages.

CHAPITRE VI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

§ Ier. *Préliminaires. Propriétés relatives aux facteurs des polynomes et aux racines des équations.*

121. Préliminaires..... 126et127
122..129. Propriétés relatives aux facteurs des polynomes et aux racines des équations..... 127..134
130. Rendre le premier terme d'un polynome plus grand que la somme de tous les autres termes..... 134et135
131..134. *Limites des racines* d'une équation..... 135..139
135..137. Du nombre des racines qui peuvent tomber entre deux nombres qui donnent des résultats de même signe ou de signes contraires..... 139..142
138. Toute équation de degré impair a nécessairement une racine réelle de signe contraire à celui du dernier terme; et toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles de signes contraires..... 142et143
139. Les *racines imaginaires* d'une équation sont toujours en nombre pair..... 143
140..143. *Règle des signes de* DESCARTES..... 143..148

§ II.

144..152. Théorie du *plus grand commun diviseur*..... 148..160
153. On en déduit le moyen de trouver une équation qui renferme toutes les valeurs d'une inconnue propres à satisfaire au système de deux équations à deux inconnues..... 160..162

§ III.

154..157. Théorie des *fonctions dérivées*..... 162..166

§ IV.

158et159. De l'*équation aux différences*..... 166..170
160. Calculer une quantité moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles d'une équation... 170et171

§ V. *Résolution d'une équation numérique à une seule inconnue.*

Des racines réelles commensurables.

161. On ne peut pas exprimer généralement les racines d'une équation en fonction des coefficiens..... 171

Numéros. Pages.

162..166. Recherche des racines réelles commensurables..... 171..176
167. Déterminer le degré de multiplicité d'une racine commensurable..... 176
168. Connaissant toutes les racines réelles commensurables d'une équation, en déduire l'équation qui ne contient plus que les racines incommensurables et imaginaires de la première équation..... 176 et 177

Des racines incommensurables inégales.

169. Méthodes pour approcher autant qu'on veut de l'une des racines comprises entre deux nombres qui ont donné des résultats de signes contraires..... 177 et 178
170 et 171. *Méthode des substitutions successives de* LAGRANGE. 178..181
172. Règle générale pour calculer toutes les racines réelles incommensurables d'une équation dont toutes les racines sont inégales. Exemple..... 181..184

Des racines égales.

173. Reconnaître si une équation a des racines égales..... 184 et 185
174. La recherche des racines égales se ramène à résoudre des équations qui n'ont que des racines inégales... 185..187
175. Règle à suivre pour calculer toutes les racines réelles d'une équation. Exemple..... 187..189
176. Résoudre le système de plusieurs équations à une seule inconnue..... 189

§ VI. *Résolution de deux équations numériques à deux inconnues. Théorie de l'Élimination. Des équations irrationnelles.*

177. Définitions et conventions..... 189 et 190
178. Résoudre deux équations à deux inconnues, lorsqu'une de ces équations ne contient que l'une des inconnues..... 190..192
179. Résoudre deux équations à deux inconnues, lorsqu'une des équations est du premier ou du second degré par rapport à l'une des inconnues..... 192..194
180. Reconnaître si des équations données admettent des valeurs nulles des inconnues..... 194 et 195
181..183. 1re Méthode pour *résoudre deux équations quelconques à deux inconnues*..... 195..204
84..187. 2e *Méthode*..... 204..212
188. Résoudre trois équations à trois inconnues..... 212 et 213
189. Des *équations irrationnelles*..... 213..215

Numéros. Pages.

190..195. § VII. Des *équations réciproques*..... 215..221

§ VIII. *Des équations binomes et trinomes.*

196..198. Des *équations binomes*..... 221..224
199. Tout radical a un nombre de valeurs marqué par son indice. Du calcul et des propriétés de ces valeurs .. 224 et 225
200. Déterminer les n valeurs de la racine $n^{ième}$ d'un polynome..... 225
201. Observations relatives au calcul des radicaux..... 225 et 226
202. Des *équations trinomes*..... 226
203. Lorsqu'un polynome entier est ordonnné suivant les puissances décroissantes de x, on peut toujours assigner à x une valeur qui rende le premier terme plus grand que la somme de tous les autres..... 226..228
204..213. § IX. *Théorème de M.* Sturm, et *applications*... 228..244

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Pages.	Lignes.	
25,	4,	au lieu de $\frac{a}{b}$, *lisez* $\frac{a}{b}$
37,	8 en remontant,	au lieu de, x, y, z, *lisez* x et y
46,	4,	*lisez* $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{-10}{0}=-\infty$, $z=\frac{10}{0}=+\infty$
64,	15,	au lieu de $\frac{7}{5}$, *lisez* $\frac{71}{5}$
76,	4,	au lieu de p^m, *lisez* p_m
	7,	au lieu de p^n, *lisez* p_n
77,	3,	au lieu de p^m, *lisez* p_m
	6 en remontant,	*placez plusieurs points entre* $(m-3)$ *et* $(m-n+2)$
79,		à du n° 73, au lieu de n° 64, *lisez* n° 65
83,	5,	au lieu de $\sqrt[p]{a^n}$, *lisez* $\sqrt[np]{a^n}$
	11,	au lieu de $\sqrt{a^n}$, *lisez* $\sqrt[m]{a^n}$
89,	2,	au lieu de ce développement, *lisez* $(a+C)^n$
97,	11,	au lieu de x, *lisez* x''
99,	dernière,	au lieu de $p^2+\sqrt{p^2-q}$, *lisez* $p+\sqrt{p^2-q}$
105,	6,	au lieu de $a'C'$, *lisez* aC'
174,	1,	au lieu de *essay*, *ezpris*, *lisez essayez*, *pris*
212,	1 en remontant,	*lisez* $(y-6)x$
220,	1 en remontant,	*lisez* $x^2-2x+1=0$

NOTES

SUR L'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

Préliminaires. Addition, Soustraction, Multiplication, Division et Fractions.

§ Ier. *Préliminaires.*

1. Dans les questions qui ont été résolues en Arithmétique, les relations indiquées par l'énoncé du problème, entre les quantités connues et inconnues, étaient assez simples pour qu'on pût en déduire les valeurs des inconnues à l'aide de quelques raisonnemens et de quelques opérations sur des nombres connus. Mais, quand ces relations sont plus compliquées, les raisonnemens à faire pour parvenir aux valeurs des quantités inconnues deviennent souvent si difficiles, que les procédés arithmétiques ne sont plus suffisans; on a recours alors à une méthode nouvelle qui a donné naissance à l'ALGÈBRE.

On représente ordinairement les quantités inconnues par les dernières lettres de l'alphabet, et l'on indique les opérations à l'aide de certains *signes;* cela fournit le moyen d'écrire d'une

manière abrégée les relations primitives établies par l'énoncé de la question entre les quantités connues que l'on nomme les *données*, et les quantités inconnues qu'il s'agit de déterminer, que l'on nomme les *inconnues*. On en déduit ensuite les valeurs des *inconnues*, à l'aide d'un petit nombre de règles fixes.

On fait usage, en Algèbre, des *signes*

$$+ \qquad - \qquad \times \qquad =$$

qui signifient respectivement

plus, *moins*, *multiplié par*, *égale*.

Pour indiquer que deux quantités sont inégales, on place entre elles l'un des signes $>$ ou $<$ qui signifie *plus grand* ou *plus petit*. Ainsi, $5 > 3$ est une *inégalité* qui exprime que 5 est *plus grand* que 3.

Pour indiquer la *somme* de plusieurs quantités égales entre elles, on écrit une seule de ces quantités, et l'on met à sa gauche le nombre qui exprime combien de fois elle est répétée; ce nombre s'appelle *coefficient*. Ainsi, $3b$ représente la somme de 3 quantités égales à b, et 3 est le *coefficient* de b.

Pour indiquer le *produit* de plusieurs quantités représentées par des lettres, on écrit ces lettres les unes à la suite des autres. Ainsi, $abcd$ désigne le produit des facteurs a, b, c, d.

Pour indiquer le *quotient* de a par b, on écrit $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.

Le produit de m facteurs égaux à une quantité quelconque b est la $m^{ième}$ *puissance* de b; on l'indique de cette manière b^m; et m est l'*exposant* de b.

Ainsi, b^3 représente le produit de trois quantités égales à b, et 3 est l'*exposant* de b.

Toute quantité qui n'est affectée d'aucun coefficient doit être regardée, comme ayant pour coefficient l'unité; et il en est de même de l'exposant. De sorte que b revient à $1b^1$.

La quantité qui, prise m fois comme facteur, donne un produit égal à a, est ce qu'on nomme la racine $m^{ième}$ de a.

Pour indiquer cette *racine*, on écrit $\sqrt{a}$; le signe $\sqrt{\ }$ est ce qu'on nomme un *radical*, et m s'appelle l'*indice* du radical.

Chacune des quantités, $3b$, $2b^5$, $4c$, est un *monome*; la réunion de plusieurs monomes séparés par les signes $+$ et $-$ est un *polynome*, et ces monomes sont les *termes* du polynome.

Selon qu'on veut exprimer qu'une quantité est composée de deux monomes, de trois monomes, etc., on dit que cette quantité est un *binome*, un *trinome*, etc.

Un *terme* d'un polynome est dit *positif* ou *négatif*, suivant qu'il est précédé du signe $+$ ou du signe $-$.

Les monomes qui ne sont précédés d'aucun des signes $+$ et $-$ sont censés affectés du signe $+$, et sont par conséquent *positifs*.

Les dénominations de *quantité littérale*, *quantité algébrique*, *expression littérale*, *expression algébrique*, sont employées indifféremment pour désigner un assemblage quelconque de quantités représentées par des lettres, et unies entre elles par les signes des différentes opérations.

Une quantité littérale est dite *rationnelle* lorsqu'elle ne contient aucun radical. On dit qu'une quantité est *entière* lorsqu'elle est rationnelle et qu'elle ne contient aucun dénominateur. Une quantité est dite *entière par rapport à une lettre*, lorsque cette lettre n'entrant sous aucun radical ni dans aucun dénominateur, tous les exposans de cette lettre sont des nombres entiers positifs.

Le nombre des facteurs algébriques qui entrent dans un produit mesure le *degré* du produit; les coefficiens numériques ne comptent pas dans l'estimation de ce degré. Ainsi, les monomes, $abcde$, $7abcde$, $4a^2bcd$, sont du *cinquième degré*.

Le degré d'un polynome entier est exprimé par la plus forte somme des exposans des lettres contenues dans ses différens termes. Ainsi, $a^2b^3 - 7ab^2 + 5$ est un trinome du 5e degré. Ce trinome est du 2e degré par rapport à a, et du 3e degré par rapport à b.

Quand tous les termes d'un polynome sont du même degré,

on dit que ce polynome est *homogène;* ainsi, $a^4+5a^2b^2+abcd$ est un *trinome* homogène du 4e degré.

Quand les termes d'un polynome sont disposés suivant l'ordre indiqué par les grandeurs des exposans d'une même lettre, on dit que ce polynome est *ordonné* par rapport à cette lettre.

Ainsi, le trinome $ba^5-5b^2a^4+2b^3a^3$ est *ordonné* suivant les *puissances décroissantes* de a, et suivant les *puissances croissantes* de b.

Des termes sont dits *semblables*, lorsqu'ils sont les mêmes, abstraction faite des signes $+$, $-$, et des coefficiens numériques.

Ainsi, $+6a^2b^3$ et $-5a^2b^3$ sont des *termes semblables*.

La valeur d'un polynome reste la même dans quelque ordre qu'on écrive ses termes; car les valeurs des termes sont indépendantes de leurs positions relatives.

Pour indiquer une opération à effectuer sur un polynome, on place ce polynome entre *parenthèses*, et l'on met hors de la parenthèse le signe indicateur de cette opération.

Ainsi, pour indiquer le produit de $a-b$ par $c-d$, on écrit $(a-b)\times(c-d)$, ou simplement $(a-b)\,(c-d)$.

Chacune des expressions

$$\frac{(a-b)}{(c-d)},\ \left(\frac{a-b}{c-d}\right),\ \frac{a-b}{c-d},\ (a-b):(c-d),$$

désigne le quotient de la division de $a-b$ par $c-d$.

L'expression $(a+b+c)^3$ représente la 3e puissance ou le cube de $a+b+c$, et pour indiquer la 5e puissance de $(a-b)^2-c$, on écrit $[(a-b)^2-c]^5$, ou $\left\{(a-b)^2-c\right\}^5$.

2. *Quand un polynome contient des termes semblables, on peut réunir tous ces termes en un seul.*

Par exemple, soit le polynome $b+8d-3d+7d-2d$; sa valeur restant la même dans quelque ordre qu'on écrive ses termes, on peut le mettre sous la forme $b+8d+7d-3d-2d$. Or, ajouter 8 fois d plus 7 fois d, pour retrancher ensuite 3 fois d

plus 2 fois d, revient à ajouter d un nombre de fois marqué par $8+7$ ou par 15, et à retrancher d un nombre de fois marqué par $3+2$ ou par 5; le polynome proposé se réduit donc à $b+15d-5d$, ou enfin à $b+10d$, car ajouter 15 fois d pour retrancher ensuite 5 fois d, revient à ajouter d un nombre de fois marqué par $15-5$ ou par 10.

Pour obtenir le coefficient $+10$ de d, il suffit de calculer la somme 15 des coefficiens 8, 7, des termes qui ont le signe $+$, et la somme 5 des coefficiens 3, 2, des termes qui ont le signe $-$; de retrancher ensuite 5 de 15, et d'affecter le reste 10 du signe $+$ placé devant les termes dont les coefficiens ont fourni la plus grande somme.

En général : *Pour obtenir le coefficient numérique du monome résultant de la réduction de plusieurs termes semblables, on calcule séparément la somme des coefficiens des termes précédés du signe $+$ et celle des coefficiens des termes précédés du signe $-$; on retranche la plus petite somme de la plus grande; le reste affecté du signe des termes dont les coefficiens ont fourni la plus grande somme, est le coefficient demandé.*

On trouve de cette manière que le polynome

$$5a+6b^2c-2a-8b^2c \quad \text{se réduit à} \quad 3a-2b^2c.$$

Un polynome, ainsi réduit à sa plus simple expression, offre le tableau des calculs arithmétiques à effectuer sur les valeurs numériques des lettres qu'il renferme, pour parvenir la plus brièvement possible à sa valeur numérique.

Remarque. Si l'on suppose, dans ce qui précède, que les différentes lettres qui entrent dans les termes semblables deviennent égales à l'unité, ces termes se réduiront à leurs coefficiens numériques, et on déduira de la règle précédente que *pour simplifier une expression composée de nombres liés entre eux par les signes $+$ et $-$, il suffit de calculer séparément la somme des nombres précédés du signe $+$ et la somme des nombres précédés du signe $-$; puis retrancher la plus petite somme de la plus grande, et enfin affecter le reste du signe des nombres qui ont fourni la plus grande somme.*

Ainsi, $b+8-3+7-2$ et $b-8+3-7+2$,
se réduisent respectivement à $b+10$ et à $b-10$.
Il en résulte que $8-3+7-2$ se réduit à $+10$,
et que $-8+3-7+2$ se réduit à -10.

§ II. *Des quatre opérations fondamentales de l'Algèbre.*

DE L'ADDITION.

3. *L'*ADDITION *algébrique a pour but, étant donnés des polynomes ou des monomes, de trouver un polynome unique nommé* SOMME, *présentant l'ensemble des additions et des soustractions partielles indiquées par les signes + et — qui affectent les termes des quantités proposées.*

On déduit de cette définition que, *pour additionner plusieurs quantités, il suffit de placer les termes de ces quantités les uns à la suite des autres avec leurs signes.*

Par exemple, pour ajouter $b-c$ à a, il suffit d'écrire $a+b-c$; car la somme des quantités a et b étant $a+b$, si b diminue de c, la somme $a+b$ doit diminuer de c; la somme des quantités, a, $b-c$, est donc $a+b-c$.

On démontrera de même que la somme des polynomes

$$3a-b, c-2d, e+2f-4g, \text{ est } 3a-b+c-2d+e+2f-4g,$$

car la somme des quantités positives $3a$, c, $e+2f$, étant indiquée par $3a+c+e+2f$, si ces trois quantités diminuent respectivement de b, de $2d$ et de $4g$, leur somme $3a+c+e+2f$, diminuera nécessairement de $b+2d+4g$; elle deviendra donc

$$3a+c+e+2f-b-2d-4g;$$

et comme on peut transposer les termes de ce dernier polynome, sans changer sa valeur, on voit que la somme cherchée est $3a-b+c-2d+e+2f-4g$.

REMARQUE. Lorsque les quantités qu'il s'agit d'additionner renferment des termes *semblables*, on facilite les *réductions* dont la somme est susceptible, en écrivant les termes sembla-

bles les uns sous les autres avec leurs signes, et en réduisant chaque groupe de termes semblables par la méthode du n° 2.

Par exemple, pour additionner les trois polynomes

$$5a - 7ab^2 - 8a^3 + 9, \quad -4 + 9a^3 + 10ab^2, \quad -7a - 18ab^2,$$

on exécute le calcul de la manière suivante,

$$\begin{array}{r} 5a - 7ab^2 - 8a^3 + 9 \\ + 10ab^2 + 9a^3 - 4 \\ -7a - 18ab^2 \\ \hline \text{Somme, } -2a - 15ab^2 + a^3 + 5. \end{array}$$

Dans l'expression réduite de la *somme* demandée, le coefficient de a est $5 - 7$ ou -2, le coefficient de ab^2 est $-7 + 10 - 18$ ou -15, le coefficient de a^3 est $-8 + 9$ ou 1, et la partie numérique est $9 - 4$ ou $+5$.

DE LA SOUSTRACTION.

4. *La* SOUSTRACTION *algébrique a pour but, connaissant la somme de deux quantités et l'une d'elles, de trouver l'autre quantité nommée* RESTE. *Ce reste s'obtient en mettant à la suite de la quantité dont on veut soustraire, tous les termes de la quantité à soustraire pris avec des signes contraires à ceux qu'ils ont.*

Par exemple, pour soustraire $c - d$ de $a - b$, il suffit d'écrire $a - b - c + d$. En effet, si l'on ôtait c de $a - b$, le reste serait $a - b - c$; mais on ne devait soustraire que $b - d$; on a donc ôté d de trop; le reste $a - b - c$ est donc trop faible de d; le reste cherché est donc $a - b - c + d$.

Pour *faire dépendre la soustraction de l'addition*, et faciliter les réductions des termes semblables, on pose sous la quantité dont on soustrait, tous les termes de la quantité à soustraire pris avec des signes contraires à ceux qu'ils ont, en ayant soin d'écrire les termes semblables les uns sous les autres; la somme de ces deux polynomes, réduite à sa plus simple expression, exprime le reste demandé.

Ainsi, pour ôter $2a + 3b^2c - 7$ de $8a - 5b^2c - 4$, on exé-

cute le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{rl} & 8a - 5b^2c - 4 \\ - & 2a - 3b^2c + 7 \\ \hline \textit{Reste} & 6a - 8b^2c + 3. \end{array}$$

L'addition des polynomes $8a - 5b^2c - 4$, $- 2a - 3b^2c + 7$, a fourni le reste demandé $6a - 8b^2c + 3$.

5. Quand la quantité à soustraire est plus grande que celle dont on doit la soustraire, on est conduit à un reste *négatif*. Ainsi, lorsqu'on retranche $a + b$ de a, le reste est $a - a - b$, ou $0 - b$, ou $- b$.

Toute quantité négative — b peut donc être considérée comme indiquant le reste d'une soustraction qui n'a pu s'effectuer qu'en partie, et dans laquelle la quantité à soustraire surpassait de b, la quantité dont on voulait la soustraire.

6. On peut comparer plusieurs quantités, en faisant abstraction des signes + et —, ou en ayant égard à ces signes ; dans le premier cas, on compare les *grandeurs absolues* des quantités, et dans le second leurs *grandeurs relatives*.

Les valeurs relatives des quantités négatives sont d'autant plus petites, que les valeurs absolues de ces quantités sont plus grandes; car, si l'on retranche de $- a$, la quantité positive b, le reste $- a - b$ ou $- (a + b)$ sera nécessairement moindre que $- a$, quel que soit a.

Remarque. En supposant $a = 0$, on voit que $- b$ est moindre que zéro. De sorte que *la valeur relative d'une quantité négative est plus petite que zéro, quoiqu'il n'existe aucune quantité dont la valeur absolue soit moindre que zéro.*

Lorsqu'on dit qu'une quantité est *moindre que zéro*, il faut toujours entendre qu'elle est négative, et que l'on considère sa valeur relative.

DE LA MULTIPLICATION.

7. *La* multiplication *algébrique a pour but de déterminer une quantité nommée* produit *qui soit composée avec une quan-*

tité nommée MULTIPLICANDE, *de la même manière qu'une quantité nommée* MULTIPLICATEUR *est composée avec l'unité.*

8. *La valeur numérique du produit de plusieurs facteurs positifs ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.* Ce principe ayant été démontré dans l'arithmétique, pour des facteurs commensurables, il suffit de prouver qu'il convient à des facteurs incommensurables quelconques, $a, b, c, d, e\ldots$

Tout se réduit à faire voir qu'on peut changer l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques, tels que c et d par exemple. Or, on peut toujours concevoir des quantités commensurables variables, $a', b', c', d', e'\ldots$, respectivement moindres que les constantes $a, b, c, d, e, \ldots$, et susceptibles d'en approcher *indéfiniment* (*); de telle sorte que les différences, $a-a', b-b', c-c', d-d', e-e', \ldots$, deviennent moindres que toute quantité donnée. Soient

$$A=abcde\ldots,\ B=abdce\ldots,\ A'=a'b'c'd'e'\ldots,\ B'=a'b'd'c'e'\ldots;$$

les produits A', B', seront constamment égaux. Les facteurs de A' et B' étant respectivement moindres que ceux de A et B, les produits, A', B', seront respectivement moindres que A et B, et les différences A—A', B—B', seront susceptibles de devenir moindres que toute quantité donnée. Cela posé, si l'on avait $A > B$, la différence A—B serait finie, positive, et constante; le produit A' pouvant approcher indéfiniment de A, la différence variable A—A' finirait par devenir moindre que la différence constante et finie A—B; de sorte que A' finirait par dépasser B. Mais $A'=B'$; B' deviendrait donc plus grand que B; ce qui est impossible; A ne saurait donc surpasser B. On prouverait d'une manière semblable que B ne peut surpasser A. Les produits A, B, sont donc égaux.

(*) Toutes les fois qu'on dira qu'une quantité variable approche *indéfiniment* d'une quantité constante, on entendra que la différence entre ces deux quantités est susceptible de devenir moindre que toute grandeur donnée.

9. La *multiplication des monomes* repose sur les principes suivans :

1°. *Pour obtenir la partie littérale du produit de plusieurs monomes algébriques, on écrit les différentes lettres des facteurs les unes à la suite des autres* (page 2). Ce genre de notation constitue ce qu'on appelle la *règle des lettres.*

2°. *Le produit de plusieurs* PUISSANCES *d'une même quantité a pour* EXPOSANT *la somme des exposans de cette quantité dans les facteurs.* Ce principe est ce qu'on nomme la *règle des exposans.*

Ainsi, $b^2 \times b^3 = bb \times bbb = bbbbb = b^5 = b^{2+3}$.

Il résulte de ce principe que *quand les facteurs d'un produit renferment plusieurs puissances d'une même quantité, il suffit d'écrire une seule fois cette quantité, et de lui donner pour exposant la somme des nombres qui marquent combien de fois elle est facteur.*

Ainsi, $a^3b^2 \times a^2b^4 = a^3b^2a^2b^4 = a^3a^2b^2b^4 = a^{3+2}b^{2+4} = a^5b^6$.

3°. *Le coefficient du produit de plusieurs monomes est égal au produit des coefficiens des facteurs.* Ce principe porte le nom de *règle des coefficiens.*

Par exemple, le produit de $3a$ par $2b$ est $6ab$; car le produit de $3a$ par b étant $3ab$, si le multiplicateur devient 2 fois plus grand, le produit deviendra 2 fois plus grand ; le produit de $3a$ par $2b$ est donc 2 fois $3ab$ ou $6ab$.

4°. *Le produit de deux monomes de même signe a le signe +, et le produit de deux monomes affectés de signes différens a le signe —.* Ce principe se nomme la *règle des signes.*

Le signe d'un produit ne pouvant dépendre que des signes des facteurs, quelle que soit d'ailleurs la nature de ces facteurs, il suffit de démontrer le principe énoncé pour le cas où le multiplicateur est un nombre entier positif ou négatif. Dans cette hypothèse :

Quand le multiplicateur a le signe +, le produit a le signe

du multiplicande ; car le multiplicateur positif étant composé de l'addition de plusieurs unités, il résulte de la définition de la multiplication que le produit doit être composé de l'addition de plusieurs quantités égales au multiplicande, et l'on a vu (n° 3) que la somme de plusieurs quantités de même signe est affectée du signe de ces quantités.

Ainsi, le produit de $+a$ par $+3$ est $+a$ ajouté 3 fois, ou $+a+a+a$ ou $+3a$, et le produit de $-a$ par $+3$ est $-a$ ajouté 3 fois, ou $-a-a-a$ ou $-3a$.

Quand le multiplicateur a le signe —, le produit a un signe contraire à celui du multiplicande ; car le multiplicateur, que l'on suppose négatif et entier, étant composé de la soustraction de plusieurs unités, on formera le produit en retranchant plusieurs fois le multiplicande ; ce qui revient à faire la somme de plusieurs quantités égales au multiplicande et affectées d'un signe contraire à celui du multiplicande (n° 4) ; cette somme, qui exprime le produit demandé, sera donc affectée d'un signe contraire à celui du multiplicande.

Ainsi, on obtiendra le produit de $+a$ par -3, en retranchant 3 fois $+a$, ce qui donne $-a-a-a$ ou $-3a$; et on formera le produit de $-a$ par -3 en retranchant 3 fois $-a$, ce qui donne $+a+a+a$ ou $+3a$.

On en déduit la règle énoncée.

5°. *Le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs est positif, le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs est négatif ; lorsqu'on change les signes d'un nombre pair de facteurs, le produit ne change pas de signe ; et quand on change les signes d'un nombre impair de facteurs, le produit change de signe.* Ces propriétés se déduisent de (4°).

6°. *Le produit de plusieurs facteurs, positifs ou négatifs, reste le même dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications ;* car on a vu (n° 8) que la valeur numérique du produit reste la même quand on change l'ordre des facteurs, et l'on déduit de (5°) que le signe du produit ne dépend nullement de l'ordre dans lequel on effectue les multiplications.

7°. *Quand l'un des facteurs d'un produit se réduit à zéro, le produit devient nul;* car on peut prendre pour multiplicande le facteur qui doit se réduire à zéro (n° 8), et le multiplicande zéro, répété plusieurs fois, donne un produit qui est nécessairement égal à zéro.

10. *Pour former le produit de deux polynomes, il suffit de multiplier successivement chaque terme du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur, en donnant le signe + au produit de deux termes de même signe, et le signe — au produit de deux termes de signes différens.*

En effet, soit proposé de multiplier $a-b$ par $c-d$.

Le produit de a par c étant ac, si le multiplicande diminue de b, le produit diminuera de c fois b ou de bc; le produit de $a-b$ par c est donc $ac-bc$. Par une raison semblable, le produit de $a-b$ par d est $ad-bd$.

Or, le produit de $a-b$ par c étant $ac-bc$, si le multiplicateur c diminue de d, le produit diminuera de d fois le multiplicande $a-b$, ou de $ad-bd$. Le produit de $a-b$ par $c-d$ s'obtiendra donc en retranchant $ad-bd$ de $ac-bc$, ce qui donne $ac-bc-ad+bd$, (n° 4).

La comparaison du produit $ac-bc-ad+bd$, avec ses facteurs, $a-b$, $c-d$, démontre l'exactitude de la règle énoncée.

Ire Remarque. Pour mettre plus d'ordre dans la formation du produit de deux polynomes, et pour faciliter les réductions, on *ordonne* les facteurs par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, et l'on dispose les produits partiels de manière que les termes semblables se trouvent les uns sous les autres.

Exemple. *Soit proposé de multiplier*

$$-b^3-a^2b+a^3+ab^2 \quad par \quad -4b^2+3a^2-3ab.$$

Si l'on ordonne ces facteurs par rapport aux puissances décroissantes de a, on sera conduit au calcul suivant :

Multiplicande $a^3 - ba^2 + b^2a - b^3$
Multiplicateur $3a^2 - 3ba - 4b^2$

Produits partiels.	$3a^5 - 3ba^4 + 3b^2a^3 - 3b^3a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$	1er *produit.*
	$-3ba^4 + 3b^2a^3 - 3b^3a^2 + 3b^4a \ldots\ldots\ldots$	2e *produit.*
	$-4b^2a^3 + 4b^3a^2 - 4b^4a + 4b^5 \ldots\ldots$	3e *produit.*
Produit total	$3a^5 - 6ba^4 + 2b^2a^3 - 2b^3a^2 - b^4a + 4b^5.$	

La multiplication du multiplicande par le 1er terme $3a^2$ du multiplicateur a donné le 1er produit partiel; on a obtenu le 2e produit partiel, en multipliant le multiplicande par le 2e terme $-3ba$ du multiplicateur; et l'on a formé le 3e produit partiel, en multipliant le multiplicande par le 3e terme $-4b^2$ du multiplicateur. On a placé les termes semblables les uns sous les autres; et la somme des produits partiels, réduite à sa plus simple expression, a donné le produit total.

On parviendrait au même résultat en ordonnant les facteurs par rapport aux puissances croissantes de a, avec cette seule différence que le produit serait ordonné suivant les puissances croissantes de a.

2e Remarque. *La règle des signes dans la multiplication des monomes* (n° 9, 4°) peut se déduire de l'égalité

$$(1)\ldots\quad (a-b)\times(c-d) = ac - bc - ad + bd,$$

en supposant successivement que deux des quantités a, b, c, d, se réduisent à zéro. Par exemple, lorsqu'on fait $a=0$ et $c=0$, on trouve que le produit de $-b$ par $-d$ est $+bd$.

3e Remarque. Pour *former le produit d'un polynome par un monome,* il suffit de multiplier successivement les différens termes de ce polynome par le monome, d'après les règles données pour la multiplication des monomes; la somme des produits partiels exprime le produit demandé; car l'égalité (1) ayant lieu quels que soient c et d, si l'on fait successivement $d=0$ et $c=0$, on verra que le produit de $a-b$ par c est $ac - bc$ et que le produit de $a-b$ par $-d$ est $-ad+bd$; ce qui conduit à la règle énoncée.

4e Remarque. *Pour former le produit d'un polynome* $A + Bx + Cx^2 + etc.$, *par une quantité* δ *indépendante de la lettre* x *par rapport à laquelle ce polynome est ordonné, il suffit de multiplier chacune des quantités* A, B, C, etc., *par* δ; *le résultat* $A\delta + B\delta x + C\delta x^2 + etc.$, *exprime le produit demandé.*

11. Pour *former le produit de plusieurs polynomes*, on les ordonne par rapport à une même lettre; on multiplie ensuite le premier polynome par le second, et l'on effectue toutes les réductions possibles (n° 2); le produit des deux premiers polynomes, multiplié par le troisième, donne le produit des trois premiers polynomes; et ainsi de suite.

12. *Lorsque deux facteurs et leur produit sont ordonnés par rapport à une même lettre, le premier terme du produit total est le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur.*

Par exemple, si l'on ordonne par rapport aux puissances croissantes d'une lettre x, le premier terme de chaque facteur étant celui qui contient le plus petit exposant de x, le produit de ces premiers termes déterminera le terme du produit total qui renferme le plus petit exposant de x.

On démontrerait de même que *le dernier terme du produit total est le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.*

Il est facile d'en conclure que *les mêmes propriétés conviennent à un nombre quelconque de facteurs.*

DE LA DIVISION.

13. *La* division *algébrique a pour but, connaissant le produit de deux facteurs nommé* dividende, *et l'un de ces facteurs appelé* diviseur, *de trouver l'autre facteur nommé* quotient.

Toutes les règles relatives à la division se déduiront de celles qui ont été données pour la multiplication; car on obtiendra le quotient en cherchant par quelle quantité il faut multiplier le diviseur, pour obtenir le dividende.

14. *Le quotient ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par une même quantité.* En effet, si l'on désigne par Q le quotient de A par B, on aura

$$A = BQ, \quad \text{d'où} \quad AP = BQP = BPQ \ (\text{n}^\circ 9, 6^\circ);$$

et AP étant égal au produit de BP par Q, la division de AP par BP donnera le quotient Q. Ce qui démontre le principe énoncé.

15. La *division des monomes* repose sur les principes suivans :

1°. La RÈGLE DES LETTRES *est de supprimer dans le dividende les facteurs algébriques du diviseur.*

Quand le dividende renferme tous les facteurs du diviseur, la suppression de ces facteurs dans le dividende conduit à un quotient exact. Ainsi le quotient de *abcde* par *ad* est *bce*.

Quand le dividende ne contient pas tous les facteurs du diviseur, on obtient l'expression fractionnaire la plus simple du quotient, en supprimant les facteurs communs au dividende et au diviseur. Ainsi, $\frac{abcd}{abpq} = \frac{cd}{pq}$ (n° 14).

2°. *Dans la division de deux puissances d'une même quantité, l'une par l'autre, la* RÈGLE DES EXPOSANS *est de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende; le reste exprime l'exposant du quotient.* C'est-à-dire que m et n désignant des nombres entiers positifs, on a (1)... $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

En effet, lorsque m est plus grand que n, on a

$$m = n + p, \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+p}}{a^n} = \frac{a^n \times a^p}{a^n} = a^p = a^{m-n}.$$

Si l'on applique la formule (1) aux deux autres cas, c'est-à-dire au quotient de a^m par a^m, et de a^m par a^{m+p}, on trouvera

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0, \quad \frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{m-(m+p)} = a^{-p}.$$

Mais, $\frac{a^m}{a^m} = 1$, et $\frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1 \times a^m}{a^p \times a^m} = \frac{1}{a^p}$.

Par conséquent, *pour que la formule* (1) *soit générale, il faut supposer que* $a^0 = 1$ *et que* $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Ces conventions ne sont contraires à aucune des précédentes. En effet, a^m étant la même chose que $1 \times a^m$, *on peut considérer l'exposant positif d'une quantité comme indiquant combien de fois cette quantité est facteur avec l'unité;* et, sous ce point de vue, lorsque l'exposant m devient *zéro*, la quantité a^m, qui prend la forme a^0, se réduit au facteur 1, c'est-à-dire à l'unité. De plus, dans l'expression b^m, l'exposant positif m, indiquant que l'unité est *multipliée* par la $m^{ième}$ puissance de b, il est permis de convenir que dans b^{-m} l'exposant négatif $-m$ indique au contraire que l'unité est *divisée* par la $m^{ième}$ puissance de b. *Au moyen de ces conventions, la règle énoncée* (2°) *devient applicable à tous les cas.*

Ainsi, *toute quantité élevée à la puissance zéro est égale à l'unité, et toute quantité élevée à une puissance négative indique une division qui reste à effectuer.*

La formule $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ donne $\frac{1}{a^{-p}} = a^p$.

Remarque. Lorsqu'un polynome est ordonné par rapport à une lettre x, le terme indépendant de x peut être considéré comme le *coefficient* de x^0, car $x^0 = 1$.

Ainsi, dans le polynome $ax^3 + px^2 + qx + r$, le dernier terme r est le coefficient de x^0, et l'on dit que les coefficiens de x sont, a, p, q, r.

3°. La *règle des coefficiens* est de diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur; le résultat exprime le coefficient du quotient. Ainsi, $\frac{6ab}{2b} = 3a$, car $2b \times 3a = 6ab$.

4°. La *règle des signes* est la même que dans la multiplication; *quand le dividende et le diviseur sont de même signe,*

le quotient a le signe + ; lorsque le dividende et le diviseur ont des signes contraires, le quotient a le signe —.

16. Pour *trouver le quotient d'un polynome par un monome*, il suffit de diviser successivement chacun des termes de ce polynome par le monome qui sert de diviseur ; la somme des quotiens partiels exprime le quotient demandé. Cette règle n'est qu'une conséquence de la 3e *remarque* du n° 10.

17. Pour trouver la règle qui sert à déterminer le *quotient d'un polynome par un autre*, on observe que le dividende pouvant être considéré comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les deux facteurs, il est naturel de chercher d'abord comment se forme un produit, afin d'en déduire le moyen de le décomposer.

Multiplication ou formation d'un produit.

a^3-3ba^2
$a^2-2ba-b^2$
a^5-3ba^4
$-2ba^4+6b^2a^3$
$-b^2a^3+3b^3a^2$
$a^5-5ba^4+5b^2a^3+3b^3a^2$

Division ou décomposition d'un produit.

$a^5-5ba^4+5b^2a^3+3b^3a^2$ | a^3-3ba^2
$-a^5+3ba^4$ | $a^2-2ba-b^2$
1er reste, $-2ba^4+5b^2a^3+3b^3a^2$
$+2ba^4-6b^2a^3$
2e reste $-b^2a^3+3b^3a^2$
$+b^2a^3-3b^3a^2$
3e reste 0

La comparaison du produit avec ses facteurs fait voir que ces trois polynomes étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la lettre a, le 1er terme a^5 du produit total est le produit du 1er terme a^3 du multiplicande par le 1er terme a^2 du multiplicateur ; que le dernier terme $3b^3a^2$ de ce produit résulte de la multiplication du dernier terme $-3ba^2$ du multiplicande, par le dernier terme $-b^2$ du multiplicateur, et que les autres termes du produit total résultent de la réduction de plusieurs termes semblables des produits partiels.

Par conséquent, la division du 1er terme a^5 du dividende, par le 1er terme a^3 du diviseur, fournit le 1er terme a^2 du quotient ; tandis que la division d'un autre terme du dividende par

un terme du diviseur, peut ne pas donner un terme du quotient.

Le dividende exprimant la somme des produits partiels du diviseur par les différens termes du quotient, si l'on retranche du dividende le produit $a^5 - 3ba^4$ du diviseur $a^3 - 3ba^2$ par le 1er terme a^2 du quotient, le *reste* $-2ba^4 + 5b^2a^3 + 3b^3a^2$ sera le produit du diviseur par les autres termes du quotient.

Pour faciliter cette soustraction, on écrit les produits partiels a^5, $-3ba^4$, des différens termes du diviseur par le 1er terme a^2 du quotient, sous les termes semblables du dividende, en changeant les signes de ces produits partiels, et l'on obtient le 1er reste en ajoutant $-a^5 + 3ba^4$, au dividende (n° 4).

Connaissant le 1er terme a^2 du quotient, et le 1er reste, pour déterminer les autres termes du quotient, on observe que le 1er reste exprime le produit du diviseur par la somme des termes inconnus du quotient, et que, par conséquent, le 1er terme $-2ba^4$ du 1er reste est le produit du 1er terme a^3 du diviseur par le 1er des termes inconnus du quotient; on obtiendra donc le 1er de ces termes, c'est-à-dire le 2e terme du quotient demandé, en divisant le 1er terme $-2ba^4$ du 1er reste, par le 1er terme a^3 du diviseur; ce qui fournira le 2e terme $-2ba$ du quotient demandé.

Enfin, pour trouver le 3e terme du quotient, on retranche du 1er reste le produit du diviseur par le 2e terme $-2ba$ du quotient, le 2e reste est le produit du diviseur par le 3e terme du quotient; de sorte que la division du 1er terme $-b^2a^3$ de ce 2e reste, par le 1er terme a^3 du diviseur, fournit le dernier terme $-b^2$ du quotient. Retranchant du 2e reste le produit du diviseur par $-b^2$, le *reste* zéro fait voir que le quotient obtenu $a^2 - 2ba - b^2$ est exact; car on est parvenu à ce reste, en retranchant du dividende et des restes les produits partiels du diviseur par les termes, a^2, $-2ba$, $-b^2$, du quotient; ce qui revient à ôter du dividende le produit du diviseur par $a^2 - 2ba - b^2$; le reste étant nul, le dividende est le produit exact du diviseur par $a^2 - 2ba - b^2$.

On parviendrait au même résultat, en ordonnant le dividende, le diviseur et les restes successifs, suivant les puis-

sances croissantes de a, avec cette seule différence que le quotient serait ordonné suivant les puissances croissantes de a.

18. En général : *Pour calculer le quotient de deux polynomes l'un par l'autre, ordonnez-les, ainsi que les restes successifs, par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre; le quotient sera ordonné de la même manière. Divisez le* 1er *terme du dividende par le* 1er *terme du diviseur; le résultat sera le* 1er *terme du quotient. Retranchez du dividende le produit du diviseur par le* 1er *terme du quotient, vous obtiendrez un* 1er *reste. Divisez le* 1er *terme de ce* 1er *reste par le* 1er *terme du diviseur, le résultat sera le* 2e *terme du quotient; et ainsi de suite.*

1re Remarque. *Dans tout le cours des opérations relatives à la division, le dividende est constamment égal au produit du diviseur par le quotient obtenu, augmenté du reste qui correspond à ce quotient;* car on a trouvé le reste, en retranchant successivement du dividende et des restes successifs, les produits partiels du diviseur par chacun des termes du quotient obtenu; ce qui revient à retrancher du dividende le produit du diviseur par le quotient obtenu.

Ainsi, *lorsqu'on parvient à un reste nul, le quotient obtenu est exact;* car le dividende est alors égal au produit du diviseur par ce quotient.

2e Remarque. Lorsqu'on a trouvé un nombre quelconque de termes au quotient, il suffit, pour obtenir le quotient total, d'ajouter à ces termes une fraction dont le numérateur est le reste correspondant et dont le dénominateur est le diviseur donné.

3e Remarque. Quand le dividende et le diviseur sont des polynomes fractionnaires, le principe du n° 14 fournit le moyen de ramener la question à diviser deux polynomes entiers l'un par l'autre, en multipliant le dividende et le diviseur proposés par une quantité telle que les produits ne contiennent plus des termes fractionnaires.

19. *Pour que les exposans d'une lettre x diminuent dans*

les restes successifs, il faut ordonner le dividende, le diviseur et les restes, par rapport aux puissances décroissantes de cette lettre, et réunir en un seul terme tous les monomes affectés de la même puissance de x. On parvient alors nécessairement à un reste *moindre* que le diviseur, c'est-à-dire que le plus fort exposant de x dans ce reste est *moindre* que le plus fort exposant de x dans le diviseur.

Si l'on ne veut admettre au quotient que des puissances positives de la *lettre ordonnatrice* x, on arrêtera la division, dès qu'on sera parvenu à un reste *moindre* que le diviseur; le quotient total se composera des termes entiers obtenus au quotient, plus d'une fraction dont ce reste sera le numérateur, et dont le diviseur donné sera le dénominateur.

Si l'on veut admettre des puissances négatives de x au quotient, la division pourra se prolonger indéfiniment; le quotient sera de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Kx + L + ax^{-1} + bx^{-2} + \ldots,$$

tous les coefficiens $A, B, \ldots, K, L, a, b, \ldots$, seront des quantités, entières ou fractionnaires, indépendantes de x. Mais, *quand on sera parvenu à un terme du quotient qui contiendra un exposant de x moindre que le plus petit exposant de x dans le dividende, diminué du plus petit exposant de x dans le diviseur, on sera certain qu'on ne parviendra pas à un reste nul, quelque loin qu'on prolonge la division;* en effet, lorsque le quotient est exact, son dernier terme multiplié par le dernier terme du diviseur devant donner le dernier terme du dividende (n° 12), le plus petit exposant de x dans le quotient, ajouté au plus petit exposant de x dans le diviseur, doit donner le plus petit exposant de x dans le dividende; le plus petit exposant de x dans le quotient ne saurait donc être moindre que le plus petit exposant de x dans le dividende diminué du plus petit exposant de x dans le diviseur. Ce qui démontre le principe énoncé.

Lorsque le dividende sera le produit du diviseur par un polynome composé d'un nombre fini de termes, la règle du

n° 18 conduira toujours à un reste nul. Quand le dividende ne sera pas le produit du diviseur par un polynome composé d'un nombre fini de termes, le calcul indiquera cette circonstance en conduisant à un terme du quotient qui contiendra un exposant de x moindre que le plus petit exposant de x dans le dividende diminué du plus petit exposant de x dans le diviseur (on suppose que le dividende, le diviseur et les restes successifs sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x).

20. *Lorsqu'un polynome* $A+Bx+Cx^2+$ *etc., est divisible exactement par une quantité* δ *indépendante de la lettre* x *par rapport à laquelle il est ordonné, cette quantité* δ *divise nécessairement chacun des coefficiens* A, B, C, *etc.* Cela résulte de la 4ᵉ remarque du n° 10.

On peut d'ailleurs démontrer directement cette propriété. En effet, les quantités δ, A, B, C, *etc.*, étant indépendantes de x, il n'y a qu'un quotient de la forme $\alpha+\mathfrak{C}x+\gamma x^2+$ *etc.*, qui multiplié par le diviseur δ puisse reproduire le dividende $A+Bx+Cx^2+$ *etc.*; on a donc

$$A+Bx+Cx^2+\text{etc.}=(\alpha+\mathfrak{C}x+\gamma x^2+\text{etc.})\delta=\alpha\delta+\mathfrak{C}\delta x+\gamma\delta x^2+\text{etc.}$$

Les polynomes $A+Bx+Cx^2+$ *etc.*, $\alpha\delta+\mathfrak{C}\delta x+\gamma\delta x^2+$ *etc.*, devant être identiques, il faut que $A=\alpha\delta$, $B=\mathfrak{C}\delta$, $C=\gamma\delta$, *etc.* Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. Pour *trouver le quotient de la division du polynome* $A+Bx+Cx^2+$ *etc., par le diviseur* δ *indépendant de* x, il faut diviser chacun des coefficiens A, B, C, etc., par δ; les quotiens α, $\mathfrak{C}$, γ, etc., sont les coefficiens des puissances correspondantes de x dans le quotient demandé; de sorte que ce quotient est $\alpha+\mathfrak{C}x+\gamma x^2+$ *etc.*

Preuves des quatre règles.

21. Pour faire la *preuve de l'addition*, on peut soustraire de la somme des quantités données l'une quelconque de ces quantités; le *reste* doit être égal à la somme de toutes les

autres quantités données. Pour faire la *preuve de la soustraction*, on ajoute le reste à la quantité que l'on a soustraite, la somme doit être égale à la quantité dont on a soustrait. Pour faire la *preuve de la multiplication*, on divise le produit obtenu, par l'un de ses deux facteurs, le quotient doit être égal à l'autre facteur. Enfin, pour faire la *preuve de la division*, on multiplie le diviseur par le quotient obtenu, et l'on ajoute à ce produit le reste correspondant à ce quotient, la somme doit être égale au dividende.

§ III. *Des fractions littérales.*

22. Quand la division d'un polynome par un autre conduit à un dernier reste *moindre* que le diviseur, le quotient total est composé d'une *partie entière*, plus d'une *fraction* dont le dernier reste est le numérateur, et dont le diviseur est le dénominateur. Ainsi, la division de $x^4 + x^3 - x + 1$ par $x^3 - x$ donnant le quotient entier $x + 1$ et le reste $x^2 + 1$, le quotient total est composé de l'*entier* $x + 1$ plus de la *fraction* $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$, (n° 19).

23. *Les propriétés qui ont été démontrées, en Arithmétique, sur les fractions numériques, conviennent aussi aux fractions littérales.* Mais, comme les raisonnemens dont on a fait usage exigent que le numérateur et le dénominateur soient des nombres entiers, il est nécessaire de démontrer généralement ces propriétés; et à cet effet, *nous considérerons toujours une fraction littérale comme indiquant le quotient du numérateur par le dénominateur.* Cela posé,

1°. *Une fraction quelconque ne change pas de valeur, quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par une même quantité* (n° 14).

Par conséquent, *lorsqu'on apercevra des facteurs communs aux deux termes d'une fraction, on pourra la simplifier, sans changer sa valeur, en supprimant ces facteurs communs.*

2°. *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

Remarque. Quand on aperçoit des facteurs communs dans les dénominateurs, on peut trouver un dénominateur commun plus simple que le produit des dénominateurs des fractions proposées.

Exemple. *Soient les fractions*, $\frac{a}{b^3c^3}$, $\frac{f}{b^4c^2d}$, $\frac{e}{bc^2}$.

On peut prendre pour dénominateur commun une quantité quelconque divisible par chacun des dénominateurs. La plus petite des quantités qui jouissent de cette propriété étant b^4c^3d, on réduira les fractions proposées à ce dénominateur commun, ce qui fournira les fractions équivalentes

$$\frac{ab^2d}{b^4c^3d}, \quad \frac{cf}{b^4c^3d}, \quad \frac{b^3cde}{b^4c^3d}.$$

24. 1°. *L'*addition *de plusieurs fractions de même dénominateur s'effectue en formant la somme des numérateurs, et en donnant pour dénominateur à cette somme celui des fractions proposées.*

En effet, soient (1)... $\frac{b}{a} = m$, $\frac{c}{a} = n$, $\frac{d}{a} = p$, etc.;

on aura, (2)... $b = am$, $c = an$, $d = ap$, etc.; d'où

$$b + c + d + \text{etc.} = am + an + ap + \text{etc.} = a(m + n + p + \text{etc.})$$

et $$m + n + p + \text{etc.} = \frac{b + c + d + \text{etc.}}{a}.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

2°. *La* soustraction *de deux fractions de même dénominateur s'effectue en prenant la différence entre les numérateurs et en l'affectant du dénominateur commun :* car les relations (1) et (2) donnent

$$b - c = a(m - n), \quad m - n = \frac{b - c}{a} = \frac{b}{a} - \frac{c}{a},$$

3°. *Pour ajouter ou soustraire des fractions qui ont des dénominateurs différens, on les réduit d'abord au même dénominateur, et l'on opère ensuite comme on vient de l'indiquer.*

4°. *Dans la* MULTIPLICATION *de plusieurs fractions, le produit est exprimé par une fraction, dont le numérateur est le produit des numérateurs des fractions proposées, et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs des mêmes fractions.* Car, en faisant $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, $\frac{e}{f} = p$, ...,

on en déduit, $a = bm$, $c = dn$, $e = fp$, ...,

$$ace\ldots = bmdnfp\ldots = bdf\ldots \times mnp\ldots, \quad mnp\ldots = \frac{ace\ldots}{bdf\ldots}.$$

5°. *La* DIVISION *d'une fraction par une fraction s'effectue en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur* RENVERSÉE. Car, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = \frac{ad}{cb}$ (n° 14) $= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

25. Les raisonnemens du n° 23 (1°) et du n° 24 étant vrais quels que soient les numérateurs et les dénominateurs des fractions proposées, on peut supposer que l'un des deux termes de l'une quelconque de ces fractions se réduit à l'unité. On en déduit les propriétés suivantes :

1°. Pour *multiplier une fraction par un entier,* il suffit de multiplier le numérateur ou de diviser le dénominateur par cet entier ; 2°. Pour *diviser une fraction par un entier,* il suffit de diviser le numérateur ou de multiplier le dénominateur par l'entier ; 3°. Pour *diviser l'une par l'autre deux fractions de même dénominateur,* il suffit de diviser le numérateur de la première par celui de la seconde ; 4°. Pour *diviser l'une par l'autre deux fractions de même numérateur,* il suffit de diviser le dénominateur de la seconde par celui de la première ; 5°. Enfin, le *quotient de la division de l'unité par une fraction* est égal à cette fraction *renversée*.

En effet, on a

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b \times 1} = \frac{ac}{b}, \quad \frac{a}{bc} \times c = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{ac}{b} : c = \frac{ac}{b} : \frac{c}{1} = \frac{ac}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{a} = \frac{ac}{ba} = \frac{c}{b},$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}.$$

26. Pour *transformer un entier en une expression fractionnaire équivalente qui ait un dénominateur donné*, on multiplie l'entier par le dénominateur donné; le produit exprime le numérateur de la fraction demandée; car $a = \frac{a \times b}{b}$.

Pour *trouver les entiers contenus dans une expression fractionnaire*, on effectue la division du numérateur par le dénominateur, et l'on continue l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste *moindre* que le diviseur (page 20), comme il a été indiqué (n° 22).

Pour *convertir en une seule expression fractionnaire un entier joint à une fraction*, on multiplie l'entier par le dénominateur de la fraction, on ajoute au produit le numérateur de cette fraction, et l'on donne à la somme le dénominateur de la fraction. Car, $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$.

27. Le calcul des fractions ne pouvant plus offrir aucune difficulté, nous allons voir comment on opère sur les quantités qui sont composées d'entiers et de fractions; 1°. Dans l'*addition*, on cherche d'abord la somme des fractions; on en extrait les entiers qu'elle peut contenir, pour les ajouter ensuite aux entiers qui accompagnent les fractions; 2°. Dans

la *soustraction*, on retranche séparément l'entier de l'entier, et la fraction de la fraction; 3°. Dans la *multiplication* et dans la *division*, on transforme d'abord chacune des quantités données en une seule fraction équivalente (n° 26), et l'on opère ensuite sur ces dernières fractions d'après les règles précédentes.

28. Quand les deux termes d'une fraction $\frac{\alpha}{\zeta}$ sont des quantités positives, finies et déterminées, cette fraction a nécessairement une valeur positive, finie et déterminée que l'on obtient en divisant α par ζ. Nous allons examiner ce qui arrive, lorsque le numérateur ou le dénominateur se réduit à zéro.

1°. Quand le dénominateur ζ étant un nombre constant, le numérateur α diminue et s'approche indéfiniment de zéro, la valeur de $\frac{\alpha}{\zeta}$ diminue et s'approche indéfiniment de zéro. Enfin, quand $\alpha = 0$, l'expression $\frac{0}{\zeta}$ se réduit à zéro; et en effet, le produit de zéro par un nombre quelconque ζ étant égal à zéro (n°9, 7°), le quotient de zéro par ζ est égal à zéro.

2°. Lorsque le numérateur α étant un nombre constant, le dénominateur ζ diminue et s'approche indéfiniment de zéro, la valeur de $\frac{\alpha}{\zeta}$ augmente indéfiniment (*); et enfin, quand ζ se réduit à zéro, c'est-à-dire quand ζ devient moindre que toute quantité assignable, la valeur de $\frac{\alpha}{\zeta}$ devient plus grande que toute quantité assignable; cette *limite* de l'accroissement des quantités est ce qu'on nomme l'*infiniment grand* ou l'*infini;* on la représente par le *signe* ∞. De sorte que $\frac{\alpha}{0} = \infty$, quelle que soit la valeur finie de α.

(*) Par exemple, si le dénominateur ζ prend les valeurs de dix en dix fois plus petites $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$, etc., la fraction $\frac{\alpha}{\zeta}$ prendra les valeurs de dix en dix fois plus grandes $\alpha, 10\alpha, 100\alpha, 1000\alpha, 10000\alpha$, etc.

3°. Enfin, quand le numérateur et le dénominateur sont nuls, la fraction $\frac{\alpha}{\zeta}$ devient $\frac{0}{0}$. Or, *on peut prendre un nombre arbitraire pour le quotient de zéro par zéro;* car le diviseur zéro multiplié par un nombre quelconque, reproduit le dividende zéro (n° 9, 7°). On dit, par ce motif, que la fraction $\frac{0}{0}$ est *indéterminée.*

1re Remarque. L'infiniment grand étant la limite de l'accroissement des quantités, il suit de là qu'en ajoutant à l'infini une quantité finie quelconque $\pm\alpha$, le résultat est infini. On a donc, quel que soit α,

$$\infty+\alpha=\infty, \quad \infty-\alpha=\infty; \quad \text{d'où} \quad \infty-\infty=\pm\alpha.$$

2e Remarque. Le quotient de α par zéro étant égal à l'infini, quelle que soit la valeur finie de α, il en résulte que *le produit de* ∞ *par zéro est un nombre arbitraire* α, et que *le quotient d'un nombre quelconque* α *par* ∞ *est égal à zéro.*

On peut d'ailleurs faire voir directement que le quotient d'un nombre α par ∞ est zéro. En effet, si le numérateur α de la fraction $\frac{\alpha}{\zeta}$ ayant une valeur finie constante, le dénominateur ζ augmente d'une manière continue et s'approche indéfiniment de ∞, la fraction $\frac{\alpha}{\zeta}$ diminuera et s'approchera indéfiniment de zéro ; enfin, si ζ devient plus grand que toute quantité assignable, c'est-à-dire si ζ devient infiniment grand, la fraction $\frac{\alpha}{\zeta}$ deviendra plus petite que toute quantité assignable, c'est-à-dire que $\frac{\alpha}{\infty}$ est égal à zéro.

3e Remarque. *Lorsque les deux termes* α, ζ, *d'une fraction* $\frac{\alpha}{\zeta}$ *sont infiniment grands, la valeur de cette fraction est indéterminée;* car le produit de ∞ par une quantité finie quel-

conque α étant égal à ∞, le quotient de ∞ par ∞ est une quantité arbitraire α.

29. Lorsque l'on connaît la fraction primitive qui prend l'une des formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\alpha}{0}$, *pour certaines valeurs particulières des quantités contenues dans le numérateur et le dénominateur, la fraction* $\frac{0}{0}$ *peut avoir une valeur déterminée ou indéterminée, et la fraction* $\frac{\alpha}{0}$ *peut être égale à* $\pm\infty$. En effet :

1°. La fraction (1)... $\frac{a^2-1}{a^2+a-2}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ quand $a=1$; et cependant, si l'on divise ses deux termes par leur facteur commun $a-1$, on obtient la fraction (2) ... $\frac{a+1}{a+2}$ qui se réduit à $\frac{2}{3}$ lorsque $a=1$.

Pour toutes les valeurs numériques de a plus grandes et plus petites que 1, le facteur $a-1$ n'étant pas zéro, on ne change pas la valeur de la fraction (1) en divisant ses deux termes par $a-1$; de sorte que les expressions (1), (2), ont les mêmes valeurs numériques. Si a varie en s'approchant indéfiniment de l'unité, l'expression (2) s'approche indéfiniment de $\frac{2}{3}$, l'expression équivalente (1) s'approche donc aussi indéfiniment de $\frac{2}{3}$; enfin, lorsque $a=1$, le facteur $a-1$ devenant zéro, il n'est plus permis de diviser les deux termes de (1) par $a-1$, la fraction (1) qui devient $\frac{0}{0}$ est entièrement indéterminée, et la fraction (2) est égale à $\frac{2}{3}$; mais comme la fraction (1) s'est approchée indéfiniment de la *limite* $\frac{2}{3}$, on dit que cette limite est la *vraie valeur* de la fraction (1), correspondante à $a=1$.

2°. Les valeurs $a=2$, $b=3$, réduisent la fraction $\frac{a^2-4}{b-3}$

à $\frac{0}{0}$, et cette fraction est entièrement indéterminée pour ces valeurs de a et de b.

3°. Soient les fractions $+\frac{1}{x^2}$, $-\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, dans lesquelles on peut donner des valeurs arbitraires à x. Si x varie d'une manière continue depuis $+\infty$ jusqu'à 0, et ensuite depuis $-\infty$ jusqu'à zéro, les deux séries de valeurs correspondantes de $+\frac{1}{x^2}$ seront positives et croîtront depuis 0 jusqu'à $+\infty$; de sorte que ces deux séries de valeurs de $\frac{1}{x^2}$ tendront vers une limite commune qui sera l'infini positif; les deux séries de valeurs de $-\frac{1}{x^2}$, correspondantes aux mêmes valeurs positives et négatives de x, seront négatives et croîtront négativement depuis 0 jusqu'à $-\infty$ qui est leur limite commune; les valeurs positives de x donneront des valeurs de $\frac{1}{x^3}$ qui seront positives et qui croîtront depuis 0 jusqu'à $+\infty$, tandis que les valeurs négatives de x donneront des valeurs négatives de $\frac{1}{x^3}$ qui croîtront négativement depuis 0 jusqu'à $-\infty$.

Par conséquent, lorsque $x=0$, on a

$$+\frac{1}{x^2}=+\infty, \quad -\frac{1}{x^2}=-\infty, \text{ et } \frac{1}{x^3}=\pm\infty.$$

En général, *lorsque les valeurs finies d'une quantité qui varie d'une manière continue sont constamment positives et croissent en s'approchant de plus en plus de l'infini, si cette quantité variable devient infinie, sa valeur infinie doit être affectée du signe +; si toutes les valeurs finies de la quantité variable sont négatives, sa valeur infinie doit être affectée du signe —; enfin, si la quantité qui devient infinie, passe du positif au négatif par l'infini, cette valeur infinie doit être affectée du double signe + et —.*

CHAPITRE II.

Des Équations et des Problèmes du premier degré.

§ Ier. *Notions préliminaires.*

30. Les égalités qui n'ont lieu que pour certaines valeurs particulières des lettres qu'elles renferment sont des *équations;* les égalités qui subsistent, quelles que soient les valeurs des lettres qu'elles contiennent, sont des *identités.*

Ainsi, l'égalité $3+x=7$ est une *équation,* car elle n'est vraie que lorsqu'on y fait $x=4$; et l'égalité $2x-1=2x-1$ est une *identité,* car elle est vraie quelle que soit x.

Les deux quantités séparées par le *signe* $=$ sont les deux *membres* de l'équation ou de l'identité; la quantité placée à gauche du signe $=$ est le *premier membre,* et celle qui est à droite forme le *second membre.* Les quantités séparées par les signes $+$ et $-$ sont les *termes* de l'équation ou de l'identité.

Toute égalité dont l'un des membres n'est que le résultat des opérations indiquées dans l'autre membre, est une identité.

Par exemple, le produit de $a+b$ par $a-b$ étant a^2-b^2, quels que soient a et b, la relation $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$, est une *identité;* elle démontre que *la somme de deux quantités multipliée par leur différence, donne la différence des quarrés de ces deux quantités.*

On dit qu'une équation est *numérique,* lorsque les inconnues x, y, z, etc., n'y sont combinées qu'avec des nombres; et une équation est dite *littérale,* quand les inconnues y sont combinées avec des quantités données représentées par des lettres a, b, c, etc.

Ainsi, l'équation $2x-3=y+2$ est *numérique,* et $2ax-5=4y+7b$ est une équation *littérale.*

Quand des quantités (numériques ou littérales) mises à la

place des inconnues, rendent une équation identique, ces quantités forment ce qu'on appelle un *système* de valeurs des inconnues, ou une *solution* de cette équation, et l'on dit que ces valeurs *satisfont* à l'équation.

Lorsque plusieurs équations doivent être satisfaites par les mêmes valeurs des inconnues, elles forment ce qu'on nomme un *système* d'équations; et *résoudre* un tel système, c'est chercher quelles sont les expressions qui, mises à la place des inconnues, rendent identiques toutes les équations données.

31. Les transformations qu'il faut faire subir à des équations pour parvenir aux valeurs des inconnues, sont fondées sur ce principe évident : *Quand on fait les mêmes opérations sur des quantités égales, les résultats sont égaux.*

Ainsi, *lorsqu'on ajoute une même quantité à deux quantités égales, les sommes sont égales; lorsqu'on retranche une même quantité de deux quantités égales, les restes sont égaux; quand on multiplie ou quand on divise deux quantités égales par une même quantité, les produits ou les quotients sont égaux.*

Remarque. *Ces propriétés ne conviennent généralement qu'aux quantités finies*, c'est-à-dire aux quantités qui ne sont ni nulles ni infinies. Par exemple, les égalités $2 \text{ fois } 0 = 3 \text{ fois } 0$, $2 \text{ fois } \infty = 3 \text{ fois } \infty$, sont vraies; mais si l'on divisait les deux membres de la 1re par 0 et les deux membres de la 2e par ∞, on serait conduit à l'absurdité $2 = 3$.

32. Pour résoudre les équations qui renferment des termes fractionnaires, on fait d'abord disparaître tous les dénominateurs, en multipliant les deux membres de chaque équation par le produit des dénominateurs qui entrent dans cette équation.

Soit l'équation, $\frac{a}{b} - c = \frac{y}{d} - \frac{m}{nx}$;

en multipliant ses deux membres par $bdnx$, les produits seront égaux, et l'on aura l'équation équivalente

$$\frac{abdnx}{b} - cbdnx = \frac{ybdnx}{d} - \frac{mbdnx}{nx},$$

qui se réduit à

$$a \times dnx - c \times bdnx = y \times bnx - m \times bd.$$

La comparaison de cette dernière équation avec la proposée démontre que *pour faire disparaître les dénominateurs contenus dans une équation, il suffit de multiplier chaque numérateur par le produit des dénominateurs des autres fractions, et chaque entier par le produit de tous les dénominateurs.*

REMARQUE. *Lorsque les dénominateurs ont des facteurs communs, on simplifie le calcul en multipliant tous les termes par la plus petite quantité divisible par chaque dénominateur.*

Par exemple, soit l'équation

$$(1)\ldots \quad \frac{p}{6a^2b^3} - \frac{qx}{3a^4c^3} = \frac{n}{4b^4cd} - \frac{mx}{2qby}.$$

La plus petite quantité divisible par chacun des dénominateurs étant $12a^4b^4c^3dy$, on multiplie tous les termes de l'équation (1) par $12a^4b^4c^3dy$, et l'on effectue ensuite les divisions indiquées, ce qui conduit à l'équation équivalente

$$2a^2bc^3dpy - 4b^4dqxy = 3a^4cny - 6a^3b^3c^3dmx.$$

33. Pour *déterminer le* DEGRÉ *d'une équation* qui ne renferme pas d'inconnues dans les dénominateurs, on fait dans chaque terme la somme des exposans des inconnues; la plus grande de ces sommes est le *degré* de l'équation. Quand les inconnues entrent dans des dénominateurs, on ramène ce cas au précédent, en faisant disparaître ces dénominateurs.

Ainsi, $2x - y = 5$ est une équation du *premier degré*, et l'équation $a^3y^2x^5 = b^2 - x^5$ est du *septième degré*.

§ 2e. *Des équations du premier degré.*

34. Pour *résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue* x, nous distinguerons plusieurs cas.

1°. *Soit l'équation* $x + b = c$.

On ôte b de chacune des deux quantités égales $x + b, c$:

les restes x, $c-b$, devant être égaux, on voit que $x=c-b$.

2°. *Soit l'équation* $x-b=c$.

On ajoute b à chacun de ses membres, ce qui donne $x=c+b$.

Il résulte de (1°) et (2°) que *pour faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre, il suffit d'effacer ce terme dans le membre où il se trouve, et de l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire, c'est-à-dire avec le signe — s'il avait le signe + et avec le signe + s'il avait le signe —.*

3°. *Soit l'équation* $bx=c$.

On divise ses deux membres par b, ce qui donne $x=\frac{c}{b}$.

Par conséquent, *lorsque le premier membre d'une équation ne contenant que l'inconnue affectée d'un certain coefficient, le second membre ne renferme que des quantités connues, la valeur de l'inconnue s'obtient en divisant le second membre par le coefficient de l'inconnue.*

4°. *Soit l'équation* $\frac{x}{b}=c$.

On multiplie ses deux membres par b, ce qui donne $x=c\times b$.

Par conséquent, *lorsque le premier membre d'une équation ne contenant que l'inconnue divisée par une quantité connue, le second membre est une quantité toute connue, la valeur de l'inconnue s'obtient en multipliant le second membre par la quantité qui servait de diviseur à cette inconnue.*

5°. *Enfin, soit l'équation*

$$\frac{a}{4(x-1)}+\frac{5}{6}=\frac{7}{3(x-1)}-b.$$

On fait disparaître les dénominateurs, en multipliant les deux membres par $12(x-1)$, (n° 32); ce qui conduit à la *transformée*

$$3a+10(x-1)=28-12b(x-1).$$

En effectuant les multiplications indiquées, elle devient

$$3a+10x-10=28-12bx+12b.$$

On fait passer les termes en x dans le 1er membre, et les ter-

mes tout connus dans le 2e membre ; ce qui donne

$$10x+12bx=28+12b-3a+10,$$
$$\text{ou}\quad 2\,(5+6b)\,x=38+12b-3a.$$

On en déduit, $x=\dfrac{38+12b-3a}{2\,(5+6b)}$.

35. En général : *Pour résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue, chassez d'abord tous les dénominateurs* (n° 32) ; *effectuez les opérations indiquées; faites passer dans le premier membre les termes qui contiennent l'inconnue et les termes tout connus dans le second membre; réduisez chaque membre à sa plus simple expression, vous obtiendrez une équation dont le premier membre ne renfermera que l'inconnue affectée d'un certain coefficient, et dont le second membre sera une quantité toute connue; la valeur de l'inconnue s'obtiendra en divisant le second membre de la dernière équation par le coefficient de l'inconnue.*

Remarque. *On peut changer les signes de tous les termes d'une équation, sans altérer l'égalité;* car cela revient à multiplier les deux membres par -1.

Ainsi, lorsqu'on parviendra à un résultat de la forme $-x=-a$, on en conclura immédiatement que $x=a$, et la relation $-x=a$, donnera $x=-a$.

36. *Une équation à deux inconnues admet une infinité de solutions;* car, pour chaque valeur donnée arbitrairement à l'une des inconnues, l'équation détermine la valeur correspondante de l'autre inconnue.

Par exemple, dans l'équation $y=x+3$, chaque valeur arbitraire donnée à x, augmentée de 3, fournit la valeur correspondante de y. La valeur de y dépendant de celle de x, on dit que y est *fonction* de x.

En général, *toute quantité qui dépend d'une ou de plusieurs autres quantités est dite* fonction *de ces quantités.*

37. Pour *résoudre deux équations du premier degré à deux inconnues,* on cherche d'abord à combiner ces équations de

manière à en déduire une équation qui ne renferme que l'une des inconnues; ce qui revient à faire disparaître ou à *éliminer* l'autre inconnue. Cette équation à une seule inconnue fournit la valeur de l'inconnue qu'elle contient, et la substitution de la valeur de cette inconnue dans l'une quelconque des équations qui renferment les deux inconnues, conduit à la valeur de l'autre inconnue.

Le procédé qui se présente le plus naturellement pour éliminer une des inconnues, est de tirer de l'une des équations l'expression de cette inconnue en *fonction* de l'autre inconnue, et de substituer cette expression dans l'autre équation. On verra (n°s 43 et 46) que l'*élimination* peut s'effectuer par d'autres méthodes.

EXEMPLE. *Soit proposé de résoudre les équations*

$$2x+3y=13, \quad 5x+4y=22.$$

On tire de la 1re équation, (1).... $y=\frac{13-2x}{3}$.

La *substitution* de cette expression de y dans la 2e équation conduit à une équation qui donne $x=2$; et cette valeur de x, substituée dans l'expression (1) de y, donne $y=3$.

38. Pour *résoudre trois équations du premier degré à trois inconnues*, on tire de l'une des équations la valeur d'une inconnue en fonction des deux autres inconnues; la substitution de cette valeur dans les deux autres équations, fournit deux équations à deux inconnues qui déterminent les valeurs de ces deux inconnues; et la substitution de ces valeurs dans l'une quelconque des équations qui renferment les trois inconnues, fournit une équation qui détermine la troisième inconnue.

EXEMPLE. *Soient les équations*

$$3x-2y-z=1, \quad 2x+3y-2z=4, \quad 7x-4y-3z=1.$$

On tire de la première, $z=3x-2y-1$.

La *substitution* de cette valeur de z dans les deux autres équations conduit à deux équations en x et y qui donnent

$x=3$, $y=2$; et ensuite la relation $z=3x-2y-1$ donne $z=4$.

39. Des raisonnemens analogues aux précédens fourniront le moyen de *résoudre un nombre quelconque d'équations du premier degré, lorsqu'il y aura autant d'équations que d'inconnues.*

40. *Quand toutes les inconnues n'entrent pas à la fois dans chacune des équations proposées,* on examine avec soin de quelle manière les inconnues sont liées entre elles, afin de pouvoir les déduire les unes des autres.

Exemple. *Soient les quatre équations,*

$$y+t=8, \quad 2z-t=3, \quad 3x-z=2, \quad 2x+3y=13.$$

Pour éliminer t entre les deux premières, on pourrait faire usage du procédé du n° 38; mais on parvient plus simplement au même résultat en ajoutant ces équations membre à membre, ce qui donne $y+2z=11$.

Les inconnues x, y, z, dépendent des trois équations

$$y+2z=11, \quad 3x-z=2, \quad 2x+3y=13.$$

On élimine z entre les deux premières de ces trois équations, ce qui conduit à $6x+y=15$. Or, $2x+3y=13$.

Ces deux dernières équations donnent $x=2$, $y=3$; pour en déduire z, on fait $y=3$ dans $y+2z=11$, ou $x=2$ dans $3x-z=2$, et l'on trouve $z=4$.

Enfin, on obtient t en faisant $y=3$ dans $y+t=8$, ou $z=4$ dans $2z-t=3$; ce qui donne $t=5$.

41. *Lorsqu'en combinant des équations, pour en déduire les valeurs des inconnues, on parvient à une équation qui ne renferme aucune inconnue, cette dernière équation peut toujours se ramener à l'une des formes,* $a=0$, $0=0$, (*a désignant une quantité connue*). Dans le 1er cas, des quantités, numériques ou littérales, mises à la place des inconnues, ne pouvant jamais rendre à la fois toutes les équations identiques, nous dirons que ces équations sont *incompatibles*, ou *impossibles*, ou *contradictoires*. Dans le 2e cas, les équa-

tions données peuvent admettre une infinité de solutions, et l'on dit alors qu'elles sont *indéterminées*. En voici des exemples.

1°. *Soient les équations*, $x+2y=5$, $3x+6y=2$.

L'élimination de x conduisant à l'absurdité $13=0$, les équations données sont *contradictoires*.

Et en effet, la multiplication des deux membres de la 1re équation par 3 conduit à l'équation $3x+6y=15$, qui ne peut s'accorder avec la 2e équation $3x+6y=2$.

2°. *Soient les équations*, $6x+3y=3$, $4x+2y=2$.

L'élimination de l'une quelconque des inconnues, x, y, conduisant à l'identité $0=0$, ces équations sont *indéterminées*.

Et en effet, la multiplication des deux membres de la 1re équation par $\frac{2}{3}$, donnant la 2e équation, toutes les solutions de l'une des deux équations données satisferont nécessairement à l'autre équation; de sorte qu'on n'a réellement qu'une seule équation pour trouver deux inconnues.

3°. *Soient les trois équations*,

$$x+y+z=1,\quad x+y+2z=2,\quad 2x+2y+2z=2.$$

L'élimination de x entre les deux premières donne $z=1$; et cette valeur de z réduisant les trois équations proposées à $x+y=0$, *on peut assigner des valeurs arbitraires à l'une quelconque des inconnues*, x, y, les valeurs correspondantes de l'autre inconnue se déduiront de la relation $x+y=0$; cela fournira une infinité de valeurs de, x, y, z, qui satisferont aux équations données. On voit que z *est déterminé*, mais que x *et* y *sont des indéterminées*, liées entre elles par la relation $x+y=0$.

42. Pour *obtenir des formules générales, qui déterminent les valeurs des inconnues, dans tous les systèmes d'équations qui ne diffèrent que par les coefficiens des inconnues*, on représente ces coefficiens par des lettres; et afin de rendre

les résultats *symétriques*, on représente les coefficiens de chaque inconnue, dans les différentes équations, par une même lettre diversement *accentuée*.

43. *Deux équations du premier degré à deux inconnues peuvent toujours se ramener à la forme*

$$(1)\ldots ax+by=c,\quad (2)\ldots a'x+b'y=c',$$

les lettres, a, b, c, a', b' et c', désignant des quantités entières connues, positives ou négatives.

Nous allons indiquer les différentes méthodes dont on peut faire usage pour résoudre ces équations.

1re Méthode. On tire de l'équation (1), $y=\frac{c-ax}{b}$.

La *substitution* de cette expression de y dans (2), donne l'équation à une seule inconnue

$$a'x+\frac{b'}{b}(c-ax)=c';\quad \text{d'où } (3)\ldots x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Pour trouver y, on met la valeur (3) de x dans (1) ou (2), ce qui conduit à,

$$(4)\ldots y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

2e Méthode. On tire de chacune des équations proposées l'expression de y en fonction de x; ce qui donne,

$$(5)\ldots y=\frac{c-ax}{b},\quad (6)\ldots y=\frac{c'-a'x}{b'}.$$

La *comparaison* de ces deux expressions de y, donne

$$\frac{c-ax}{b}=\frac{c'-a'x}{b'}.$$

Cette dernière équation conduit à l'expression (3) de x, laquelle substituée dans (5) ou (6) fournit la valeur (4) de y.

3e Méthode. Pour calculer x, on observe que si l'on pouvait déduire des équations proposées, deux autres équations en x et y, dans lesquelles les coefficiens de y fussent égaux, il suffirait, pour faire disparaître y, de *soustraire* ces deux

nouvelles équations l'une de l'autre; l'équation résultante déterminerait l'inconnue x. Pour obtenir ces nouvelles équations, on multiplie les deux membres de l'équation (1) par b', et ceux de l'équation (2) par b; ce qui donne

$$ab'x + bb'y = cb', \quad ba'x + bb'y = bc'.$$

Retranchant la 2e équation de la 1re, on trouve

$$(ab' - ba')\ x = cb' - bc'.$$

Cette dernière équation fournit la valeur (3) de x.

On opérerait d'une manière semblable pour calculer y.

Ces méthodes ont reçu des noms qui rappellent les procédés dont on fait usage pour *éliminer* l'une des inconnues; la 1re méthode est dite *méthode d'élimination par* SUBSTITUTION, la 2e *par* COMPARAISON et la 3e *par* SOUSTRACTION.

44. *Trois équations du premier degré à trois inconnues peuvent toujours se ramener aux formes suivantes,*

$$(1)\ldots\ ax + by + cz = d,$$
$$(2)\ldots\ a'x + b'y + c'z = d', \quad (3)\ldots a''x + b''y + c''z = d''.$$

1°. *Résolution par* SUBSTITUTION.

On tire de (1) la valeur de z en fonction de x et y; la *substitution* de cette valeur de z dans (2) et (3) conduit à

$$(a'c - ac')\,x + (b'c - bc')\,y = (cd' - c'd),$$
$$(a''c - ac'')\,x + (b''c - bc'')\,y = (cd'' - c''d).$$

Ces deux dernières équations entre x et y, résolues par l'une quelconque des méthodes précédentes, donnent

$$(4)\ldots\ x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$(5)\ldots\ y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

La substitution de ces valeurs de x et y, dans l'une quelconque des équations proposées, conduit à

$$(6)\ldots\ z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

2°. *Résolution par* COMPARAISON.

On tire des équations proposées trois expressions de z en fonction de x et y. On égale successivement la 1re expression à la 2e et à la 3e ; cela fournit deux équations entre x et y, qui conduisent aux valeurs (4), (5), de x et y ; la substitution de ces valeurs, dans l'une quelconque des expressions de z en fonction de x et y, donne la valeur (6) de z.

3°. *Résolution par* SOUSTRACTION.

Pour éliminer z entre les équations (1) et (2), on multiplie tous les termes de la 1re par c', et ceux de la 2e par c, ce qui donne $ac'x + bc'y + cc'z = c'd$, $a'cx + b'cy + cc'z = cd'$.

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, il vient

$$(7)\ldots\ (a'c - ac')x + (b'c - bc')y = cd' - c'd.$$

L'équation (3) se déduisant de l'équation (2) en changeant, a', b', c', d', en, a'', b'', c'', d'', on obtiendra l'équation résultante de l'élimination de z entre (1) et (3), en effectuant ce changement dans (7) ; ce qui donnera

$$(8)\ldots\ (a''c - ac'')x + (b''c - bc'')y = cd'' - c''d.$$

Les équations (7), (8), conduiront aux valeurs (4), (5), de x et y ; ces valeurs, mises dans l'une quelconque des équations proposées, fourniront une équation en z, qui déterminera z.

45. Des calculs analogues aux précédens conduiraient aux expressions générales des inconnues dans quatre équations contenant quatre inconnues ; et ainsi de suite.

1re REMARQUE. On pouvait prévoir que les diverses méthodes que nous venons d'indiquer (nos 43 et 44), conduiraient aux mêmes résultats, car elles reviennent à exprimer que chaque inconnue a la même valeur dans les équations proposées.

2e REMARQUE. Les transformations qu'on fait subir aux équations proposées, pour déterminer les inconnues, n'altérant pas les valeurs de ces inconnues, *on peut remplacer chacune des équations données, par l'une quelconque des équations qui ont été déduites du système proposé.*

Par exemple, dans le n° 44, chacune des équations (1), (2), (3), peut être remplacée par l'une quelconque des équations (4), (5), (6), (7), (8).

46. Nous terminerons en faisant connaître une méthode d'élimination fort élégante, connue sous le nom de *méthode des indéterminées*, à l'aide de laquelle on parvient à *faire disparaître toutes les inconnues excepté une*, en ajoutant à l'une quelconque des équations proposées, les autres équations multipliées respectivement par des *indéterminées*.

1°. Soient les équations, $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$.

On multiplie les deux membres de la 2e équation par une *indéterminée* m, et l'on ajoute l'équation résultante à $ax + by = c$; ce qui donne

$$(a + ma')\ x + (b + mb')\ y = c + mc',$$

Les valeurs de x et y se déduisent de cette dernière équation, en disposant de l'indéterminée m de manière que le coefficient de l'inconnue qu'on veut éliminer se réduise à zéro.

Ainsi, pour trouver x, on fait disparaître y en posant

$$b + mb' = 0; \quad \text{d'où} \quad m = -\frac{b}{b'} \quad \text{et} \quad (a + ma')\ x = c + mc'.$$

Remplaçant m par sa valeur, la dernière équation conduit à l'expression (3) de x (*page* 38).

2°. Soient les trois équations

$$ax + by + cz = d,\ a'x + b'y + c'z = d',\ a''x + b''y + c''z = d''.$$

On ajoute à la 1re les deux autres multipliées respectivement par des indéterminées, m, n, ce qui donne

$$(a + ma' + na'')x + (b + mb' + nb'')y + (c + mc' + nc'')z = d + md' + nd''.$$

Les valeurs de, x, y, z, se déduisent successivement de cette dernière équation, en disposant des indéterminées, m, n, de manière que les coefficiens des deux inconnues qu'on veut éliminer se réduisent à zéro. Ainsi, pour trouver x, on pose

$$b + mb' + nb'' = 0, \quad c + mc' + nc'' = 0.$$

Ces deux équations fournissent les valeurs de m et n qui réduisent les coefficiens de y et z à zéro ; et la substitution de ces valeurs de m et n dans $(a+ma'+na'')\,x=d+md'+nd''$, conduit à l'expression (4) de x (*page* 39).

On opérerait d'une manière semblable, pour résoudre quatre équations contenant quatre inconnues. Et ainsi de suite.

47. Lorsque l'on compare les formules générales qui déterminent les valeurs des inconnues, avec les équations littérales dont elles ont été déduites, on découvre une règle très simple pour parvenir directement à ces formules. En effet :

1°. Si l'on compare dans le n° 43, les formules (3), (4), avec les équations (1), (2), on verra que le *dénominateur commun* $ab'-ba'$ des valeurs de x et y, est composé des coefficiens des inconnues ; pour l'obtenir, il suffit de former les *permutations* (*), ab, ba, du produit ab, d'affecter la 1re du signe $+$, la 2e du signe $-$, et de mettre un *accent* à la 2e lettre de chaque permutation.

Les *numérateurs*, $cb'-bc'$, $ac'-ca'$, des valeurs de x et y, se déduisent du dénominateur $ab'-ba'$, en remplaçant le coefficient de l'inconnue qu'on veut trouver par le terme tout connu.

Ainsi, le numérateur $cb'-bc'$ de x se déduit du dénominateur $ab'-ba'$, en changeant les coefficiens a, a', de x, en c et c'.

2°. La comparaison des formules (4), (5), (6), (page 39), avec les équations

$$ax+by+cz=d,\quad a'x+b'y+c'z=d',\quad a''x+b''y+c''z=d'',$$

fait voir que le *dénominateur commun* des valeurs de x, y, z, est composé des coefficiens des inconnues. Pour obtenir ce dénominateur, on prend les *permutations* $+ab$, $-ba$, dans chacune desquelles on introduit successivement la lettre c, à la 3e place, à la 2e et à la 1re, en ayant soin de donner à chaque première permutation de trois lettres, le signe de la

(*) Les *permutations* d'un produit sont les diverses formes que prend ce produit quand ses facteurs ne font que changer de place.

permutation de deux lettres qui l'a fournie, et de changer alternativement les signes des autres permutations; on réunit ces permutations du produit abc, on met un *accent* à la 2e lettre de chaque permutation et deux accens à la 3e lettre; le résultat

$$(1)\ldots\ ab'c'' - ac'b'' + ea'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$

est le dénominateur commun demandé.

Les *numérateurs* des valeurs de, x, y, z, se déduisent de ce dénominateur, en remplaçant le coefficient de l'inconnue qu'on veut trouver, par le terme tout connu, et en conservant les accens.

Ainsi, pour former le numérateur de x, on remplace dans le dénominateur (1) les coefficiens, a, a', a'', de x, par les termes tout connus, d, d', d''; ce qui donne le numérateur demandé $db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''$.

Remarque. *Pour que cette manière de composer les expressions générales des valeurs des inconnues convienne à n équations du premier degré à n inconnues, il est indispensable de former les permutations des coefficiens des n inconnues, dans l'ordre que nous avons indiqué.* La règle que l'on donnait, pour former les valeurs des inconnues, est en défaut lorsqu'il y a plus de trois équations.

48. *Lorsqu'on a, n équations entre n + m inconnues, il existe une infinité de manières de satisfaire à ces équations;* car en assignant des valeurs arbitraires à m inconnues, il reste n équations qui servent à déterminer les n autres inconnues.

49. Enfin, *lorsqu'on a, n + m équations entre n inconnues, on tire les valeurs des n inconnues, de n quelconques de ces équations; la substitution de ces valeurs dans les m autres équations, conduit à m* équations de condition *entre les coefficiens des inconnues et les termes tout connus; la possibilité du système des équations proposées dépend de l'existence de ces m équations de condition.*

5o. Pour *appliquer les formules des* n°s 43 et 44 *à la résolution d'un système particulier d'équations données*, on ramène d'abord ces équations aux formes $ax + by = c$, $ax + by + cz = d$, etc., dans lesquelles a, b, c, d, etc., représentent des quantités entières; on substitue dans les expressions générales des inconnues les valeurs particulières de a, b, c, d, etc., qui conviennent aux équations données, et l'on obtient ainsi les valeurs des inconnues qui satisfont à ces équations. Discutons les différens cas qui peuvent se présenter.

1°. *Quand le dénominateur commun des expressions générales des inconnues ne se réduit pas à zéro, ces expressions déterminent des valeurs finies des inconnues qui satisfont aux équations données; chaque inconnue n'a qu'une seule valeur*, de sorte que *les équations sont possibles et déterminées.*

Exemple. *Soient les équations*,

$$3x - 2y - z = 1,\quad 2x + 3y - 2z = 4,\quad 7x - 4y - 3z = 1;$$

en les comparant aux équations générales

$$ax + by + cz = d,\quad a'x + b'y + c'z = d',\quad a''x + b''y + c''z = d'',$$

on voit que $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$, $d = 1$, $a' = 2$, etc.

La substitution de ces valeurs de a, b, c, etc., dans les formules (4), (5), (6), (*page* 39), donne $x = 3$, $y = 2$, $z = 4$. Ce qui s'accorde avec le résultat du n° 38.

2°. *Lorsqu'une des formules qui déterminent les expressions générales des inconnues, se présente sous la forme infinie* $\frac{a}{0}$, *les équations proposées sont nécessairement contradictoires.*

Mais, quand l'expression de l'une des inconnues se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, *on ne peut pas généralement en conclure que les équations proposées admettent une infinité de solutions;* car certaines inconnues peuvent être déterminées, et quelquefois même les équations n'admettent aucunes valeurs finies des inconnues; dans ce cas, on ne saurait géné-

ralement prononcer sur la nature des équations proposées, qu'après avoir opéré directement sur ces équations, comme il a été indiqué (n° 41).

1er EXEMPLE. *Soient*, $x+2y=5$, $3x+6y=2$.

Les formules générales (3), (4), (*page* 38), donnant

$x=\frac{26}{0}=\infty, y=\frac{-13}{0}=-\infty$, on est certain que *les équations proposées sont contradictoires;* ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu (n° 41, 1°).

2e EXEMPLE. *Soient*, $6x+3y=3$, $4x+2y=2$.

On a, $a=6$, $b=3$, $c=3$, $a'=4$, $b'=2$, $c'=2$, et les expressions générales (3), (4), (*page* 38), des inconnues, x, y, prennent simultanément la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On a vu (n° 41, 2°) que, dans ce cas, *les équations proposées admettent une infinité de valeurs arbitraires de x et de y qui ne sont assujetties qu'à la condition* $6x+3y=3$.

3e EXEMPLE. *Soient les trois équations,*

$$x+y+z=1, \quad x+y+2z=2, \quad 2x+2y+2z=2.$$

Les formules générales (4), (5), (6), (*page* 39), donnent pour x, y, z, des valeurs indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$; et cependant, on a vu (n° 41, 3°) que *z n'a que la seule valeur* $z=1$, *tandis que x et y ont une infinité de valeurs arbitraires qui ne sont assujetties qu'à la condition* $x+y=0$.

4e EXEMPLE. *Soient les trois équations,*

$$x+y+2z=2, \quad x+y+2z=1, \quad x+y+2z=-1.$$

Les formules générales (4), (5), (6), (*page* 39), donnent pour x, y, z, des valeurs indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$; et cependant *les équations proposées sont évidemment contradictoires.*

5e Exemple. *Soient les trois équations,*

$$x+y+z=3, \quad x-y-z=1, \quad 2x+2y+2z=1.$$

Les formules générales (4), (5), (6), (*page* 39), donnant

$$x=\frac{0}{0}, \quad y=\frac{10}{0}=\infty, \quad z=\frac{-10}{0}=-\infty,$$

on est certain que *les équations proposées sont contradictoires.*

§ III. *Des inégalités.*

51. La relation $a>b$ est une *inégalité* qui exprime que a est *plus grand* que b (page 2); le *premier membre* est a et le *second membre* est b.

Nous supposerons toujours qu'on a égard aux *valeurs relatives* des quantités (n° 6); c'est-à-dire que les quantités positives étant plus grandes que zéro, les quantités négatives seront considérées comme plus petites que zéro, et comme d'autant plus petites que leurs valeurs absolues seront plus grandes.

D'après cette convention, si a et b désignant des quantités quelconques, positives ou négatives, on a $a>b$, la différence $a-b$ sera nécessairement positive; et réciproquement, si $a-b$ est positif, a sera plus grand que b.

Les inégalités $a>b$, $a-b>0$, *seront donc toujours deux conditions équivalentes.* Cela posé :

1°. *On n'altère pas une inégalité en augmentant ou en diminuant ses deux membres d'une même quantité.* En effet, soit $a>b$; la différence entre deux quantités ne changeant pas lorsqu'on les augmente ou lorsqu'on les diminue d'une même quantité, et l'inégalité $a>b$ donnant $a-b>0$, on a

$$(a+c)-(b+c)>0, \quad (a-c)-(b-c)>0,$$

et ces deux dernières inégalités reviennent à

$$a+c>b+c, \quad a-c>b-c.$$

2°. *On peut faire passer un terme d'un membre dans*

l'autre en écrivant ce terme dans cet autre membre avec un signe contraire à celui dont il était affecté ; car d'après (1°),

$a - b > c$ donne $a - b + b > c + b$, ou $a > c + b$,
et $a + b > c$ donne $a + b - b > c - b$, ou $a > c - b$.

3°. *On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par une quantité positive quelconque* δ.

Il s'agit de prouver que l'inégalité $a > b$ donne...
$a\delta > b\delta$ et $\frac{a}{\delta} > \frac{b}{\delta}$.

Or, $a - b$ et δ étant positifs, le produit et le quotient de $a - b$ par δ seront positifs ; on aura donc

$(a - b)\delta > 0$, $\frac{a-b}{\delta} > 0$, ou $a\delta - b\delta > 0$, $\frac{a}{\delta} - \frac{b}{\delta} > 0$,

et ces deux dernières inégalités reviennent à

$$a\delta > b\delta, \quad \frac{a}{\delta} > \frac{b}{\delta}.$$

4°. *Quand on multiplie ou quand on divise les deux membres d'une inégalité par une quantité négative quelconque* δ, *il faut* RENVERSER *le signe d'inégalité.* En effet, soit

$$a > b, \quad \text{on aura} \quad a - b > 0.$$

Or, $a - b$ étant positif et δ étant supposé négatif, le produit et le quotient de $a - b$ par δ seront négatifs ; on aura donc

$(a - b)\delta < 0$, $\frac{a-b}{\delta} < 0$, ou $a\delta - b\delta < 0$, $\frac{a}{\delta} - \frac{b}{\delta} < 0$;

donc $$a\delta < b\delta \quad \text{et} \quad \frac{a}{\delta} < \frac{b}{\delta}.$$

5°. *Lorsqu'on change les signes des termes d'une inégalité, il faut* RENVERSER *le signe d'inégalité, c'est-à-dire changer* $>$ *en* $<$ *ou* $<$ *en* $>$; car cela revient à multiplier les deux membres par -1.

6°. *Les inégalités* $a > b$, $a' > b'$, $a'' > b''$,...
donnent $a + a' + a'' + \ldots > b + b' + b'' + \ldots$

quels que soient les signes de a, b, a', b', a'', b'', ...; car les différences $a-b$, $a'-b'$, $a''-b''$, ..., étant positives, leur somme $(a+a'+a''+\ldots)-(b+b'+b''+\ldots)$ est nécessairement positive, et par suite on a, $a+a'+a''\ldots>b+b'+b''\ldots$

7°. *Quand toutes les quantités a, b, a', b', a'', b'',..., sont positives, les inégalités $a>b$, $a'>b'$, $a''>b''$,..., donnent nécessairement $aa'a''\ldots>bb'b''\ldots$.* Car chacune des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ..., étant alors positive et plus grande que l'unité, leur produit $\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots}$ est positif et plus grand que l'unité; de sorte qu'on a, $aa'a''\ldots>bb'b''\ldots$.

Remarque. Quand a, b et m sont positifs, l'inégalité $a>b$ donne $a^m>b^m$.

8°. *Lorsqu'une quantité x est comprise entre deux nombres α, ζ, la différence entre x et l'un quelconque des nombres α, ζ, est moindre que la différence entre α et ζ*; car, d'après (1°) et (2°), les inégalités $x<\zeta$, $x>\alpha$, donnent

$$x-\alpha<\zeta-\alpha,\quad -\alpha>-x,\quad \zeta-\alpha>\zeta-x.$$

9°. *Quand deux quantités α, ζ, sont comprises entre deux autres quantités γ, δ, la différence des deux premières quantités est moindre que la différence des deux autres;* car les inégalités $\alpha>\gamma$, $\zeta>\alpha$, $\delta>\zeta$, donnent

$$\zeta-\alpha<\zeta-\gamma,\ \zeta-\gamma<\delta-\gamma;\ \text{d'où}\ \zeta-\alpha<\delta-\gamma.$$

10°. *Lorsque les dénominateurs de plusieurs fractions étant positifs, les numérateurs ont des signes quelconques, la somme des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs donne un quotient qui est compris entre la plus petite et la plus grande de ces fractions.* En effet, soient des fractions de cette espèce, $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ..., $\frac{A}{B}$, classées par ordre de grandeur, de sorte que la plus petite étant $\frac{a}{b}$, la plus grande soit $\frac{A}{B}$; en posant $\frac{a}{b}=q$, $\frac{A}{B}=Q$, on aura

$a = bq$, $a' > b'q$, $a'' > b''q$, ..., $A > Bq$,
$a < bQ$, $a' < b'Q$, $a'' < b''Q$, ..., $A = BQ$; d'où

$$a + a' + a'' + \ldots + A > (b + b' + b'' + \ldots + B)q,$$
$$a + a' + a'' + \ldots + A < (b + b' + b'' + \ldots + B)Q.$$

Ces deux dernières inégalités donnent

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots + A}{b + b' + b'' + \ldots + B} > q, \quad \frac{a + a' + a'' + \ldots + A}{b + b' + b'' + \ldots + B} < Q.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

52. *Toute inégalité du premier degré, qui ne renferme qu'une seule inconnue, conduit à une* LIMITE *de cette inconnue.*

Par exemple, soit l'inégalité (1)... $7x - \frac{23}{3} > \frac{2}{3}x + 5$.

La multiplication de ses deux membres par 3 conduit à

$$21x - 23 > 2x + 15 ; \quad \text{on en déduit}$$
$$21x - 2x > 15 + 23, \quad 19x > 38, \quad x > 2.$$

On ne peut donc donner à l'indéterminée x que des valeurs arbitraires plus grandes que 2. On dit, par ce motif, que le nombre 2 est la *limite inférieure* de la *variable* x.

On verra d'une manière semblable que l'inégalité

$$(2)... \quad 7x - \frac{23}{3} < \frac{124}{3} \quad \text{donne} \quad x < 7.$$

De sorte que la *limite supérieure* de x est $+7$. Ainsi, on satisfera à la condition (2) en donnant à x des valeurs positives quelconques moindres que 7, et des valeurs négatives arbitraires.

Si l'inconnue x devait satisfaire aux deux inégalités (1), (2), on ne pourrait donner à x que des valeurs arbitraires positives comprises entre 2 et 7.

Enfin, le système $7x - \frac{23}{3} < \frac{2}{3}x + 5$, $7x - \frac{23}{3} > \frac{124}{3}$,

n'admet aucunes valeurs de x, car il conduit aux inégalités contradictoires $x < 2$, $x > 7$.

§ IV. *Analyse indéterminée du premier degré.*

53. Lorsque le nombre des inconnues surpasse celui des équations, ces dernières admettent une infinité de solutions (n° 48). Mais, quelquefois, la nature du problème ne permettant d'admettre pour les inconnues que des nombres entiers, nous allons faire voir comment on obtient ces *valeurs entières* des inconnues; elles forment ce qu'on nomme des *solutions entières* des équations proposées.

54. Pour *trouver les solutions entières d'une équation du premier degré à deux inconnues* x, y, on ramène d'abord cette équation à la forme $Ax + By = C$, de manière que A, B et C, soient des nombres entiers positifs ou négatifs. On cherche le plus grand diviseur commun à ces trois nombres, et en les divisant par ce commun diviseur, on obtient des quotiens, a, b, c; la question se trouve ainsi réduite à *trouver les solutions entières de l'équation* (1) ... $ax + by = c$, *dans laquelle aucun nombre entier ne saurait diviser à la fois les trois nombres entiers*, a, b, c.

55. 1re Propriété. *Quand les coefficiens*, a, b, *des inconnues ont un facteur commun* δ, *l'équation* (1) *n'admet aucune solution entière;* car x et y devant être des nombres entiers, le 1er membre $ax + by$ est divisible par δ; le 2e membre c devrait donc être divisible par δ, ce qui est impossible, puisque, a, b et c n'admettent aucun diviseur commun.

56. 2e Propriété. *Lorsque les coefficiens*, a, b, *des inconnues n'ont pas de facteur commun, l'équation* (1) *admet toujours une infinité de solutions entières.* En effet :

1°. Quand le coefficient de l'une des inconnues est égal à l'unité, chaque valeur entière arbitraire de l'autre inconnue donnant une solution entière de l'équation proposée, cette équation admet une infinité de valeurs entières de x et y.

2°. Quand aucun des coefficiens, a, b, n'est égal à l'unité,

on ramène ce cas au précédent, en faisant dépendre la résolution de l'équation (1), de celle d'une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues est égal à l'unité.

A cet effet, on résout l'équation (1) par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient.

Soit $b < a$; on a, $by = c - ax$, $y = \frac{c - ax}{b}$.

On pourrait extraire les entiers contenus dans cette expression de y, en divisant c et a par b; mais comme le but de ces divisions est de réduire le coefficient d'une inconnue à l'unité, il suffit d'effectuer la division sur le coefficient a de x.

Divisant donc a par b, on obtient un quotient entier q et un reste $r < b$; on a

$$a = bq + r, \quad y = \frac{c - (bq + r)x}{b} = -qx + \frac{c - rx}{b}.$$

Or, x doit être entier; par conséquent, pour que y le soit, il faut et il suffit que $\frac{c - rx}{b}$ soit un nombre entier quelconque e.

On a donc, $y = -qx + e$, $c - rx = be$; d'où $rx = c - be$.

Quand le reste r est égal à l'unité, on a

$$x = c - be, \quad y = -qx + e.$$

Chaque valeur entière arbitraire de l'indéterminée e, substituée dans l'expression $c - be$ de x, fournit une valeur entière correspondante α de x; ces valeurs entières de e et de x, substituées dans l'expression $-qx + e$ de y, déterminent une valeur entière correspondante ζ de y; de sorte que le système $x = \alpha$, $y = \zeta$, donne une solution entière de l'équation (1). On trouvera de cette manière les diverses solutions entières de l'équation (1).

Quand le reste r n'est pas égal à l'unité, on fait sur l'équation $rx = c - be$, des opérations analogues à celles qui ont été effectuées sur l'équation $by = c - ax$. La division de b par r fournit un quotient entier q' et un reste $r' < r$; on a

$$b = rq' + r', \quad x = \frac{e - (rq' + r')e}{r} = -q'e + \frac{c - r'e}{r}.$$

Or, e est entier ; par conséquent, pour que x le soit, il faut et il suffit que $\frac{c-r'e}{r}$ soit un nombre entier quelconque e'.

On a donc $x=-q'e+e'$, et $r'e=c-re'$.

Lorsque le reste r' est égal à l'unité, les relations

$$e=c-re'\,;\quad x=-q'e+e',\quad y=-qx+e,$$

fournissent une infinité de solutions entières de l'équation (1) ; car chaque valeur entière arbitraire de e', conduit à une valeur entière correspondante de chacune des inconnues, e, x, y.

Quand le reste r' n'est pas égal à l'unité, on soumet l'équation $r'e=c-re'$, à des transformations analogues aux précédentes. Mais, sans pousser plus loin les calculs, on peut observer que dans les équations $rx=c-be$, $r'e=c-re'$, etc., les coefficiens, r, r', etc., des indéterminées, x, e, etc., sont les restes successifs, r, r', etc., qu'on obtiendrait en cherchant le plus grand commun diviseur de a et b. Or, a et b sont premiers entre eux ; on arrivera donc nécessairement à un reste égal à l'unité qui, comme tous les précédens, servira de coefficient à une indéterminée ; cette indéterminée sera une fonction entière de la dernière indéterminée dont chaque valeur entière arbitraire fournira une solution entière de l'équation (1) ; cette équation admet donc une infinité de solutions entières.

Si b était plus grand que a, on résoudrait l'équation (1) par rapport à x, et l'on prouverait par des transformations semblables aux précédentes ; que cette équation admet encore une infinité de solutions entières.

Exemple. *Soit l'équation* $\frac{7}{3}x+\frac{7}{5}y=\frac{343}{15}$.

On fait d'abord disparaître les dénominateurs, ce qui donne $35x+21y=343$. Divisant 35, 21 et 343, par leur plus grand commun diviseur 7, il vient (2)... $5x+3y=49$.

Les coefficiens 5 et 3 étant premiers entre eux, cette équation admet une infinité de solutions entières. Si l'on applique

la méthode générale à l'équation (2), on sera conduit au calcul suivant :

$$y=\frac{49-5x}{3}=-x+\frac{49-2x}{3}=-x+e,$$

$$49-2x=3e,\quad x=\frac{49-3e}{2}=-e+\frac{49-e}{2}=-e+e',$$

$$49-e=2e',\quad e=49-2e'.$$

Pour chaque valeur entière arbitraire de l'indéterminée e', les relations, $e=49-2e'$, $x=-e+e'$, $y=-x+e$, fourniront des valeurs entières correspondantes des inconnues e, x, y.

On obtient plus facilement les solutions entières de l'équation proposée en exprimant d'abord x et y en fonction de e'; à cet effet, on remplace e par sa valeur $49-2e'$, et les relations $x=-e+e'$, $y=-x+e$, donnent

$$(3)\ \ldots\ x=3e'-49,\quad y=98-5e'.$$

Les expressions (3) de x et y satisfont à l'équation donnée (2) ... $5x+3y=49$, quelle que soit e'; car elles réduisent cette équation à l'identité, $15e'-15e'+49=49$.

Toutes les solutions entières de l'équation (2) *se déduiront donc des formules* (3), *en donnant à l'indéterminée e' les valeurs* 0, 1, 2, 3, *etc.*, -1, -2, -3, *etc.*

Si l'on ne veut admettre que des nombres entiers positifs pour x et y, il faudra que $3e'>49$, $5e'<98$;

donc $e'>\frac{49}{3}$, $e'<\frac{98}{5}$; d'où $e'>16\frac{1}{3}$, $e'<19\frac{3}{5}$.

On ne pourra donc donner à e' que les valeurs 17, 18 et 19; ce qui fournira les trois solutions entières positives

$$x=2,\ y=13\quad\|\quad x=5,\ y=8\quad\|\quad x=8,\ y=3.$$

1re Remarque. On peut parvenir plus simplement à des formules qui donnent toutes les solutions entières de l'équation (2) ... $5x+3y=49$, en préparant le numérateur de la valeur $\frac{49-5x}{3}$ de y, de manière à en extraire le plus grand nombre

d'entiers possible ; à cet effet, on décompose chaque terme du numérateur en deux parties telles que, l'une étant divisible par le dénominateur 3, l'autre soit moindre que la moitié de ce dénominateur. Ainsi, on remplace 49 par $48+1$, et $-5x$ par $-6x+x$, ce qui donne

$$y=\frac{48-6x+x+1}{3}=16-2x+\frac{x+1}{3}.$$

On fait, $x+1=3e$, d'où $x=3e-1$, et

$$y=16-2x+e=16-2(3e-1)+e=18-5e.$$

Pour chaque valeur entière arbitraire de l'indéterminée e, les formules (4) ... $x=3e-1$, $y=18-5e$, fournissent une solution entière de l'équation (2).

2e Remarque. Toutes les solutions entières de l'équation (2) pouvant se déduire de l'une quelconque des formules (3), (4), ces formules doivent rentrer l'une dans l'autre ; et en effet, si l'on égale entre elles les deux expressions, $3e'-49$, $3e-1$, de x, on trouvera $e'=e+16$; et la substitution de cette valeur de e' dans (3) conduira aux formules (4).

57. 3e Propriété. *Quand on connaît une solution entière* $x=\alpha$, $y=\zeta$, *de l'équation* (1) ... $ax+by=c$, *on peut en déduire immédiatement toutes les autres solutions entières de cette équation.* En effet, puisque $x=\alpha$, $y=\zeta$, satisfait à l'équation (1), on a $a\alpha+b\zeta=c$; d'où

$$ax+by=a\alpha+b\zeta \text{ et (2) } \ldots y-\zeta=-\frac{a(x-\alpha)}{b}.$$

Pour que y soit entier, il faut et il suffit que b divise le produit $a(x-\alpha)$. Or, a et b sont premiers entre eux ; b doit donc diviser le facteur $x-\alpha$. Désignant le quotient par e, on aura $x-\alpha=be$, et (2) donnera $y-\zeta=-ae$; d'où

$$(3) \ldots x=\alpha+be,\quad y=\zeta-ae.$$

Les valeurs (3) de x et y satisfont à l'équation (1) quel que soit e ; car, en les substituant dans (1), on parvient à la relation $a\alpha+b\zeta=c$, qui a lieu par hypothèse.

Lors donc que l'on connaîtra α et γ, toutes les solutions entières de l'équation (1) se déduiront des formules (3), en donnant à l'indéterminée e les valeurs, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc.

REMARQUE. Si l'on veut classer les valeurs successives de x et y par ordre de grandeur, on donnera successivement à l'indéterminée e les valeurs

$$\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

qui vont en croissant d'une unité. Les valeurs correspondantes de x et y, déduites de (3), seront

$$\ldots, \alpha - 3b, \alpha - 2b, \alpha - b, \alpha, \alpha + b, \alpha + 2b, \alpha + 3b, \ldots$$
$$\ldots, \gamma + 3a, \gamma + 2a, \gamma + a, \gamma, \gamma - a, \gamma - 2a, \gamma - 3a, \ldots$$

On voit que *les valeurs entières successives de x forment une progression arithmétique dont la raison est le coefficient de y, et les valeurs entières correspondantes de y forment une progression arithmétique dont la raison est le coefficient de x pris avec un signe contraire à celui qu'il a dans l'équation* (1).

58. 4e PROPRIÉTÉ. *Le nombre des solutions entières positives de l'équation $ax \pm by = \pm c$, dépend des signes des coefficiens des inconnues, x, y.* En effet :

1°. L'équation $ax + by = c$, ne peut admettre qu'un nombre limité de solutions entières positives; car la somme des nombres positifs, ax, by, devant être égale à la constante c, les parties de cette somme ne sauraient croître indéfiniment.

2°. Chacune des équations, $ax - by = c$, $ax - by = -c$, peut admettre une infinité de solutions entières positives; car les nombres, ax, by, croissant indéfiniment, on conçoit que leur différence peut conserver la même valeur c.

3°. Enfin, lorsque, a, b, c, sont positifs, l'équation $ax + by = -c$ n'admet aucune solution positive.

59. La manière de *trouver les solutions entières de m équations du premier degré entre $m + n$ inconnues*, peut se déduire de ce qui précède.

1er EXEMPLE. *Trouver les solutions entières du système*

$$(1)\ldots\ 4x - 2y + 5z = 13, \quad -3x + 7y + 5z = 10.$$

On élimine z en retranchant la 2e équation de la 1re, ce qui donne $7x-9y=3$; et l'on trouve que les solutions entières de cette dernière équation sont fournies par les formules

$$y=7e+2, \quad x=9e+3,$$

dans lesquelles e représente un nombre entier arbitraire.

En substituant ces valeurs de x et y dans l'une quelconque des équations (1), on trouve

$$5z+22e=5; \text{ d'où } z=1-\frac{22e}{5}.$$

Pour que z soit entier, il faut et il suffit que $22e$ soit divisible par 5; ce qui exige que le quotient de e par 5 soit un nombre entier quelconque e'. On en déduit,

$$z=1-22e', \quad y=2+35e', \quad x=3\,(1+15e').$$

Ces valeurs de x, y, z, satisfont aux équations (1) quel que soit e', car elles rendent ces équations identiques.

On obtiendra les diverses solutions entières des équations (1) en donnant à e', les valeurs, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc.

L'hypothèse $e'=0$, donne $z=1$, $y=2$, $x=3$.

Il n'existe pas d'autre solution entière positive.

2e Exemple. *Trouver les solutions entières du système*

(2)... $x+y+z+t=100$, $20x+10y+4z+t=200$.

L'élimination de t donne $19x+9y+3z=100$; d'où

$$z=\frac{100-19x-9y}{3}=33-6x-3y+\frac{1-x}{3}.$$

x et y étant des nombres entiers, pour que cette expression de z soit entière, il faut et il suffit que le quotient de $1-x$ par 3 soit un nombre entier quelconque e. Donc,

$$1-x=3e; \text{ d'où } x=1-3e, \quad z=27+19e-3y.$$

Ces valeurs de x et z substituées dans l'une quelconque des équations (2) donnent, $t=72+2y-16e$; et les expressions

$$x=1-3e, \quad z=27+19e-3y, \quad t=72+2y-16e,$$

des inconnues x, z, t, satisfaisant aux équations (2) quels que soient y et e, on en déduira toutes les solutions entières de ces équations en donnant aux indéterminées, y, e, les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc.

§ V. *Problèmes du premier degré.*

60. *On obtient les équations qui servent à déterminer les valeurs des inconnues d'un problème, en indiquant, à l'aide des signes algébriques, les opérations qu'il faudrait exécuter sur les quantités inconnues (dans le cas où ces dernières seraient connues), si l'on voulait s'assurer qu'elles satisfont aux diverses conditions du problème.*

1er Problème. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : mon âge est le triple de celui de mon fils, et il y a dix ans il en était le quintuple. On demande l'âge du fils.*

Si l'âge actuel du fils est x ans, celui du père est $3x$ ans; il y a 10 ans, le père avait $3x - 10$ ans, et le fils $x - 10$ ans; mais à cette époque, l'âge du père était égal au quintuple de l'âge du fils. On a donc, $3x - 10 = 5(x - 10)$, d'où $x = 20$.

Par conséquent, le fils a 20 ans, et le père 60 ans; il y a dix ans, le fils avait 10 ans et le père 50 ans; l'âge du père était donc le quintuple de celui du fils.

2e Problème. *On a des pièces de 2 francs et de 5 francs; il s'agit de payer 26 francs avec dix de ces pièces.*

Si l'on donne x pièces de 2 francs et y pièces de 5 francs, la valeur de ces $x + y$ pièces sera x fois 2^f plus y fois 5^f, ou $2x + 5y$ francs. Or, le nombre total de ces pièces doit être 10, et elles doivent valoir 26 francs. On a donc,

$$x + y = 10, \quad 2x + 5y = 26; \quad \text{d'où} \quad x = 8 \text{ et } y = 2.$$

Par conséquent, pour payer les 26 francs, il suffit de donner 8 pièces de 2 francs et 2 pièces de 5 francs.

3e Problème. *Connaissant la somme, a, et la différence, b, de deux nombres, trouver ces deux nombres.*

Si l'on représente par x et y, les deux nombres cherchés, on aura (1)... $x + y = a$, (2)... $x - y = b$.

On obtiendrait les valeurs de x et y, par l'une quelconque des méthodes du n° 43. Mais on peut parvenir plus simplement à ces valeurs; car en ajoutant les équations (1), (2), membre à membre, on trouve $2x = a + b$, et en retranchant l'équation (2) de l'équation (1), il vient $2y = a - b$. On en déduit $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

Ces expressions de x et y nous font voir que *lorsqu'on connaît la somme et la différence de deux nombres, le plus grand de ces nombres peut s'obtenir en ajoutant la demi-somme à la demi-différence, et que l'on trouve le plus petit nombre en retranchant la demi-différence de la demi-somme.*

4e Problème. *Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Chaque joueur ayant perdu une partie, dans l'ordre indiqué par le rang des joueurs, il reste 24f au 1er joueur, 28f au 2e, et 14f au 3e joueur. Combien chaque joueur avait-il d'argent en se mettant au jeu?*

Désignons par x, y et z, francs, les sommes avec lesquelles ces joueurs entrent au jeu.

Le 1er joueur ayant perdu la 1re partie, donne y francs au 2e joueur et z francs au 3e; il ne lui reste donc que $x - y - z$ francs. Ainsi, à la fin de la 1re partie, le premier joueur a $x - y - z$ francs; le 2e a $2y$ francs, et le 3e a $2z$ francs.

On trouvera de même qu'à la fin de la 2e partie, le 1er joueur a $2(x - y - z)$ francs, le 2e a $3y - x - z$ francs, le 3e a $4z$ francs; et qu'après la 3e partie, le 1er joueur a $4(x - y - z)$ francs, le 2e a $2(3y - x - z)$ francs, et le 3e a $7z - x - y$ francs.

Les équations du problème sont donc

$$4(x - y - z) = 24,\quad 2(3y - x - z) = 28,\quad 7z - x - y = 14;$$

elles se réduisent à

$$(1)\ldots x - (y + z) = 6,\quad 3y - (x + z) = 14,\quad 7z - (x + y) = 14.$$

On en déduit, $x = 36$, $y = 20$, $z = 10$.

On peut simplifier les calculs en observant que l'argent to-

tal des joueurs devant rester constamment le même, on a

$$x+y+z=24+28+14=66\,;\quad \text{d'où}$$

$$y+z=66-x,\quad x+z=66-y,\quad x+y=66-z.$$

Ces trois relations réduisent les équations (1) à

$$x-(66-x)=6,\quad 3y-(66-y)=14,\quad 7z-(66-z)=14\,;$$

et l'on tire de ces dernières, $x=36$, $y=20$, $z=10$.

61. *Les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations d'un problème, ne conviennent pas toujours à la question proposée;* cela tient à ce qu'il existe des problèmes dans lesquels les inconnues doivent satisfaire à certaines *conditions particulières* qui ne sont pas susceptibles d'être exprimées dans des équations; alors, les valeurs des inconnues, n'étant assujetties qu'aux conditions exprimées par les équations, peuvent ne pas satisfaire aux autres conditions du problème. En voici des exemples :

1er Problème. *Quel nombre x doit-on* AJOUTER *à 7, pour obtenir* 5? On a, $7+x=5$; d'où $x=-2$.

Sous le rapport de l'Algèbre, cette *valeur négative* de x satisfait à la question, car en ajoutant -2 à 7, la *somme algébrique* est 5 (n° 3). Mais, quand il s'agit d'une addition arithmétique, le problème est absurde.

La valeur négative de x indique comment il faut modifier l'énoncé, pour rendre la question arithmétiquement possible; car en changeant le signe de x dans $7+x=5$, l'équation résultante $7-x=5$, donne $x=2$, et l'équation $7-x=5$ correspond à cet énoncé :

Quel nombre x doit-on SOUSTRAIRE *de 7 pour obtenir 5?*

La *solution arithmétique* de ce dernier problème est $x=2$.

En général, *les valeurs négatives des inconnues indiquent toujours que la question proposée n'est pas* ARITHMÉTIQUEMENT *possible, c'est-à-dire, qu'elle ne saurait être résolue dans le sens exact de son énoncé.*

2e Problème. *Composer un alliage d'or et d'argent qui pèse* a *grammes, de manière que le prix d'un gramme d'alliage*

soit ζ *francs. Les prix respectifs d'un gramme d'or et d'argent sont* γ *et* δ *francs. Combien faut-il prendre de grammes de chaque métal pour former l'alliage demandé?*

En désignant par x et y les nombres de grammes demandés, on aura, $x+y=\alpha$, $\gamma x+\delta y=\alpha\zeta$; d'où

$$(1)\ldots\ x=\frac{(\zeta-\delta)\alpha}{\gamma-\delta},\quad y=\frac{(\gamma-\zeta)\alpha}{\gamma-\delta}.$$

Pour *discuter ces formules,* nous observerons d'abord que, le prix de l'or étant supérieur à celui de l'argent, le dénominateur commun $\gamma-\delta$ est nécessairement positif. Cela posé :

1°. *Lorsque les valeurs* (1) *de* x *et* y *sont positives, le problème admet toujours une solution;* car le prix ζ francs d'un gramme du mélange cherché étant alors compris entre les prix, γ, δ, francs, d'un gramme d'or et d'argent, on conçoit qu'il est toujours possible de former l'alliage demandé.

2°. *Quand l'expression de l'une des inconnues devient négative, le problème ne saurait admettre aucune solution;* car le prix d'un gramme de l'alliage demandé devient moindre que le prix d'un gramme d'argent, ou plus grand que le prix d'un gramme d'or; ce qui est absurde.

3e Problème. *Deux courriers partent au même instant et marchent dans la même direction; le* 1er *a* d *lieues d'avance sur le* 2e *et parcourt* v' *lieues par heure; le* 2e *fait* v'' *lieues par heure. On demande dans combien d'heures les courriers se rencontreront, et quels seront les espaces qu'ils auront parcourus.* On suppose que les *vitesses,* v', v'', des courriers sont *constantes,* c'est-à-dire que les espaces qu'ils parcourent sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.

Si l'on désigne par x heures le temps pendant lequel les courriers doivent marcher pour se rencontrer, et par d' et d'' lieues les distances des points de départ du 1er et du 2e courrier au point de rencontre, les espaces parcourus en x heures seront $v'x$ et $v''x$ lieues; de sorte qu'on aura, $d'=v'x$, $d''=v''x$.

Or, quand le 2e courrier atteint le 1er, l'espace qu'il a parcouru est égal à l'espace parcouru par le 1er courrier, augmenté

de la distance dont il était en arrière. Donc, $v''x = v'x + d$.

Les équations, $v''x = v'x + d$, $d' = v'x$, $d'' = v''x$, donnent

$$(1)\ldots x = \frac{d}{v''-v'},\quad d' = \frac{v'd}{v''-v'},\quad d'' = \frac{v''d}{v''-v'}.$$

Les formules (1) résolvent le problème ; car elles déterminent les inconnues, x, d', d'', en fonction des *données*, v', v'', d.

Nous allons faire voir que les conséquences que l'on peut tirer des formules (1) sont toujours d'accord avec celles qui se déduisent immédiatement de l'énoncé du problème.

Supposons que, d et v'' ne changeant pas, v' varie.

1°. Soit $v'' > v'$. Les expressions (1) des inconnues, x, d', d'', sont positives et finies ; ce qui exprime que les courriers se rencontreront en marchant dans le sens indiqué par l'énoncé de la question. Et en effet, pour que les courriers qui marchent dans le même sens, se rencontrent, il faut et il suffit que la vitesse v'' du courrier qui est en arrière soit plus grande que la vitesse v' du courrier qui est en avant.

Quand v' augmente et s'approche indéfiniment de v'', sans dépasser v'', les valeurs (1) des inconnues x, d', d'', restent positives et augmentent indéfiniment ; ce qui exprime que, plus le 1er courrier marche vite, plus il faut de temps au 2e courrier pour l'atteindre, et plus le point de rencontre est éloigné des points de départ. Cette conclusion est celle qu'on déduirait de l'énoncé du problème, dans l'hypothèse actuelle.

2°. Si $v'' = v'$, les valeurs (1) de, x, d', d'', deviennent infinies. La valeur infinie de x exprime que les courriers ne pourraient se rencontrer qu'après avoir marché pendant un temps infiniment grand ; ce temps ne pouvant jamais finir, l'Algèbre indique ainsi que les courriers ne se rencontreront jamais ; et les valeurs infinies des distances, d', d'', indiquent que le point de rencontre des courriers a disparu en s'éloignant à l'infini des points de départ.

3°. Soient $v'' = v'$ et $d = 0$. Les valeurs (1) de x, d', d'', se

présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Ces valeurs sont *indéterminées;* car elles dépendent des équations,

$$(v''-v')\,x=d,\quad (v''-v')\,d'=dv',\quad (v''-v')\,d''=dv'',$$

qui sont vraies quels que soient x, d' et d'', puisque $v''-v'$ et d étant nuls, chaque équation se réduit à $0=0$.

L'Algèbre indique donc que, lorsque les courriers marchent également vite et partent en même temps d'un même point pour suivre la même route, le nombre d'heures après lequel ils se rencontrent reste arbitraire, ainsi que les distances du point de départ au point de rencontre; c'est-à-dire que *les courriers restent toujours ensemble.* Ce qui est d'ailleurs évident.

4°. Soit $v''<v'$; les valeurs (1) des inconnues deviennent négatives. La valeur négative de x indique que les courriers ne sauraient se rencontrer en marchant dans le sens indiqué.

Les valeurs négatives des distances, d', d'', expriment que les courriers se rencontreraient, s'ils marchaient dans un sens contraire à celui qu'on avait supposé; car alors, le 2e courrier serait en avant du 1er, les courriers marcheraient dans le même sens, et celui qui est en arrière, marchant le plus vite, atteindrait nécessairement l'autre.

Si l'on résout le problème dans cette nouvelle hypothèse, on trouvera,

$$(2)\ldots,\quad x=\frac{d}{v'-v''},\quad d'=\frac{v'd}{v'-v''},\quad d''=\frac{v''d}{v'-v''};$$

et comme $v''<v'$, ces valeurs de, x, d', d'', sont positives.

1re Remarque. La seule différence qui existe entre les problèmes qui ont conduit aux formules (1) et (2), est que les espaces v', v'', d', d'', sont parcourus dans des sens opposés; et il est facile de voir que, pour déduire les formules (2) des formules (1) (*page* 61), il suffit de changer les signes des quantités, v', v'', d', d'', qui prennent des acceptions opposées.

2e Remarque. Lorsqu'on modifie l'énoncé du problème pro-

posé (*page* 60), en supposant que le 1er courrier, au lieu de marcher dans le sens du 2e, marche en sens contraire, les courriers viennent l'un vers l'autre ; les quantités v', d', qui exprimaient des espaces parcourus par le 1er courrier marchant dans le sens du 2e, prennent des acceptions opposées, car elles désignent des espaces parcourus par le 1er courrier marchant en sens contraire du 2e. Si l'on résout le problème, dans cette nouvelle hypothèse, on trouvera

$$(3)\ldots x = \frac{d}{v'' + v'},\quad d' = \frac{v'd}{v'' + v'},\quad d'' = \frac{v''d}{v'' + v'}.$$

Pour déduire les formules (3) des formules (1), (*page* 61), il n'y a qu'à changer dans (1) les signes des quantités, d', v', qui prennent des acceptions opposées.

En général, *lorsque les quantités connues sont représentées par des lettres, les formules qui expriment les valeurs des inconnues jouissent de cette propriété, que pour en déduire les solutions des questions qui ne différeraient du problème primitif qu'en ce que certaines données recevraient des acceptions opposées à celles qu'elles avaient d'abord, il suffit de changer les signes de ces données dans les formules primitives.*

Pour s'en convaincre, on peut résoudre directement la question proposée, et l'on voit que les quantités qui prennent des acceptions opposées, changent de signes dans les formules.

4e Problème. *Payer* 26 *francs avec des pièces de* 2 *francs et de* 5 *francs.* Si l'on donne x pièces de 2 francs et y pièces de 5 francs, on aura payé $2x + 5y$ francs ; il faut donc que $2x + 5y = 26$.

Cette équation admet une infinité de solutions ; mais *la nature du problème ne permettant d'admettre que des valeurs entières positives, de x et y,* on cherchera ces valeurs par la méthode indiquée (n° 56, 2°). L'équation $2x + 5y = 26$ donnant $x = 13 - 2y - \frac{1}{2}y$, il faut que $\frac{1}{2}y$ soit un nombre entier quelconque e ; ce qui donne $y = 2e$, $x = 13 - 5e$.

Or, x et y doivent être des nombres entiers positifs ; on

ne saurait donc assigner à l'indéterminée e que les valeurs $e=1, e=2$. On en déduit qu'il n'est possible de payer les 26 francs que de deux manières, savoir : avec 8 pièces de 2 francs et 2 pièces de 5 francs, ou avec 3 pièces de 2 francs et 4 pièces de 5 francs.

5e Problème. *On propose de payer* 26 *francs en donnant des pièces de* 2 *francs et en recevant des pièces de* 5 *francs.*

Si l'on donne x pièces de 2 francs, et si l'on reçoit y pièces de 5 francs, on aura payé $2x-5y$ francs ; donc, $2x-5y=26$.

On trouve $y=2e$, $x=5e+13$,

On obtiendra donc toutes les solutions de la question, en donnant à l'indéterminée e les valeurs, 1, 2, 3, 4, etc.

6e Problème. *Payer* 71 *francs avec des pièces de* 5 *francs et de* 20 *francs.* Ce problème n'admet aucune solution ; car il conduit à l'équation $x+4y=\frac{7}{5}$.

7e Problème. *Un nombre est composé de trois chiffres. Le quadruple du chiffre des unités, diminué du double du chiffre des dixaines, et augmenté du quintuple du chiffre des centaines, donne* 13. *Le quintuple du chiffre des centaines, plus* 7 *fois le chiffre des dixaines, moins le triple du chiffre des unités, donne* 10. *Trouver ce nombre.* Si l'on désigne le chiffre des unités par x, celui des dixaines par y, et celui des centaines par z, ces chiffres devront satisfaire aux équations

$$4x-2y+5z=13,\quad 5z+7y-3x=10.$$

On a vu (n° 59) que les solutions entières de ces équations sont fournies par les relations

$$x=3(1+15e),\quad y=2+35e,\quad z=1-22e,$$

en donnant à l'indéterminée e les valeurs, $0, \pm 1, \pm 2$, etc. Mais, comme d'après la nature de la question, on ne doit admettre pour x, y, z, que des nombres entiers positifs moindres que 10, on ne peut donner à e que la valeur $e=0$; d'où $x=3$, $y=2$, $z=1$. De sorte que le nombre cherché est 123.

CHAPITRE III.

Des Arrangemens, des Permutations et des Combinaisons. De la Formation des puissances et de l'Extraction des racines.

§ Ier. *Des arrangemens, des permutations et des combinaisons.*

62. Les ARRANGEMENS n à n de m lettres sont les résultats que l'on obtient en prenant successivement n quelconques de ces m lettres et en les disposant les unes à la suite des autres de toutes les manières possibles. Les PERMUTATIONS de n lettres sont les résultats (contenant chacun les n lettres) que l'on obtient en disposant successivement ces n lettres les unes à la suite des autres de toutes les manières possibles. Enfin, les COMBINAISONS ou les PRODUITS DIFFÉRENS de m lettres n à n sont les résultats auxquels on parvient en plaçant successivement les unes à la suite des autres, n de ces m lettres, de manière que deux de ces résultats ne soient jamais entièrement formés des mêmes lettres. D'après ces définitions, les permutations de n lettres peuvent être considérées, comme les arrangemens n à n de n lettres; et pour obtenir tous les arrangemens n à n de m lettres, il suffit de former toutes les permutations de chacune des combinaisons n à n de ces m lettres.

1°. Occupons-nous d'abord des ARRANGEMENS de m lettres $a, b, c, d, e, \ldots, i, k, l$.

Pour former les *arrangemens deux à deux* de ces m lettres, on met successivement à la suite de chaque lettre, chacune des $m-1$ autres; on obtient ainsi, $m-1$ arrangemens $ab, ac, ad, \ldots, ak, al$, qui commencent par la 1re lettre a; $m-1$ arrangemens $ba, bc, bd, \ldots, bk, bl$, qui commencent par la 2e lettre b; et ainsi de suite; enfin, on trouve $m-1$

arrangemens la, lb, lc, ld,..., lk, qui commencent par la $m^{ième}$ lettre l. Le nombre total de ces arrangemens deux à deux, des m lettres, est donc m fois $m-1$ ou $m(m-1)$.

Par exemple, si $m=4$, le nombre des arrangemens deux à deux de quatre lettres a, b, c, d, sera 4×3 ou 12; et en effet, ces arrangemens sont

$$ab,\ ac,\ ad,\ \|\ ba,\ bc,\ bd,\ \|\ ca,\ cb,\ cd,\ \|\ da,\ db,\ dc.$$

Connaissant les $m(m-1)$ arrangemens deux à deux des m lettres, pour en déduire les *arrangemens trois à trois* de ces lettres, il suffit de placer successivement à la suite de chacun des arrangemens deux à deux, chacune des $m-2$ lettres qui n'entrent pas dans cet arrangement de deux lettres. Ainsi, le 1er arrangement ab fournira $m-2$ arrangemens abc, abd,..., abk, abl, qui commenceront par ab; le 2e arrangement ac fournira $m-2$ arrangemens acb, acd,..., ack, acl, qui commenceront par ac....; enfin, le $m(m-1)^{ième}$ arrangement lk fournira $m-2$ arrangemens lka, lkb, lkc,..., lki, qui commenceront par lk. Le nombre total des arrangemens trois à trois de m lettres est donc $m(m-1)$ fois $(m-2)$, ou $m(m-1)(m-2)$.

Par exemple, si $m=4$, le nombre des arrangemens trois à trois de quatre lettres a, b, c, d, sera $4\times 3\times 2$ ou 24; et en effet, ces arrangemens sont

abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

On formerait de même les *arrangemens quatre à quatre* des m lettres, en mettant successivement à la suite de chacun des $m(m-1)(m-2)$ arrangemens trois à trois, chacune des $m-3$ autres lettres. Le nombre des arrangemens quatre à quatre de m lettres est donc $m(m-1)(m-2)$ fois $m-3$, ou $m(m-1)(m-2)(m-3)$. Et ainsi de suite.

2°. On pourrait déterminer les PERMUTATIONS par la méthode du n° 47. Mais on parvient plus simplement aux mêmes résultats à l'aide du procédé que nous allons exposer.

Deux lettres a, b, donnent deux permutations ab, ba.

Pour trouver les *permutations de trois lettres*, a, b, c, on place successivement à la suite de chaque lettre, les deux permutations des deux autres lettres. On obtient ainsi deux permutations abc, acb, qui commencent par la 1re lettre a; deux permutations bac, bca, qui commencent par la 2e lettre b; et enfin deux permutations cab, cba, qui commencent par la 3e lettre c. Le nombre total des permutations de trois lettres est donc 3 fois 2, ou 2×3, ou 6. Ces permutations sont abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Pour trouver les *permutations de quatre lettres*, a, b, c, d, on place successivement à la suite de chaque lettre, chacune des 2×3 permutations des trois autres lettres. Le nombre total des permutations de quatre lettres est donc 4 fois 2×3, ou $2\times3\times4$, ou 24. Ces permutations, ainsi formées, sont

$abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$,
$bacd$, $badc$, $bcad$, $bcda$, $bdac$, $bdca$,
$cabd$, $cadb$, $cbad$, $cbda$, $cdab$, $cdba$,
$dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$, $dcba$.

On verrait de même que le nombre des *permutations de cinq lettres* est $2\times3\times4\times5$ ou 120. Et ainsi de suite.

3°. Occupons-nous des COMBINAISONS de m lettres $a, b, c, d, e, \ldots, i, k, l$.

Pour former toutes les *combinaisons deux à deux* de ces m lettres, on écrit successivement à côté de la 1re lettre a, chacune des $m-1$ autres lettres, ce qui fournit les $m-1$ combinaisons

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad ae,\ldots,\quad ai,\quad ak,\quad al.$$

On place successivement à côté de la 2e lettre b, chacune des $m-2$ lettres suivantes, $c, d, e, \ldots, i, k, l$; ce qui fournit les $m-2$ combinaisons

$$bc,\quad bd,\quad be,\ldots,\quad bi,\quad bk,\quad bl.$$

On place successivement à côté de la 3e lettre c, chacune des $m-3$ lettres suivantes, $d, e, \ldots, i, k, l$; ce qui fournit les $m-3$ combinaisons

$$cd,\quad ce,\ldots,\quad ci, ck, cl.$$

En continuant de cette manière, la $m-2^{ième}$ lettre i, combinée avec les deux lettres suivantes k, l, fournira les deux combinaisons ik, il; et enfin, la $m-1^{ième}$ lettre k, combinée avec la $m^{ième}$ et dernière lettre l, donnera la dernière combinaison kl.

On trouve ainsi que les combinaisons deux à deux de cinq lettres a, b, c, d, e, sont

$$ab, ac, ad, ae;\quad bc, bd, be;\quad cd, ce;\quad de.$$

Les *combinaisons trois à trois* de m lettres se déduisent des combinaisons deux à deux (que nous venons de former), en écrivant successivement à côté de chacune des combinaisons deux à deux, qui ne contiennent pas la dernière lettre l, chacune des lettres qui suivent la dernière lettre contenue dans cette combinaison de deux lettres. De cette manière :

La 1ère combinaison ab, fournit les $m-2$ combinaisons

$$abc, abd, abe, \ldots,\quad abi, abk, abl.$$

La 2e combinaison ac, fournit les $m-3$ combinaisons

$$acd, ace, \ldots\ldots,\quad aci, ack, acl.$$

La 3e combinaison ad, fournit les $m-4$ combinaisons

$$ade, \ldots,\quad adi, adk, adl.$$

En continuant ainsi, la dernière des combinaisons trois à trois sera ikl.

On trouve, de cette manière, que les combinaisons trois à trois de cinq lettres a, b, c, d, e, sont

$$abc, abd, abe;\quad acd, ace;\quad ade;\quad bcd, bce;\quad bde;\quad cde.$$

Les *combinaisons quatre à quatre* se déduisent de même des combinaisons trois à trois (que nous venons de former), en écrivant successivement à côté des combinaisons trois à trois qui ne contiennent pas la dernière lettre l, chacune des lettres qui suivent la dernière lettre de cette combinaison de trois lettres. Et ainsi de suite.

Le nombre des combinaisons de m lettres prises deux à deux,

trois à trois, etc., se déduit de (1°) *et* (2°). En effet, on a vu (1°) que m lettres donnent $m(m-1)$ arrangemens deux à deux; et d'après (2°) chaque combinaison ab de deux lettres, fournit deux permutations, ab, ba; *le nombre des combinaisons deux à deux de m lettres est donc* $\frac{m(m-1)}{1\times 2}$.

De même, m lettres prises trois à trois, fournissent $m(m-1)(m-2)$ arrangemens, et chaque combinaison abc de trois lettres donne $1\times 2\times 3$ permutations; *le nombre des combinaisons trois à trois de m lettres est donc* $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}$,

Et ainsi de suite.

Par exemple, soit $m=5$; on trouve que le nombre des combinaisons deux à deux de cinq lettres, a, b, c, d, e, est $\frac{5\times 4}{2}$ ou 10; et en effet, ces combinaisons sont

$$ab, ac, ad, ae, \quad bc, bd, be, \quad cd, ce, \quad de.$$

Il résulte des lois indiquées par les formules obtenues (1°), (2°) et (3°), que si l'on désigne par A_n le nombre des ARRANGEMENS n à n de m lettres, par P_n le nombre des PERMUTATIONS de n lettres, et par C_n le nombre des COMBINAISONS n à n de m lettres, on aura

$$(1)\ldots\ldots A_n=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1),$$

$$(2)\ldots\ldots P_n=1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-2)\times(n-1)\times n,$$

$$(3)\ldots\ldots C_n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)\times n}.$$

63. Nous allons *démontrer directement les formules* (1), (2), (3), *sans avoir recours à l'analogie*.

1°. Pour déterminer le nombre A_n des *arrangemens* de m lettres n à n, nous chercherons d'abord à le faire dépendre du nombre A_{n-1} des arrangemens $n-1$ à $n-1$ de ces m lettres. Or, les arrangemens n à n peuvent se déduire des arrangemens $n-1$ à $n-1$, en mettant successivement à la suite de chaque

arrangement de $n-1$ lettres, chacune des $m-(n-1)$ lettres qui n'entrent pas dans cet arrangement. Or, en plaçant successivement à la suite d'un arrangement de $n-1$ lettres, chacune des $m-(n-1)$ autres lettres, on obtient les $m-(n-1)$ arrangemens n à n, qui commencent par cet arrangement de $n-1$ lettres; chacun des arrangemens $n-1$ à $n-1$, fournit donc $m-(n-1)$ ou $m-n+1$ arrangemens n à n; les A_{n-1} arrangemens $n-1$ à $n-1$, donnent donc A_{n-1} fois $m-n+1$ arrangemens n à n; la relation cherchée est donc

$$(4)\ldots A_n=(m-n+1)\times A_{n-1}.$$

Cette formule démontre que le nombre des arrangemens n à n de m lettres est égal au produit de $m-n+1$ par le nombre des arrangemens $n-1$ à $n-1$ de ces m lettres.

On peut déduire de cette règle les formules du n° 62 (1°). En effet, le nombre A_1 des arrangemens de m lettres prises une à une est évidemment égal au nombre m de ces lettres; le nombre A_2 des arrangemens deux à deux de m lettres sera donc $m\times(m-2+1)$ ou $m(m-1)$; le nombre A_3 des arrangemens trois à trois de m lettres sera donc $m(m-1)\times(m-3+1)$ ou $m(m-1)(m-2)$. Et ainsi de suite.

Pour obtenir une valeur de A_n qui ne dépende que des seules quantités, m, n, on observe que la relation (4) ayant lieu quelle que soit la valeur entière de n, on peut remplacer successivement n par $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2; ce qui donne

$$(5)\ldots\begin{cases}A_{n-1}=(m-n+2)\,A_{n-2}, A_{n-2}=(m-n+3)\,A_{n-3},\ldots\\ \ldots, A_3=(m-2)\,A_2, A_2=(m-1)\,A_1.\end{cases}$$

Pour éliminer les $n-1$ inconnues $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_3, A_2, A_1$, on peut d'abord remplacer A_{n-1} par sa valeur $(m-n+2)\,A_{n-2}$; la relation (4) devient $A_n=(m-n+1)(m-n+2)\,A_{n-2}$.

On remplace ensuite, dans cette dernière relation, A_{n-2} par sa valeur $(m-n+3)\,A_{n-3}$, ce qui fait dépendre A_n de A_{n-3}.

En continuant ainsi, on parviendra à une dernière expression de A_n en fonction de m, n et A_1; et comme $A_1=m$, on

trouvera de cette manière que

$$(1)\ldots\ A_n = (m-n+1)(m-n+2)\ldots(m-2)(m-1)m.$$

On parvient plus simplement au même résultat en multipliant les équations (4), (5), membre à membre ; car le produit des premiers membres

$$A_n,\ A_{n-1},\ A_{n-2},\ldots,\ A_3,\ A_2,$$

devant être égal au produit des seconds membres

$$(m-n+1)\ A_{n-1},\ (m-n+2)\ A_{n-2},$$
$$(m-n+3)\ A_{n-3},\ldots,\ (m-2)\ A_2,\ (m-1)\ A_1,$$

on peut supprimer leurs facteurs communs A_{n-1}, $A_{n-2},\ldots, A_2$, et en remplaçant A_1 par m, on obtient la relation (1).

2°. Les *permutations* n'étant que des arrangemens dans lesquels toutes les lettres entrent à la fois, le nombre P_n des permutations de n lettres, peut se déduire du nombre A_n des arrangemens n à n de m lettres, en faisant $m=n$ dans la valeur (1) de A_n ; ce qui conduit à la formule

$$(2)\ldots P_n = 1\times 2\times 3\ldots\times(n-2)(n-1)n.$$

On peut parvenir directement à cette dernière formule, en faisant dépendre le nombre P_n des permutations de n lettres, du nombre P_{n-1} des permutations de $n-1$ lettres. En effet, pour former toutes les permutations de n lettres $a, b, c, d,\ldots$, il suffit de mettre successivement à la droite de chaque lettre, les P_{n-1} permutations des $n-1$ autres lettres ; chacune des m lettres $a, b, c, d,\ldots$, occupant la 1re place, fournira donc P_{n-1} permutations contenant chacune n lettres ; le nombre total P_n des permutations de n lettres sera donc égal à n fois P_{n-1}. On a donc, $P_n = nP_{n-1}$.

Si l'on donne successivement à n les valeurs $2, 3, 4,\ldots$, et si l'on observe qu'une seule lettre ne fournissant qu'une permutation, on a $P_1 = 1$, on trouvera

$P_2 = 2\times 1$, $P_3 = 3\ P_2 = 3\times 2\times 1$, $P_4 = 4\ P_3 = 4\times 3\times 2\times 1$; etc.

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus (*page* 67).

Pour parvenir à l'expression de P_n en fonction de n, on observe que la relation $P_n = nP_{n-1}$ étant vraie quel que soit n, on peut y remplacer successivement n par $n-1$, $n-2$, ..., 3 et 2. On a donc

$$P_n = nP_{n-1},\ P_{n-1} = (n-1)P_{n-2},\ \ldots\ldots,\ P_3 = 3P_2,\ P_2 = 2P_1.$$

Si l'on multiplie toutes ces équations membre à membre, et si l'on supprime les facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante, en observant d'ailleurs que $P_1 = 1$, on parviendra à la formule (2).

3°. Enfin, pour former tous les arrangemens n à n de m lettres, il suffirait de prendre toutes les combinaisons n à n de ces m lettres, et de faire toutes les permutations de chacune de ces combinaisons. Or, chaque combinaison contenant n lettres, fournit P_n permutations; les C_n combinaisons n à n de m lettres donneront donc C_n fois P_n permutations. Le nombre A_n des arrangemens n à n de m lettres est donc égal à $P_n \times C_n$. On obtiendra donc C_n en divisant l'expression (1) de A_n par l'expression (2) de P_n; ce qui donnera la formule (3).

Remarque. La formule (3) déterminant le nombre des produits réellement différens de m quantités prises n à n, et ce nombre étant nécessairement entier, il en résulte que *le produit de n nombres entiers consécutifs quelconques, m, m−1, ... m−n+1, est toujours divisible par le produit des n premiers nombres entiers* 1, 2, 3, ..., n.

§ II. *De la formation des puissances.*

64. *La $n^{ième}$ puissance d'une quantité étant le produit de n facteurs égaux à cette quantité* (page 2), on pourrait obtenir cette puissance à l'aide de multiplications successives. Mais nous allons donner des règles qui conduiront plus simplement aux mêmes résultats.

Puissances des monomes.

65. 1°. *On obtient la $n^{ième}$ puissance d'une quantité affectée*

d'un exposant, en multipliant l'exposant par n ; car

$(a^a)^3 = a^a \times a^a \times a^a = a^{a+a+a} = a^{3a}$,

$(a^p)^q = a^p \times a^p \times a^p \times \ldots \times a^p = a^{p+p+p+\ldots+p} = a^{pq}$.

2°. *Pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance;* car un produit ne changeant pas de valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications (n° 9, 6°), on a

$$(abc)^3 = abc \times abc \times abc = aaabbbccc = a^3b^3c^3,$$

$$(abc..)^n = abc.. \times abc.. \times abc.. = aaa.. \times bbb.. \times ccc.. = a^n b^n c^n ..$$

3°. *Pour former la $n^{ième}$ puissance du produit de plusieurs quantités affectées d'exposans, on élève à la $n^{ième}$ puissance le coefficient numérique qui peut affecter ce produit, et l'on multiplie chaque exposant par n.* Cela résulte de (2°) et (1°).

Ainsi, $(3a^2b^5)^4 = 3^4 (a^2)^4 (b^5)^4 = 81a^8b^{20}$.

4°. *On trouve la $n^{ième}$ puissance d'une fraction en élevant séparément le numérateur et le dénominateur à cette puissance,*

car $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b} = \frac{aaa\ldots a}{bbb\ldots b} = \frac{a^n}{b^n}$.

5°. *Toute puissance de degré pair d'une quantité positive ou négative est positive, et toute puissance de degré impair d'une quantité a le signe de cette quantité.* Cela se déduit des propriétés du n° 9 (5°). Par exemple,

$(+3)^4 = +81$, $(-3)^4 = +81$, $(+2)^3 = +8$, $(-2)^3 = -8$.

Il en résulte qu'*aucune quantité élevée à une puissance de degré pair ne peut donner un résultat négatif.*

6°. *Suivant qu'on élève -1 à une puissance de degré pair ou de degré impair, le résultat est égal à $+1$ ou à -1.* Cela résulte de (5°).

66. *Toutes les puissances entières positives d'une quantité plus grande que l'unité sont plus grandes que l'unité, et elles ont des valeurs d'autant plus grandes que les exposans de ces puissances sont plus élevés. Toutes les puissances entières*

positives d'une quantité moindre que l'unité sont moindres que l'unité et elles ont des valeurs d'autant plus petites que les exposans de ces puissances sont plus grands. En effet, le produit est composé avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité (n° 7), et lorsque le multiplicateur est l'unité, le produit est égal au multiplicande; par conséquent, suivant que le multiplicateur est plus grand ou plus petit que l'unité, le produit est plus grand ou plus petit que le multiplicande; il en résulte que si l'on suppose

$$a > 1 \text{ et } C = \frac{1}{a}, \quad \text{d'où} \quad C < 1, \text{ on aura}$$

$a \times a > a$, ou $a^2 > a$; $a^2 \times a > a^2$, ou $a^3 > a^2$; etc.
$C \times C < C$, ou $C^2 < C$; $C^2 \times C < C^2$, ou $C^3 < C^2$; etc.

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

Puissances des polynomes.

67. Pour *former les puissances successives du binome* $x + a$, on peut multiplier $x + a$ par $x + a$; le produit $x^2 + 2ax + a^2$ exprime la 2e *puissance* ou le *quarré* de $x + a$; si l'on multiplie cette 2e puissance par $x + a$, le produit $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ sera la 3e *puissance* ou le *cube* de $x + a$. Et ainsi de suite.

Ce procédé ayant l'inconvénient de faire dépendre une puissance de toutes les précédentes, nous allons chercher la formule générale qui sert à *calculer directement la m^ième^ puissance d'un binome*, lorsque m désigne un nombre entier positif quelconque. Les premières puissances de $x + a$ suffiraient pour faire connaître la loi des exposans de x et de a dans le *développement* de $(x + a)^m$; mais on n'aperçoit pas la loi des coefficiens numériques, parce que ces coefficiens résultent des réductions qu'entraîne l'égalité des facteurs.

Pour éviter ces réductions, nous chercherons d'abord la forme générale du produit de m binomes, $x + a$, $x + b$, $x + c$, etc.

Le produit de $x + a$ par $x + b$ est $x^2 + (a + b)x + ab$.

Ce produit, multiplié par $x + c$, donne le produit

$$x^3 + (a + b + c)\, x^2 + (ab + ac + bc)\, x + abc,$$

des binomes, $x + a$, $x + b$, $x + c$.

Multipliant ce dernier produit par $x + d$, on trouve que le produit des binomes $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, est

$x^4 + a$	$x^3 + ab$	$x^2 + abc$	$x + abcd$ (*).
$+ b$	$+ ac$	$+ abd$	
$+ c$	$+ ad$	$+ acd$	
$+ d$	$+ bc$	$+ bcd$	
	$+ bd$		
	$+ cd$		

Et ainsi de suite. On en déduit, par *analogie*, que *dans le produit de m binomes, $x + a$, $x + b$, $x + c$, etc., l'exposant de x dans le 1er terme est égal au nombre m des facteurs binomes*, et que *les exposans de x dans les termes suivans diminuent successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme qui ne renferme pas x, et qui peut être considéré comme le coefficient de x^0*, (page 16). *La loi des coefficiens de x n'est pas moins évidente : le coefficient du 1er terme est l'unité, celui du 2e terme est la somme des seconds termes des m binomes, le coefficient du 3e terme est la somme de tous les produits deux à deux de ces seconds termes; le coefficient du 4e terme est la somme de tous les produits trois à trois des seconds termes des m binomes; et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme qui est le produit de tous les seconds termes des binomes.*

68. Pour *démontrer la loi précédente, sans avoir recours à l'analogie*, il suffit de faire voir que si cette loi convient au produit de m binomes, elle conviendra également au produit de $m + 1$ binomes; car ayant été vérifiée pour le produit de quatre binomes, elle conviendra au produit de cinq

(*) Dans cette expression, le coefficient de x^3 est $a + b + c + d$; celui de x^2 est $ab + ac + ad + bc + bd + cd$, et celui de x est $abc + abd + acd + bcd$. On fait souvent usage de cette notation.

binomes; puis en partant de ce dernier produit, la loi indiquée sera vraie pour le produit de six binomes; et ainsi de suite.

Supposons donc que la loi assignée convienne au produit

$$x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots+p_{n-1}x^{m-n+1}+p_nx^{m-n}+\ldots+p^m,$$

de m binomes $x+a$, $x+b\ldots$, $x+k$; le coefficient p_1, du 2e terme sera la somme des m seconds termes, a, $b\ldots$, k; p^2 désignera la somme de leurs produits deux à deux; et en général, p_n exprimera la somme de tous les produits n à n des m seconds termes $a,b,\ldots,k$; enfin, le dernier terme p_m, sera le produit des m seconds termes $a,b,\ldots,k$.

Multipliant le polynome $x^m+p_1x^{m-1}+$ etc. par $x+l$, on trouve que le produit des $m+1$ binomes, $x+a$, $x+b,\ldots$, $x+k$, $x+l$, est

$$x^{m+1}+(p_1+l)x^m+\ldots+(p_n+lp_{n-1})x^{m-n+1}+\ldots+lp_m.$$

La loi des exposans de x *n'a pas changé;* car l'exposant de x dans le 1er terme est égal au nombre $m+1$ des facteurs binomes, et les exposans de x dans les termes suivans diminuent successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme qui ne contient pas x, et qui peut être considéré comme affecté de x^0.

Pour démontrer que *la loi des coefficiens n'a pas changé*, nous observerons que dans le produit des m binomes, $x+a$, $x+b$, $\ldots$, $x+k$, le coefficient p_n du $(n+1)^{ième}$ terme étant la somme des produits n à n des m seconds termes, a, b, $\ldots$, k, il en résulte que dans le produit des $m+1$ binomes, $x+a$, $x+b$, $\ldots$, $x+k$, $x+l$, le coefficient (p_n+lp_{n-1}), du terme de même rang, est la somme des produits n à n des $m+1$ seconds termes, a, b, $\ldots$, k, l; car p_n exprime la somme des produits n à n qui ne contiennent pas l, et p_{n-1} étant la somme des produits $n-1$ à $n-1$ des m seconds termes, $a,b,\ldots,k$, le produit de p_{n-1} par l, donne les produits n à n qui contiennent l; de sorte que p_n+lp_{n-1} est la somme des produits n à n des $m+1$ seconds termes, $a,b,\ldots,k,l$. La loi énoncée (n° 67) est donc générale.

69. Pour *trouver le développement de la $m^{ième}$ puissance du binome $x+a$*, nous supposerons que, dans le produit

$$x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots+p_nx^{m-n}+\ldots+p^m,$$

des m binomes $x+a$, $x+b$, ..., $x+k$, les m seconds termes, $a, b, \ldots, k$, deviennent égaux à a. Dans cette hypothèse, le coefficient p_1 de x^{m-1}, qui exprimait la somme des m seconds termes, $a, b, \ldots, k$, deviendra $a+a+a+$ etc., ou a répété m fois, ou am; le coefficient p_2, qui exprimait la somme $ab+ac+$ etc., des produits deux à deux des m seconds termes, $a, b, \ldots, k$, deviendra a^2+a^2+ etc., c'est-à-dire a^2 répété autant de fois qu'il y avait de produits deux à deux; or on a vu (n° 62) que le nombre de ces produits est $\frac{m(m-1)}{1\times 2}$; le coefficient p_2 deviendra donc $\frac{m(m-1)}{1\times 2}a^2$.

On verra de même que les coefficiens, p_3, p_4, etc., deviennent

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}a^3,\quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^4, \text{ etc.};$$

Le développement de $(x+a)^m$ est donc

$$(1)\ldots (x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3}+\text{etc.}$$

Cette formule, qui est connue sous le nom de *formule du binome de* Newton, sert à *calculer directement toutes les puissances entières positives d'un binome.*

70. Nous allons faire connaître les *propriétés les plus remarquables de la formule du binome de Newton.*

1°. Si l'on désigne par T_{n+1} le $(n+1)^{ième}$ terme du développement de $(x+a)^m$, on aura

$$(2)\ldots T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3).\ (m-n+2)(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots (n-1)\cdot n}a^nx^{m-n}.$$

Cette expression de T_{n+1} est ce qu'on nomme le *terme général* du développement de $(x+a)^m$, parce qu'il détermine les termes de ce développement, à partir du second, en donnant successivement à n les valeurs, 1, 2, 3, 4, 5, etc. On sait d'ailleurs que le premier terme est x^m (n° 12).

2°. *Chaque terme peut se déduire du précédent;* car lorsqu'on change n en $n+1$, la relation (2) devient

$$(3)\ldots T_{n+2} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n} \times \frac{(m-n)}{(n+1)}\, a^{n+1}x^{m-n-1}.$$

et la comparaison des formules (2), (3), conduit à cette règle générale : *Pour déduire un terme quelconque du précédent, multipliez le coefficient du terme précédent par l'exposant de x dans ce terme, diminuez l'exposant de x d'une unité, augmentez celui de a d'une unité, et divisez par l'exposant de a ainsi augmenté d'une unité; le résultat sera le terme demandé.*

3°. *Dans le développement de $(x+a)^m$, les coefficiens des termes également distans du premier terme et du dernier sont égaux.*

En effet, le développement de $(x+a)^m$ est de la forme

$$(4)\ldots x^m + Aax^{m-1} + Ba^2x^{m-2} + \ldots + B'a^{m-2}x^2 + A'a^{m-1}x + a^m.$$

La $m^{ième}$ puissance de $x+a$ devant rester la même quand on change x en a et a en x, si l'on fait ce changement dans (4), le résultat

$$a^m + Axa^{m-1} + Bx^2a^{m-2} + \ldots + B'x^{m-2}a^2 + A'x^{m-1}a + x^m,$$

devra être composé des mêmes termes que le polynome (4); les coefficiens des mêmes puissances de x seront donc égaux dans ces deux polynomes. On a donc $A = A'$, $B = B'$, etc.

4°. *Pour obtenir le développement de $(x-a)^m$, il suffit de changer $+a$ en $-a$, dans la formule* (1) (page 77); ce qui donne

$$(x-a)^m = x^m - ma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} + \text{etc.}$$

Selon que l'exposant m sera pair ou impair, le dernier terme de ce développement sera $+a^m$ ou $-a^m$.

5°. *Toutes les puissances des polynomes peuvent se déduire de la formule* (1) (page 77). En effet, lorsqu'on change a en $a+c$, cette formule donne

$$(x+a+c)^m = x^m + m(a+c)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(a+c)^2x^{m-2} + \ldots + (a+c)^m.$$

Or, la formule (1) (page 77) déterminera les puissances 2, 3, 4, ..., $m-1$, m, du binome $\alpha+\zeta$; on trouvera donc ainsi le développement de $(x+\alpha+\zeta)^m$. Si l'on change dans ce dernier développement, ζ en $\zeta+\gamma$, on obtiendra la $m^{ième}$ puissance de $x+\alpha+\zeta+\gamma$. Et ainsi de suite.

§ III. *De l'extraction des racines, et du calcul des radicaux.*

71. On a vu en Arithmétique comment la composition du quarré et du cube d'une somme composée de deux parties, conduit aux règles relatives à l'extraction de la racine quarrée et de la racine cubique des nombres. La connaissance des deux premiers termes x^m+max^{m-1} du développement de $(x+\alpha)^m$ conduirait à des règles analogues pour extraire les racines de degrés quelconques, des nombres. Mais ces règles trouvant peu d'applications, nous allons nous occuper de l'extraction de la racine $n^{ième}$ des quantités littérales.

72. *La racine $n^{ième}$ d'une quantité quelconque α étant la quantité qui prise n fois comme facteur donne un produit égal à α* (page 2), il en résulte que si ζ désigne cette racine on aura $\zeta^n=\alpha$; de sorte que la $n^{ième}$ puissance de $\sqrt[n]{\alpha}$ est identiquement égale à α.

Extraction des Racines des monomes.

73. Pour revenir des puissances des monomes à leurs racines, il suffit de renverser les règles du n° 64. Ce qui conduit aux propriétés suivantes :

1°. *On obtient la racine $n^{ième}$ d'une quantité affectée d'un exposant, en divisant l'exposant par n.* Ainsi,

$$\sqrt[3]{a^6}=a^2;\quad \sqrt[5]{a^{10}}=a^2,\quad \sqrt[n]{a^{pn}}=a^p.$$

2°. *Pour trouver la racine $n^{ième}$ d'un produit, il suffit d'extraire la racine $n^{ième}$ de chaque facteur.*

Ainsi, $\sqrt[n]{abc\ldots}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\ldots$

On peut d'ailleurs démontrer directement cette propriété; car la $n^{ième}$ puissance de $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\ldots\ldots$ étant $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\times\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\times\left(\sqrt[n]{c}\right)^n\ldots$, ou $a\times b\times c\ldots$, il s'ensuit que $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\ldots$, est la racine $n^{ième}$ de $abc\ldots$

Remarque. *Pour faire sortir un facteur de dessous un radical du $n^{ième}$ degré, il suffit d'extraire la racine $n^{ième}$ de ce facteur; et réciproquement, lorsqu'on veut faire passer sous un radical du $n^{ième}$ degré un facteur placé hors de ce radical, on élève le facteur à la $n^{ième}$ puissance;* car

$$\sqrt[n]{a^{pn}\times b}=\sqrt[n]{a^{pn}}\times\sqrt[n]{b}=a^p\times\sqrt[n]{b},\text{ et }a^p\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^{pn}\times b}.$$

Ainsi, $\sqrt[3]{a^6b^2}=a^2\sqrt[3]{b^2}$ et $a^2\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[3]{(a^2)^3b^2}=\sqrt[3]{a^6b^2}$.

3°. *Pour obtenir la racine $n^{ième}$ du produit de plusieurs quantités affectées d'exposans, on extrait la racine $n^{ième}$ du coefficient numérique, et l'on divise chaque exposant par n.* Cela résulte de (2°) et (1°).

Ainsi, $\sqrt[4]{81a^8b^{20}}=\sqrt[4]{81}\sqrt[4]{a^8}\sqrt[4]{b^{20}}=3a^2b^5$.

Remarque. Quand tous les exposans des quantités qui sont sous un radical ne sont pas divisibles par l'indice du radical, l'extraction indiquée ne peut pas s'effectuer exactement; on réduit alors le radical à sa plus simple expression, en faisant sortir de dessous le radical tous les facteurs qui ont des racines exactes. Ainsi,

$$\sqrt[3]{40a^4b^8}=\sqrt[3]{2^3a^3b^6\times5ab^2}=\sqrt[3]{2^3a^3b^6}\times\sqrt[3]{5ab^2}=2ab^2\sqrt[3]{5ab^2}.$$

4°. *On trouve la racine $n^{ième}$ d'une fraction en prenant séparément la racine $n^{ième}$ du numérateur et du dénominateur.*

Ainsi, $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a}{b}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Remarque. On peut réduire le calcul à extraire une seule ra-

cine, car $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$.

Du Calcul des radicaux.

74. Lorsque les quantités placées sous des radicaux du même degré sont les mêmes, on dit que ces *radicaux* sont *semblables*; et quand cette condition n'est pas remplie, les *radicaux sont dissemblables*. Cela posé :

1°. *La valeur d'un radical ne change pas, lorsqu'après avoir multiplié l'indice du radical par un nombre entier n, on élève la quantité placée sous le radical à la $n^{ième}$ puissance;* car il résulte de la définition du n° 72 que

$$(\sqrt[m]{a})^m = a, \text{ d'où } (\sqrt[m]{a})^{mn} = a^n \text{ et } \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}.$$

On en déduit que *la valeur d'un radical ne change pas lorsqu'après avoir divisé l'indice du radical par un nombre quelconque n, on extrait la racine $n^{ième}$ de la quantité placée sous le radical.*

2°. *Pour réduire des radicaux au même indice, sans changer leurs valeurs, on distingue deux cas :*

1er Cas. *Quand les indices des radicaux n'ont pas de facteur commun, on multiplie chaque indice par le produit de tous les autres, et l'on élève la quantité placée sous chaque radical à une puissance marquée par ce produit.*

Ainsi, les radicaux $\sqrt[4]{5ab^3}$, $\sqrt[3]{7a^2b}$, réduits au même indice, deviennent $\sqrt[6]{5^3a^3b^9}$, $\sqrt[6]{7^2a^4b^2}$, ou $\sqrt[6]{125a^3b^9}$, $\sqrt[6]{49a^4b^2}$.

2e Cas. *Lorsque les indices des radicaux proposés ont un facteur commun, on simplifie le calcul en prenant pour indice commun, le plus petit nombre divisible par chacun de ces indices.* Par exemple, soient les radicaux

$$\sqrt[2]{ab},\ \sqrt[3]{ab^2},\ \sqrt[4]{ab^3},\ \sqrt[6]{3ab^5},\ \sqrt[8]{2ab^5}.$$

Le plus petit nombre divisible par les indices 2, 3, 4, 6, 8, étant 24, on trouvera que les radicaux proposés, réduits au

plus petit indice commun, sont

$$\sqrt[24]{a^{12}b^{12}},\ \sqrt[24]{a^8b^{16}},\ \sqrt[24]{a^6b^{18}},\ \sqrt[24]{3^4a^4b^{20}},\ \sqrt[24]{2^3a^3b^{15}}.$$

3°. L'ADDITION *et la* SOUSTRACTION *des radicaux semblables s'effectuent sur les coefficiens de ces radicaux;* car on peut regarder le radical comme une certaine unité qui est répétée un nombre de fois marqué par le coefficient de chaque radical.

Ainsi, $7\sqrt[4]{a}+5\sqrt[4]{a}=12\sqrt[4]{a}$, $5\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}=3\sqrt{ab}$.

4°. *Pour effectuer la* MULTIPLICATION *de plusieurs radicaux du même degré, il suffit de former le produit des quantités qui sont sous les radicaux, et de mettre ce produit sous un radical du même degré;* car on a démontré (n° 73, 2°), que

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\ldots=\sqrt[n]{abc\ldots}$$

Ainsi, $\sqrt[3]{10a^2b^2}\times\sqrt[3]{4a^2b^5}=\sqrt[3]{40a^4b^8}=2ab^2\sqrt[3]{5ab^2}$,

$2a\sqrt[5]{3a^2b^3}\times 3b^2c\sqrt[5]{7a^3b^7d}=6ab^2c\sqrt[5]{21a^5b^{10}d}=6a^2b^4c\sqrt[5]{21d}$.

5°. *La* DIVISION *de deux radicaux du même degré l'un par l'autre s'effectue en indiquant la division des quantités placées sous ces radicaux, et en mettant le quotient sous un radical du même degré.* Cela se déduit du principe du n° 65 (4°).

Ainsi, $\dfrac{\sqrt[3]{40a^4b^8}}{\sqrt[3]{10a^2b^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{40a^4b^8}{10a^2b^2}}=\sqrt[3]{4a^2b^6}=b^2\sqrt[3]{4a^2}$.

6°. *Pour* MULTIPLIER *et pour* DIVISER *des radicaux de degrés différens, on les réduit d'abord au plus petit indice commun, et on leur applique ensuite les règles indiquées* (4°) *et* (5°).

7°. *On obtient la* $n^{ième}$ PUISSANCE *d'un radical, en élevant la quantité qui est sous le radical à cette puissance,* car il résulte de (4°) que

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\ldots=\sqrt[m]{aaa\ldots}=\sqrt[m]{a^n}.$$

REMARQUE. Lorsque m et n sont premiers entre eux, on ne peut pas donner une forme plus simple à la puissance demandée.

Quand m est divisible par n, on obtient une expression plus simple de la puissance demandée, en divisant l'indice m par n; car, en désignant par p le quotient, on a $m = np$, et les principes démontrés (7°) et (1°) donnent

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[np]{a^n} = \sqrt[p]{a}.$$

En général, *pour obtenir la plus simple expression de la $n^{ième}$ puissance de $\sqrt[m]{a}$, on cherche le plus grand commun diviseur δ de m et n; la division de m et n par δ donne des quotiens, p, q, qui sont premiers entre eux; la puissance demandée est $\sqrt[p]{a^q}$*; car, d'après (7°) et (1°), on a

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[p\delta]{a^{q\delta}} = \sqrt[p]{a^q}.$$

On devra toujours faire usage de ce dernier procédé, et l'on parviendra de cette manière aux résultats suivans :

$$(\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}, \quad (\sqrt[6]{a})^3 = \sqrt[2]{a}, \quad (\sqrt[18]{a})^{12} = \sqrt[3]{a^2}.$$

8°. *On obtient la racine $n^{ième}$ d'un radical, en multipliant l'indice du radical par le degré n de la racine à extraire;* car, d'après (7°), la $n^{ième}$ puissance de $\sqrt[mn]{a}$ étant $\sqrt[m]{a}$, il s'ensuit que $\sqrt[mn]{a}$ est la racine $n^{ième}$ de $\sqrt[m]{a}$.

1re Remarque. Pour indiquer la racine $n^{ième}$ de $\sqrt[m]{a}$, on écrit $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Ainsi, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

2e Remarque. Lorsque $a = \alpha^n$, la racine $n^{ième}$ de $\sqrt[m]{a}$ devient $\sqrt[mn]{\alpha^n}$ et se réduit à $\sqrt[m]{\alpha}$.

On trouve de cette manière que la racine quatrième de $\sqrt{a^3}$ se réduit à $\sqrt[3]{a^2}$.

75. Lorsqu'on ne considère que les valeurs absolues des

quantités, la racine $n^{ième}$ d'un nombre positif a ne saurait avoir qu'une seule valeur c; car on conçoit que si $c^n = a$, toute quantité plus grande ou plus petite que c élevée à la $n^{ième}$ puissance donnera une quantité plus grande ou plus petite que a. Nous allons faire voir que lorsqu'on a égard aux signes de l'algèbre, *la racine $n^{ième}$ d'une quantité peut avoir plusieurs valeurs.*

76. Toute puissance de degré pair d'une quantité (positive ou négative) est positive, et toute puissance de degré impair d'une quantité a le signe de cette quantité (n° 65, 5°). On en déduit les propriétés suivantes :

1°. *Toute racine de degré pair d'une quantité positive a deux valeurs réelles égales et de signes contraires.* Ainsi,

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3, \quad \sqrt[4]{16a^8b^4} = \pm 2a^2b.$$

2°. *La racine de degré pair d'une quantité négative n'a aucune valeur réelle,* car toute puissance paire d'une quantité (positive ou négative) est une quantité positive. On dit par ce motif que cette racine est *imaginaire.*

Ainsi, $\sqrt[2]{-9}$ est une expression *imaginaire.*

En général, lorsque a désignant une quantité positive, n est un nombre pair, le radical $\sqrt[n]{-a}$ est *imaginaire;* mais cependant, d'après l'origine de ce *symbole imaginaire,* la $n^{ième}$ puissance de $\sqrt[n]{-a}$ est identiquement égale à $-a$.

3°. *Toute racine de degré impair d'une quantité a le signe de cette quantité.*

Ainsi, $\sqrt[3]{+8} = +2$ et $\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{+8}$.

77. Nous démontrerons par la suite que la racine $n^{ième}$ d'une quantité a a n valeurs différentes. De sorte que *tout radical a un nombre de valeurs marqué par son indice.* Ainsi, quand a est positif, si n est pair, $\sqrt[n]{a}$ a deux valeurs réelles $+a, -a$, et $n-2$ valeurs imaginaires; les n valeurs de $\sqrt[n]{-a}$ sont imaginai-

res ; lorsque n est impair, chacun des radicaux $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{-a}$ a une seule valeur réelle.

La valeur réelle positive d'un radical est ce qu'on nomme sa *valeur arithmétique*. Ainsi, la valeur arithmétique de $\sqrt{9}$ est $+3$, ou simplement 3.

78. *Les principes du* n° 74 (1° *et* 2°) *ne sont applicables qu'aux valeurs arithmétiques des radicaux réels.* Par exemple, la *valeur arithmétique* de $\sqrt[m]{a}$ est la même que celle de $\sqrt[mn]{a^n}$; mais ces radicaux ont des *valeurs algébriques* différentes, car le second radical a mn valeurs inégales, tandis que le premier n'a que m valeurs. Cependant, *les règles que nous avons données* (n° 74, 3°, 4°, 5°, 6°, 7° et 8°) *sont applicables aux valeurs algébriques des radicaux, en ayant soin de prendre la plus simple expression de la* $n^{ième}$ *puissance de* $\sqrt[m]{a}$ (n° 74, 7°), *et en prenant* $\sqrt[mn]{a}$ *pour la racine* $n^{ième}$ *de* $\sqrt[m]{a}$ (n° 74, 8°) (*).

Des exposans fractionnaires et négatifs.

79. La racine $n^{ième}$ de a^m, représentée par $\sqrt[n]{a^m}$, pouvant s'obtenir en divisant l'exposant m par n (n° 73, 1°), il en résulte que cette racine peut aussi s'indiquer en affectant a de l'*exposant fractionnaire* $\frac{m}{n}$. De sorte que $\sqrt[n]{a^m}$ *et* $a^{\frac{m}{n}}$ *désignent également la racine* $n^{ième}$ *de* a^m.

80. L'emploi des exposans négatifs et fractionnaires étant très commode dans les calculs, nous allons démontrer que *les règles des* n°s 9 (2°), 15 (2°), 65 (1°), 73 (1°) *et* 74, *sont*

(*) La démonstration de ces propriétés a paru pour la première fois en 1830, dans la 8e édition de mes *Elemens d'Algèbre*.

applicables à des exposans quelconques, positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires.

1°. Pour démontrer que *ces règles conviennent aux exposans entiers négatifs*, il suffit de transformer les exposans négatifs en exposans positifs à l'aide des formules

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n, \quad (\text{n° } 15, 2°).$$

Par exemple, $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$ et $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$; car

$$\frac{a^{+m}}{a^{-n}} = a^m \times \frac{1}{a^{-n}} = a^m \times a^n = a^{m+n}, \text{ et}$$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = (a^m)^n = a^{mn} = a^{(-m)\times(-n)}.$$

2°. Pour démontrer que *les mêmes règles conviennent aux exposans fractionnaires positifs*, il suffit de faire voir que

$$(1) \ldots a^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}, \quad a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}, \quad \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{pn}{m}}.$$

Or, les principes établis (*page* 82, 6°) donnent

$$\sqrt[m]{a^p} \times \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn+qm}}, \quad \sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn-qm}}, \quad \left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n = \sqrt[m]{a^{pn}},$$

et la transformation de ces radicaux en exposans fractionnaires conduit aux relations (1).

3°. Enfin, pour faire voir que *les règles indiquées s'appliquent aux exposans fractionnaires négatifs*, on prouvera d'abord que la formule (2) $\ldots \frac{1}{a^{\alpha}} = a^{-\alpha}$ convient à un exposant fractionnaire quelconque.

En effet, soit $\frac{p}{m} - \frac{q}{n} = \alpha$, il résulte de (2°) que

$$a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}} = a^{\alpha}, \quad a^{\frac{q}{n}} : a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{q}{n}-\frac{p}{m}} = a^{-\alpha}.$$

Multipliant ces équations membre à membre, et observant que le produit des premiers membres se réduit à l'unité, on

aura la relation, $1 = a^{\alpha} \times a^{-\alpha}$; d'où $\frac{1}{a^{\alpha}} = a^{-\alpha}$ et $\frac{1}{a^{-\alpha}} = a^{\alpha}$; ce qui démontre la formule (2).

On en déduirait, comme (1°), que les formules (1) (*page* 86) sont vraies pour des exposans fractionnaires négatifs.

Extraction des racines des polynomes.

81. Pour *extraire la racine n^ième^ d'un polynome quelconque* P, nous supposerons, dans le cours des opérations, que tous les polynomes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une lettre x; de sorte que par *premier terme* d'un polynome, il faudra entendre celui qui contient la plus forte puissance de x. Cela posé, soit $a+b+c+d+$etc., le polynome donné; si l'on désigne sa racine $n^{ième}$ par $\alpha+\zeta+\gamma+\delta+$etc., on aura

$$(\alpha+\zeta+\gamma+\delta+\text{etc.})^n = a+b+c+d+\text{etc.}$$

Pour trouver les termes, α, ζ, γ, δ, etc., de la racine R demandée, on dispose le calcul de la manière suivante :

$P = a+b+c+d+\text{etc.}$	$\sqrt[n]{a} + \frac{b}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}} + \text{etc.},$
$-\alpha^n$	
1er reste $R' = b+c+d+\text{etc.} = n\alpha^{n-1}\times\zeta+\text{etc.}$	$\alpha = \sqrt[n]{a}, \zeta = \frac{b}{n\alpha^{n-1}} = \frac{b}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}},$
2e reste $R'' = P-(\alpha+\zeta)^n = p+\text{etc.} = n\alpha^{n-1}\gamma+\text{etc.}$	
⋮	

Pour *calculer le premier terme* α *de la racine cherchée* R, on observe que la $n^{ième}$ puissance d'un polynome étant le produit de n facteurs égaux à ce polynome, il résulte du principe du n° 12, que le 1er terme a de cette puissance est la $n^{ième}$ puissance du 1er terme α de la racine. *On obtiendra donc le* 1er *terme* α *de la racine* R *demandée, en prenant la racine* $n^{ième}$ *du* 1er *terme du polynome donné* P.

Pour *déterminer le* 2e *terme* ζ *de la racine* R, *on développe la* $n^{ième}$ *puissance de* $\alpha+\zeta+\gamma+$etc., en regardant $\zeta+\gamma+$etc., comme un seul terme, ce qui donne

$P = \alpha^n + n\alpha^{n-1}(\zeta+\gamma+\text{etc.}) + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}(\zeta+\gamma+\text{etc.})^2+\text{etc.}$

Or, $P = a + b + c + \text{etc.}$, et $a = \alpha^n$.

Retranchant de ces deux expressions de P, les quantités égales α^n, a, les restes seront égaux, ce qui donnera

$$n\alpha^{n-1}(\zeta+\gamma+\text{etc.})+\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}(\zeta+\gamma+\text{etc.})^2+\text{etc.} = b+c+\text{etc.}$$

Par conséquent, si l'on développe le 1er membre de cette dernière égalité, le terme affecté du plus fort exposant de x sera égal à b. Or, il est facile de voir que ce terme est $n\alpha^{n-1}\zeta$; en effet, les termes affectés des plus forts exposans de x dans

$$(\zeta+\gamma+\text{etc.}),\ (\zeta+\gamma+\text{etc.})^2,\ \ldots,\ (\zeta+\gamma+\text{etc.})^k,$$

étant respectivement, ζ, ζ^2,..., ζ^k, les termes qui renferment les plus forts exposans de x dans les produits

$$\alpha^{n-1}(\zeta+\gamma+\text{etc.}),\ \alpha^{n-2}(\zeta+\gamma+\text{etc.})^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-k}(\zeta+\gamma+\text{etc.})^k,$$

sont $\alpha^{n-1}\times\zeta$, $\alpha^{n-2}\times\zeta^2$, ..., $\alpha^{n-k}\times\zeta^k$.

Tout se réduit donc à démontrer que l'exposant de x dans $\alpha^{n-1}\zeta$ est plus fort que dans $\alpha^{n-k}\zeta^k$. Cela deviendra évident si l'on observe que $\alpha^{n-1}\zeta = \alpha^{n-k}\zeta\times\alpha^{k-1}$,
et que $\alpha^{n-k}\zeta^k = \alpha^{n-k}\zeta\times\zeta^{k-1}$;
car l'exposant de x dans α^{k-1} est plus grand que dans ζ^{k-1}. On a donc $n\alpha^{n-1}\zeta = b$. On obtiendra donc le 2e terme ζ de la racine R demandée, en divisant b par $n\alpha^{n-1}$.

Remarque. On voit que *les deux premiers termes, α, ζ, de la racine $n^{ième}$ d'un polynome* P *se déduisent immédiatement des deux premiers termes, a, b, de ce polynome;* car la racine $n^{ième}$ du 1er terme a de P exprime le 1er terme α de la racine R demandée, et l'on obtient le 2e terme ζ de cette racine en divisant le 2e terme b de P, par n fois la $(n-1)^{ième}$ puissance du 1er terme $\sqrt[n]{a}$ de la racine R.

Pour *trouver le* 3e *terme γ de la racine* R *demandée*, on développera la $n^{ième}$ puissance de $\alpha+\zeta+\gamma+\delta+\text{etc.}$, par la formule du binome, en regardant $\alpha+\zeta$ comme le 1er terme

d'un binome et $\gamma + \delta +$ etc, comme le 2e terme; on retranchera ce développement de P, et l'on prouvera comme ci-dessus, que le 1er terme p du reste R$''$ sera égal à $n\alpha^{n-1}\gamma$; on obtiendra donc le 3e terme γ de R en divisant le 1er terme p du reste R$''$ par $n\alpha^{n-1}$. Et ainsi de suite.

82. On en déduit cette règle générale : *Pour extraire la racine n^{ième} d'un polynome* P, *ordonnez-le suivant les puissances décroissantes d'une lettre x contenue dans* P. *Concevez que la racine* R *demandée et les restes successifs soient ordonnés de la même manière, et disposez les calculs comme il a été indiqué* (page 87). *La racine n^{ième} du 1er terme de* P *sera le 1er terme α de* R. *Retranchez α^n de* P; *le 1er terme du reste, divisé par $n\alpha^{n-1}$, donnera le 2e terme ζ de* R. *Retranchez $(\alpha+\zeta)^n$ de* P; *le 1er terme du nouveau reste que vous obtiendrez, divisé par $n\alpha^{n-1}$, fournira le 3e terme γ de* R. *Et ainsi de suite.*

1re Remarque. *Lorsqu'en opérant de cette manière, on parviendra à un reste nul, les termes obtenus à la racine exprimeront la racine n^{ième} exacte du polynome donné P;* car chaque reste s'obtient en retranchant du polynome P, la $n^{ième}$ puissance de la somme des termes déjà obtenus à la racine.

Il en résulte que *dans tout le cours des opérations relatives à l'extraction de la racine n^{ième} d'un polynome P, la n^{ième} puissance de la partie de la racine déjà obtenue, ajoutée au reste correspondant, fournit une somme qui doit être égale au polynome P; quand cette condition n'est pas remplie, on a nécessairement commis des fautes de calcul.*

Exemple. *Soit proposé d'extraire la racine cinquième de*

$$810\,x^7 + 32x^{15} - 240x^{13} - 243x^5 + 720x^{11} - 1080x^9.$$

On ordonne ce polynome suivant les puissances décroissantes de x, et l'on effectue le calcul de la manière suivante :

$$P = 32x^{15} - 240x^{13} + 720x^{11} - 1080x^9 + 810x^7 - 243x^5 \quad \underline{2x^3 - 3x}$$
$$-32x^{15}$$

1er reste $R' = -240x^{13} + 720x^{11} - 1080x^9 + 810x^7 - 243x^5$

2e reste $R'' = P - (2x^3 - 3x)^5 = 0$.

La racine cinquième du 1er terme de P donne le 1er terme $2x^3$ de la racine R demandée. Retranchant de P la cinquième puissance de $2x^3$, on obtient le 1er reste $R' = -240x^{13} + \text{etc.}$; la division du 1er terme de ce reste, par $5(2x^3)^4$, fournit le 2e terme $-3x$ de R. On retranche de P la cinquième puissance de $2x^3 - 3x$; le reste R'' étant zéro, on voit que $2x^3 - 3x$ est la racine cinquième exacte du polynome proposé.

On trouvera de même que la racine quatrième de

$$a^8 - \frac{3b^2}{c}a^7 + \frac{27b^4}{8c^2}a^6 - \frac{27b^6}{16c^3}a^5 + \frac{81b^8}{256c^4}a^4 \text{ est } a^2 - \frac{3b^2}{4c}a.$$

2e Remarque. *Lorsqu'on parvient à un terme α de la racine, tel que l'exposant de x dans α^n est moindre que dans le dernier terme du polynome* P *dont on cherche la racine $n^{ième}$, la racine demandée est nécessairement irrationnelle*, c'est-à-dire qu'elle ne peut être exprimée exactement par un nombre fini de termes; car, d'après le principe du n° 12, la $n^{ième}$ puissance du dernier terme de la racine doit être égale au dernier terme de P.

3e Remarque. Si l'on fait $n = 2$, et si l'on observe que pour retrancher le quarré $p^2 + 2pq + q^2$, il suffit de soustraire successivement p^2 et $(2p + q) \times q$, on sera conduit à cette règle générale : *Pour extraire la racine quarrée d'un polynome quelconque* P, *ordonnez-le par rapport aux puissances d'une lettre x contenue dans* P. *Concevez que la racine* R *demandée et les restes successifs soient ordonnés de la même manière, et disposez les calculs comme il a été indiqué* (*page* 87). *La racine quarrée du 1er terme de* P *sera le 1er terme α de* R. *Retranchez α^2 de* P; *le 1er terme du reste* R', *divisé par 2α, donnera le 2e terme ζ de* R. *Retranchez de* R', *le produit de $2\alpha + \zeta$ par ζ; vous obtiendrez un 2e reste* R''; *la division du 1er terme de* R'' *par 2α donnera le 3e terme γ de* R. *Retranchez de* R'', *le produit de $2(\alpha + \zeta) + \gamma$ par γ, vous obtiendrez un 3e reste* R'''; *la division du 1er terme de* R''' *par 2α donnera le 4e terme δ de la racine. Et ainsi de suite.*

CHAPITRE IV.

Des Équations et des Problèmes du second degré. Des Fractions continues.

§ 1er. *Des Équations et des Problèmes du second degré.*

83. Quand l'équation du second degré, qu'il s'agit de résoudre, ne contient qu'une seule inconnue x et ne renferme pas la première puissance de x, on peut ramener cette équation à la forme $x^2 = a$, a désignant une quantité toute connue. La racine quarrée d'une quantité ayant deux valeurs égales et de signes contraires (n° 77), l'extraction de la racine quarrée des deux membres de l'équation $x^2 = a$, donne $\pm x = \pm\sqrt{a}$; ce qui ne fournit que deux valeurs distinctes $+\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$, de x, car

$+x = \pm\sqrt{a}$ donne $x = +\sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$,
et $-x = \pm\sqrt{a}$, donne $-x = +\sqrt{a}$, $-x = -\sqrt{a}$,
ce qui revient à $x = -\sqrt{a}$, $x = +\sqrt{a}$.

Par conséquent, *lorsqu'on extrait la racine quarrée des deux membres d'une équation, il suffit, pour obtenir toutes les valeurs de l'inconnue, de mettre le double signe* $\pm$ *devant la racine quarrée de l'un des membres.*

Les valeurs de x qui satisfont à l'équation $x^2 = a$, étant fournies par l'extraction de la *racine* quarrée de a, se nomment les *racines* de cette équation; et par analogie, *toute valeur de l'inconnue qui rend les deux membres d'une équation identiquement égaux, s'appelle une* RACINE *de cette équation.*

Lorsque a est une quantité réelle positive, les deux racines $+\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$, de l'équation $x^2 = a$, sont réelles.

Lorsque a est une quantité réelle négative $-b^2$, les deux

racines de l'équation $x^2 = -\delta^2$ sont *imaginaires;* car aucune quantité réelle (positive ou négative) élevée au quarré ne peut donner un résultat négatif. On a

$$x = \pm\sqrt{-\delta^2} = \pm\delta\sqrt{-1}, \text{ car } \sqrt{-\delta^2} = \sqrt{\delta^2 \times (-1)} = \sqrt{\delta^2}\sqrt{-1} = \delta\sqrt{-1}.$$

1re Remarque. Le *symbole* $\sqrt{-1}$ indiquant une expression, dont, par définition, le quarré est -1, (n° 72), il en résulte que

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1; \text{ d'où } \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}.$$

On en déduit, $(b\sqrt{-1})^2 = b^2(\sqrt{-1})^2 = b^2 \times (-1) = -b^2$,

$\sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-a}$, $\sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-b}$,

$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab}$,

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-\frac{a}{b}}$,

$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-1}\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{-1}\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{-\frac{a}{b}}$.

La formule $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, donne

$$(a + b\sqrt{-1}) \times (a - b\sqrt{-1}) = a^2 - (b\sqrt{-1})^2 = a^2 + b^2.$$

Ainsi, *le produit de deux facteurs imaginaires peut être réel.*

2e Remarque. Pour *transformer une fraction irrationnelle, de la forme* $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, *en une fraction équivalente dont le dénominateur soit rationnel,* il suffit de multiplier les deux termes de la fraction proposée par $b - \sqrt{c}$; car

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{ab - a\sqrt{c}}{b^2 - c}.$$

On trouve de cette manière que

$$\frac{13\sqrt{10} - 40}{22 - 7\sqrt{10}} = -(5 + \sqrt{10}).$$

84. Toute *équation complète du second degré à une seule inconnue* x peut se ramener à la forme $ax^2+bx+c=0$, les lettres, a, b, c, désignant des quantités entières connues.

Pour résoudre cette équation, on fait passer c dans le second membre, on divise tous les termes par a, et afin de simplifier les calculs, on pose $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$; elle devient

$$(1)\ldots\quad x^2+px=-q.$$

Nous allons *faire dépendre la résolution de cette équation de celle d'une équation du premier degré.* Cela serait facile si, le 1er membre étant un quarré, le 2e membre était une quantité toute connue, car il suffirait d'extraire la racine quarrée de chaque membre. Or, le quarré du binome $x+a$ étant $x^2+2ax+a^2$, si l'on regarde x^2+px, comme les deux premiers termes du quarré d'un binome, $\sqrt{x^2}$ ou x sera le 1er terme de ce binome, et $+px$ sera le double produit de ce 1er terme par le 2e; le 2e terme de ce binome sera donc $\frac{+px}{2x}$ ou $+\frac{1}{2}p$.

Par conséquent, *la quantité qu'il faut ajouter au* 1er *membre* x^2+px, *pour en faire le quarré de* $x+\frac{1}{2}p$, *est le quarré* $\frac{1}{4}p^2$ *de la moitié du coefficient de* x. Pour conserver l'égalité, on ajoutera aussi $\frac{1}{4}p^2$ au 2e membre; ce qui donnera

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=-q+\tfrac{1}{4}p^2.$$

Mais, d'après le calcul précédent, on sait que la racine quarrée du premier membre de cette nouvelle équation est $x+\frac{1}{2}p$; indiquant donc la racine quarrée du second membre, on a

$$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{-q+\tfrac{1}{4}p^2};\ \text{d'où,}$$

$$(2)\ldots\quad x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{-q+\tfrac{1}{4}p^2}.$$

La *formule* (2) détermine deux valeurs de x qui satisfont à l'équation (1); car il est facile de s'assurer que chacune d'elles, substituée dans (1), rend cette équation identique; ces deux valeurs de x sont les *racines* de l'équation (1).

Toute équation du second degré a donc deux racines.

85. La formule (2) démontre que, *dans toute équation du second degré, ramenée à la forme* $x^2+px=-q$, *l'inconnue* x *est égale à la moitié du coefficient du second terme pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine quarrée du deuxième membre augmenté du quarré de la moitié du coefficient de* x.

86. *La formule* (2) *fait connaître dans quel cas les racines de l'équation* (1) ... $x^2+px+q=0$, *sont réelles ou imaginaires*. En effet, on a (2)... $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$.

1°. *Lorsque* $\frac{1}{4}p^2-q$ *est positif, les deux racines de l'équation* (1) *sont réelles et inégales*. Cette condition ayant toujours lieu quand q est négatif, on voit que, *dans toute équation du second degré dont le dernier terme est négatif, les deux racines sont réelles.*

2°. *Quand* $\frac{1}{4}p^2-q$ *est zéro, chaque racine se réduit à* $-\frac{1}{2}p$; et comme q est égal à $\frac{1}{4}p^2$, le 1er membre de (1) devient le quarré de $x+\frac{1}{2}p$; c'est-à-dire que ce 1er membre est le produit de deux facteurs égaux; on dit par ce motif que *les deux racines sont* ÉGALES.

3°. Enfin, *lorsque* $\frac{1}{4}p^2-q$ *est négatif, ce qui exige que le dernier terme* q *soit positif, les deux racines sont imaginaires.*

Ces racines imaginaires peuvent se ramener à la forme $\alpha\pm\mathfrak{C}\sqrt{-1}$, α et $\mathfrak{C}$ désignant des quantités réelles; car en faisant $-\frac{1}{2}p=\alpha$ et $\frac{1}{4}p^2-q=-\mathfrak{C}^2$, les formu-

les (2) conduisent à $x = \alpha \pm \sqrt{-\mathfrak{C}^2} = \alpha \pm \mathfrak{C}\sqrt{-1}$.

Les deux racines $\alpha + \mathfrak{C}\sqrt{-1}$, $\alpha - \mathfrak{C}\sqrt{-1}$, qui ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-1}$, sont dites *conjuguées*.

Pour *découvrir le genre d'absurdité indiqué par les valeurs imaginaires de x*, on observe que la relation correspondante $\frac{1}{4}p^2 - q = -\mathfrak{C}^2$ donnant $q = \frac{1}{4}p^2 + \mathfrak{C}^2$, l'équation (1) ... $x^2 + px + q = 0$ devient

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 + \mathfrak{C}^2 = 0, \text{ ou } (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + \mathfrak{C}^2 = 0;$$

et $\mathfrak{C}$ n'étant pas nul, aucune valeur réelle de x ne saurait satisfaire à cette dernière équation, car la somme de deux quantités positives ne peut être égale à zéro.

87. Si l'on représente par x' et x'' les deux racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, les formules (2) (*page* 94) donneront

$$x' + x'' = -p, \quad x' \times x'' = q.$$

Par conséquent, *dans toute équation du second degré ramenée à la forme* $x^2 + px + q = 0$, *le coefficient du deuxième terme pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines de cette équation, et le dernier terme est égal au produit de ces racines.*

On en déduit le moyen de *déterminer les signes des racines d'une équation du second degré (quand ces racines sont réelles), sans qu'il soit nécessaire de la résoudre.* Par exemple, dans l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$, le produit des deux racines étant -8, elles sont de signes contraires; or, leur somme est $+2$, la racine positive est donc la plus grande; et en effet, ces racines sont $+4$ et -2.

88. Pour *déterminer les racines x', x'', de l'équation* (1) ... $ax^2 + bx + c = 0$, en fonction des coefficiens, a, b, c, il suffit de faire $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, dans la formule (2) (*page* 94);

on trouve

$$(3)\ldots\ x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Suivant que b^2-4ac est positif, ou nul, ou négatif, les racines, x', x'', sont réelles et inégales, ou réelles et égales, ou imaginaires.

89. Lorsque $a=0$, les formules (3) donnent

$$x' = \frac{0}{0},\quad x'' = -\frac{2b}{0}.$$

Ainsi, x' se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; et b n'étant pas nul, x'' est infini.

Dans ce cas, l'équation (1) devient $bx+c=0$, d'où $x=-\frac{c}{b}$; la *vraie valeur* de x' doit donc se réduire à $-\frac{c}{b}$.

La valeur $a=0$ réduisant à zéro les deux termes de l'expression (3) de x', on conçoit que ces deux termes doivent être divisibles par une certaine puissance positive du facteur a. Pour mettre ce facteur en évidence, il suffit d'extraire la racine quarrée de b^2-4ac; les deux premiers termes de cette racine sont b et $-\frac{2ac}{b}$; les autres termes contenant le facteur a^2, on peut représenter leur somme par Pa^2, de sorte que

$$\sqrt{b^2-4ac} = b-\frac{2ac}{b}+Pa^2.$$

Si l'on substitue cette valeur du radical dans l'expression (3) de x', le numérateur et le dénominateur contiendront le facteur commun a; en supprimant ce facteur commun, on trouvera

$$x' = -\frac{c}{b}+\frac{1}{2}Pa\text{; et } a=0\text{, donne } x'=-\frac{c}{b}.$$

On parvient au même résultat en multipliant les deux termes de l'expression (3) de x' par $b+\sqrt{b^2-4ac}$; car, d'après la

formule $(a+6)(a-6)=a^2-6^2$, on trouve

$$x'=\frac{-4ac}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

et en faisant $a=0$, cette dernière expression de x' se réduit à $-\frac{c}{b}$.

Lorsque a et b sont nuls, les expressions (3) des racines x', x'', prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Or, $a=0$ a donné $x'=-\frac{c}{b}$, $x''=-\frac{2b}{0}$; il suffit donc de faire $b=0$ dans ces dernières valeurs de x' et x'' ; ce qui donne $x'=-\infty$, $x''=\frac{0}{0}$. Pour évaluer x'', on multiplie les deux termes de l'expression (3) de x'' par $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, et l'on trouve

$$x=\frac{4ac}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Supposant $a=0$, $b=0$, on voit que $x''=\frac{2c}{0}=\infty$.

De sorte que les deux racines deviennent infinies.

Enfin, lorsque $a=0$ et $c=0$, les formules (3) donnent $x'=\frac{0}{0}$, $x''=-\infty$. Mais, comme l'hypothèse $a=0$ a donné $x'=-\frac{c}{b}$, il suffit de faire $c=0$ dans cette expression de x', ce qui donne $x'=0$. Ainsi, la racine x' est nulle et la racine x'' est infinie.

On parvient plus simplement aux mêmes résultats en faisant $x=\frac{1}{y}$; l'équation (1) devient $cy^2+by+a=0$.

Quand $a=0$, on a $(cy+b)y=0$; d'où

$$y = -\frac{b}{c},\ y = 0,\ x = -\frac{c}{b},\ x = \infty.$$

Lorsque $a = 0$ et $b = 0$, on a $cy^2 = 0$; les deux valeurs de y se réduisent à zéro, et les deux valeurs correspondantes de x sont infinies.

Enfin, si $a = 0$ et $c = 0$, on observe que $a = 0$ ayant donné $y = -\frac{b}{c}, y = 0$, il ne reste qu'à faire $c = 0$ dans ces valeurs de y, ce qui donne $y = -\infty, y = 0$; d'où $x = 0$ et $x = \infty$.

90. Ce qui précède donne le moyen de *résoudre les équations qui peuvent se ramener à la forme* (1)... $x^4 + px^2 + q = 0$; car, en faisant $x^2 = z$, l'équation (1) devient $z^2 + pz + q = 0$.

Cette dernière détermine deux valeurs, a, b, de z; et comme $x = \pm\sqrt{z}$, on voit que l'équation (1) a quatre racines, qui sont $\pm\sqrt{a}$, $\pm\sqrt{b}$.

91. 1er Problème. *Deux ouvriers, employés à des prix différens, furent payés après un certain temps. Le* 1er *reçut* 96 *francs; le* 2e, *qui avait travaillé six jours de moins que le* 1er, *reçut* 54 *francs. Si le* 2e *eût travaillé six jours de plus, et le* 1er *six jours de moins, ils eussent reçu chacun la même somme. On demande pendant combien de jours chaque ouvrier a travaillé, et le prix de la journée de chacun.* D'après cet énoncé :

Si le 1er ouvrier a travaillé pendant x jours, le 2e n'aura travaillé que pendant $x - 6$ jours. Or, le 1er ouvrier a reçu 96^f pour x journées; il gagnait donc $\frac{96^f}{x}$ par jour. Le 2e a reçu 54^f pour $x - 6$ journées; il gagnait donc $\frac{54^f}{x-6}$ par jour.

Si le 2e ouvrier eût travaillé six jours de plus, c'est-à-dire x jours, il eût reçu x fois $\frac{54^f}{x-6}$, ou $\frac{54x}{x-6}$ francs; et si le 1er ouvrier, qui gagne $\frac{96^f}{x}$ par jour, eût travaillé six jours de moins, c'est-à-dire $x - 6$ jours, il eût reçu $(x-6)$ fois $\frac{96^f}{x}$, ou...

$\frac{96(x-6)}{x}$ francs. Mais alors chaque ouvrier eût reçu la même somme ; il faut donc que

$$(1)\ldots\ldots \frac{54x}{x-6}=\frac{96(x-6)}{x}\text{ ; d'où } x=24 \text{ et } x=\frac{24}{7}.$$

Or, x et $x-6$, exprimant des nombres de journées, doivent être positifs ; la valeur 24 de x est donc la seule qui satisfasse à la question. Ainsi, le 1er ouvrier a reçu 96^f pour 24 journées ; il gagnait donc 4^f par jour. Le 2e ouvrier a reçu 54^f pour 18 journées ; il gagnait donc 3^f par jour. Si le 2e ouvrier eût travaillé six jours de plus, c'est-à-dire 24 jours, il eût reçu 24 fois 3^f ou 72^f ; et si le 1er ouvrier eût travaillé six jours de moins, c'est-à-dire 18 jours, il eût reçu 18 fois 4^f ou 72^f, comme l'exige l'énoncé du problème.

Remarque. La forme particulière de l'équation (1) conduit à une solution plus directe ; car cette équation donne

$$\frac{x^2}{(x-6)^2}=\frac{96}{54}=\frac{16}{9}\text{ ; d'où } \frac{x}{x-6}=\pm\frac{4}{3}.$$

Les valeurs des inconnues, x, $x-6$, devant être positives, on doit prendre $\frac{x}{x-6}=\frac{4}{3}$, d'où $x=24$.

92. 2e Problème. *La somme de deux nombres est* $2p$, *leur produit est* q ; *quels sont ces nombres ?*

Si x et y désignent les nombres cherchés, on aura

$$(1)\ldots\ x+y=2p,\quad xy=q.$$

L'élimination de y entre ces équations donne

$$(2)\ldots\ x^2-2px+q=0\ ;\quad \text{d'où,}$$

$$x=p+\sqrt{p^2-q}\quad\text{et}\quad x=p-\sqrt{p^2-q}.$$

Les valeurs correspondantes de y, déduites de $y=2p-x$, étant

$$p-\sqrt{p^2-q}\qquad\text{et}\qquad p^2+\sqrt{p^2-q},$$

on voit que les deux nombres cherchés sont les racines

(3)... $p+\sqrt{p^2-q}$, $p-\sqrt{p^2-q}$, de l'équation (2).

Par conséquent, *lorsqu'on connaît la somme 2p de deux nombres et leur produit q, ces deux nombres sont les racines*,

$p+\sqrt{p^2-q}$, $p-\sqrt{p^2-q}$, *de l'équation* $x^2-2px+q=0$.

Remarque. Lorsqu'on ne donne que la somme $2p$ de deux nombres positifs x, y, on n'a que la seule équation $x+y=2p$, entre x et y; ces deux nombres inconnus ont une infinité de valeurs, et leur produit q reste indéterminé. Cependant le produit q ne saurait croître indéfiniment; car les expressions (3) des nombres cherchés x, y, devant être réelles, la plus grande valeur du produit variable q est p^2.

Par conséquent, *Lorsque la somme 2p de deux quantités variables (réelles et positives) est donnée, la plus grande valeur du produit q de ces deux quantités a lieu quand elles deviennent égales entre elles, et ce* maximum *du produit est le quarré de la demi-somme des facteurs variables.*

Par exemple, la somme des facteurs variables $x-3, 11-x$, étant constamment égale à 8, quel que soit x, si l'on ne considère que les valeurs réelles de x qui rendent ces facteurs positifs, c'est-à-dire les valeurs de x comprises entre 3 et 11, on obtiendra la valeur de x qui rend le produit $(x-3)(11-x)$ le plus grand possible, en posant

$x-3=11-x$; d'où $x=7$ et $(x-3)(11-x)=4^2=16$.

On peut *démontrer directement la propriété précédente;* car la somme de deux quantités *variables* étant une constante $2p$, si l'une d'elles est représentée par $p+z$, l'autre sera $p-z$, et leur produit étant p^2-z^2, ce produit deviendra le plus grand possible quand z sera zéro, c'est-à-dire quand chaque facteur sera égal à la demi-somme p des facteurs variables.

§ II. *Des Fractions continues.*

93. *On nomme* FRACTION CONTINUE *une expression composée d'un nombre entier et d'une fraction qui a pour numérateur un nombre entier, et pour dénominateur un nombre entier plus une fraction; et ainsi de suite.*

Nous ne considérerons ici que des fractions continues de cette forme particulière (1)... $q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''}+\text{etc.}}$,

dans lesquelles, q, q', q'', etc., désigneront toujours des nombres entiers positifs.

Les quantités, q, $q+\frac{1}{q'}$, $q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''}}$, *etc., peuvent se mettre sous la forme de fractions ordinaires.* En effet :

$$q=\frac{q}{1},\quad q+\frac{1}{q'}=\frac{qq'+1}{q'}.$$

Changeant dans la dernière égalité, q' en $q'+\frac{1}{q''}$, et multipliant les deux termes de la fraction résultante par q'', on trouve, $q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''}}=\frac{(qq'+1)\,q''+q}{q'q''+1}$; et ainsi de suite.

Les fractions $\frac{q}{1}$, $\frac{qq'+1}{q'}$, $\frac{(qq'+1)\times q''+q}{q'\times q''+1}$, etc.,

ont reçu le nom de *fractions convergentes* ou de *réduites*, et les nombres q, q', q'', etc., se nomment *quotiens incomplets;* on verra (n°s 96, 98, 101) la raison de ces dénominations.

94. La comparaison des trois premières réduites conduit à cette règle générale : *Pour former les réduites successives qui correspondent à la fraction continue* (1), *écrivez les quo-*

tiens incomplets q', q'', q''', etc., par ordre, sur une ligne horizontale; calculez les deux premières réduites, $\frac{q}{1}$, $\frac{qq'+1}{q'}$, posez-les sous q' et q''; multipliez les deux termes de la 2e réduite par q''; les produits, augmentés respectivement des deux termes de la 1re réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la 3e réduite. Pour obtenir la 4e réduite, multipliez les deux termes de la 3e par q'''; les produits, augmentés respectivement des deux termes de la 2e réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la 4e réduite. Et ainsi de suite.

Cette loi ayant été vérifiée pour les trois premières réduites, il suffit de faire voir que, si elle a lieu pour trois réduites consécutives, $\frac{6}{\alpha}$, $\frac{6'}{\alpha'}$, $\frac{6''}{\alpha''}$, la réduite suivante $\frac{6'''}{\alpha'''}$, se déduira des deux précédentes, d'après la même loi.

Soient, γ, γ', γ'', les derniers quotiens incomplets contenus dans les réduites, $\frac{6'}{\alpha'}$, $\frac{6''}{\alpha''}$, $\frac{6'''}{\alpha'''}$; il faut prouver que, si

$$(2)\ldots \frac{6''}{\alpha''} = \frac{6'\gamma' + 6}{\alpha'\gamma' + \alpha}, \quad \text{on aura} \quad (3)\ldots \frac{6'''}{\alpha'''} = \frac{6''\gamma'' + 6'}{\alpha''\gamma'' + \alpha'}.$$

Or, on obtient $\frac{6'''}{\alpha'''}$ en remplaçant dans (2), γ' par $\gamma' + \frac{1}{\gamma''}$; et, par hypothèse, $(4)\ldots 6' = 6'\gamma' + 6$, $\alpha'' = \alpha'\gamma' + \alpha$.

Effectuant ce changement dans (2), et multipliant les deux termes de la fraction résultante par γ'', on trouve

$$\frac{6'''}{\alpha'''} = \frac{(6'\gamma' + 6)\gamma'' + 6'}{(\alpha'\gamma' + \alpha)\gamma'' + \alpha'} = \frac{6''\gamma'' + 6'}{\alpha''\gamma'' + \alpha'}.$$

La formule (3) n'est donc qu'une conséquence de la formule (2), ce qui démontre le principe énoncé.

95. Les relations (4) font voir que *les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives, sont d'autant plus grands que ces réduites sont plus éloignées de la première.*

REMARQUE. La quantité positive γ' n'étant jamais moindre que l'unité, on voit que $\mathcal{C}''$ ne peut être moindre que $\mathcal{C}' + \mathcal{C}$, et que α'' n'est jamais moindre que $\alpha' + \alpha$. Par conséquent; *lorsque la fraction continue se prolonge indéfiniment, il est toujours possible de trouver une réduite assez éloignée de la première, pour que son numérateur et son dénominateur soient aussi grands qu'on voudra.*

96. *Les réduites successives sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction continue totale; elles en approchent de plus en plus.* En effet, soient

$$x = q + \frac{1}{q'} + \ldots + \frac{1}{\gamma'} + \frac{1}{\gamma''} + \text{etc.} \qquad \frac{\mathcal{C}''}{\alpha''} = q + \frac{1}{q'} + \ldots + \frac{1}{\gamma'},$$

$$\gamma' + \frac{1}{\gamma''} + \text{etc.} = y. \text{ On aura } y > 1.$$

On voit que, pour déduire x de $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, il suffit de changer γ' en y dans la valeur de $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$. Si l'on effectue ce changement dans l'expression $\frac{\mathcal{C}'\gamma' + \mathcal{C}}{\alpha'\gamma' + \alpha}$ de $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, on trouvera (5)... $x = \frac{\mathcal{C}'y + \mathcal{C}}{\alpha' y + \alpha}$.

L'équation (5) exprime la relation qui existe entre la fraction continue totale x et les termes de deux réduites consécutives quelconques, $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$. Pour comparer les grandeurs de ces fractions, on met en évidence les différences entre x et chacune des réduites $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$. Or, la relation (5) donne successivement,

$$\alpha' xy + \alpha x = \mathcal{C}'y + \mathcal{C}, \quad y(\alpha' x - \mathcal{C}') = \mathcal{C} - \alpha x,$$

$$(6)\ldots \alpha' y\left(x - \frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}\right) = \alpha\left(\frac{\mathcal{C}}{\alpha} - x\right).$$

D'ailleurs, $\alpha' y$ et α étant positifs, la relation (6) démontre

que les différences, $x-\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}-x$, sont toujours de même signe ; *la valeur de la fraction continue totale* x *est donc comprise entre deux réduites consécutives quelconques*, $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathfrak{C}''}{\alpha''}$.

La formule (6) prouve en outre que *la réduite* $\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}$ *approche plus de la fraction continue totale* x, *que la réduite précédente* $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$, c'est-à-dire que $x-\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}<\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}-x$; car, les inégalités $\alpha'>\alpha$, $\gamma>1$, donnant $\alpha'\gamma>\alpha$, la relation (6) exige que le multiplicateur $x-\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}$, de $\alpha'\gamma$, soit moindre que le multiplicateur $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}-x$ de α.

Remarque. La 1re réduite $\frac{q}{1}$ étant moindre que la fraction continue totale x, *les réduites de rang impair sont trop petites et les réduites de rang pair sont trop grandes* ; et d'ailleurs, comme ces réduites approchent de plus en plus de x, *les réduites de rang impair vont en augmentant, tandis que celles de rang pair vont en diminuant.*

97. *La différence entre deux réduites consécutives quelconques* $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}$, *est une fraction ordinaire qui a l'unité pour numérateur.* En effet, lorsque $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$ est de rang pair, on a

$$\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}>x,\ \frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}<x,\ \frac{\mathfrak{C}''}{\alpha''}>x;\quad \text{donc}\quad \frac{\mathfrak{C}}{\alpha}>\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}\quad\text{et}\quad \frac{\mathfrak{C}''}{\alpha''}>\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}.$$

La formule (2), (*page* 102), donne

$$\frac{\mathfrak{C}''}{\alpha''}-\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}=\frac{\mathfrak{C}'\gamma+\mathfrak{C}}{\alpha'\gamma+\alpha}-\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}=\frac{\alpha'\mathfrak{C}-\alpha\mathfrak{C}'}{(\alpha'\gamma+\alpha)\alpha'};\ \text{or,}\ \frac{\mathfrak{C}}{\alpha}-\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}=\frac{\alpha'\mathfrak{C}-\alpha\mathfrak{C}'}{\alpha\alpha'}.$$

Les différences entre les réduites consécutives ont donc des numérateurs égaux. Mais, la différence $\frac{1}{q'}$, entre les deux pre-

mières réduites, a l'unité pour numérateur; le principe est donc démontré. Par conséquent, $\alpha'\mathfrak{C} - \alpha\mathfrak{C}' = 1$.

98. *Les fractions convergentes, formées d'après la règle du n° 94, sont irréductibles;* car, si elles ne l'étaient pas, il existerait un facteur commun δ entre les deux termes, α, $\mathfrak{C}$, d'une réduite $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$; or, $\alpha'\mathfrak{C} - \alpha\mathfrak{C}' = 1$, (n° 97); δ diviserait donc le premier membre $\alpha'\mathfrak{C} - \alpha\mathfrak{C}'$; δ devrait donc diviser le second membre 1, ce qui n'est pas possible.

99. *Lorsqu'on prend une réduite au lieu de la fraction continue totale, l'erreur est moindre que l'unité divisée par le quarré du dénominateur de cette réduite.*

En effet, la valeur de la fraction continue totale x étant comprise entre deux réduites consécutives quelconques, $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathfrak{C}'}{\alpha'}$, l'erreur e, commise en prenant $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$ au lieu de x, est moindre que la différence $\frac{1}{\alpha\alpha'}$ entre ces réduites, (n° 51, 8°).

Or, $\frac{1}{\alpha^2} > \frac{1}{\alpha\alpha'}$, car $\alpha' > \alpha$; donc $e < \frac{1}{\alpha^2}$.

100. *Pour obtenir la valeur d'une fraction continue, à moins de $\frac{\gamma}{\delta}$ d'unité, il suffit de prendre une réduite telle que son dénominateur soit plus grand que la racine quarrée de $\frac{\delta}{\gamma}$;* car, l'erreur commise, en prenant la réduite $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$ au lieu de la fraction continue totale, étant moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$, il ne s'agit que de satisfaire à l'inégalité $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{1}{\alpha^2}$; d'où $\alpha > \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

Pour remplir cette dernière condition, on continue les calculs du n° 94, jusqu'à ce qu'on parvienne à une réduite dont

le dénominateur s surpasse la plus petite valeur entière approchée de la racine quarrée de $\frac{b}{a}$.

REMARQUE. *Lorsque la fraction continue se prolonge indéfiniment, on peut toujours calculer sa valeur avec autant d'exactitude qu'on veut;* car il résulte de la remarque du n° 95, qu'on parviendra toujours à une réduite dont le dénominateur sera plus grand que la racine quarrée de $\frac{b}{a}$.

101. *Pour exprimer une quantité quelconque x en fraction continue, calculez d'abord la plus petite valeur entière approchée q de x; faites $x = q + \frac{1}{y}$; y sera plus grand que* 1. *Cherchez la plus petite valeur entière approchée q' de y, et posez $y = q' + \frac{1}{z}$. Déterminez la plus petite valeur entière approchée q'' de z; et ainsi de suite. La valeur de x sera exprimée par la fraction continue* (1) (*page* 101). *Selon que x sera commensurable ou incommensurable, cette fraction continue se terminera ou ne se terminera pas.*

1er EXEMPLE. *Convertir une fraction $\frac{b}{a}$ en fraction continue.*

On divise b par a, ce qui fournit un quotient entier q et un reste $r < a$; q exprime la plus petite valeur entière approchée de $\frac{b}{a}$, et l'on a $\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a} = q + \frac{1}{y}$; d'où $y = \frac{a}{r}$, et $y > 1$.

Divisant a par r, on obtient un quotient entier q' et un reste $r' < r$; d'ailleurs, q' étant la plus petite valeur entière approchée de y, on a

$$y = \frac{a}{r} = q' + \frac{r'}{r} = q' + \frac{1}{z}; \quad \text{d'où} \quad z = \frac{r}{r'}, \quad \text{et} \quad z > 1.$$

Les *quotiens incomplets*, q, q', q'', *etc.*, et les restes successifs, r, r', r'', etc., étant les mêmes que ceux auxquels on serait conduit, si l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre les deux termes, a, b, de la fraction proposée, on

parviendra nécessairement à un reste qui divisera exactement le reste précédent; et, par conséquent, *la fraction* $\frac{b}{a}$ *sera exprimée par la fraction continue* (1) (*page* 101) *qui se terminera toujours.*

Remarque. *Pour trouver des fractions ordinaires plus simples qu'une fraction donnée et qui en approchent de plus en plus, on convertit d'abord cette fraction en fraction continue, et l'on forme les réduites successives* (n° 94). *Ces réduites jouissent de la propriété demandée.*

2e Exemple. Soit la fraction $\frac{31415}{100000}$; la recherche du plus grand commun diviseur entre ses deux termes donne les quotiens entiers successifs, 3, 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4; on déduit des règles des nos 94 et 101, que les réduites sont

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{9208}{2931}, \frac{9563}{3044}, \frac{76149}{24239}, \frac{314159}{100000}$$ (*).

Remarque. Les deux termes de chaque réduite étant premiers entre eux (n° 98), il suit de là que si l'on convertit en fraction continue, une fraction ordinaire dont les deux termes ont un facteur commun, en formant ensuite les réduites successives (n° 94), la dernière de ces réduites sera l'expression la plus simple de la fraction ordinaire qui a été convertie en fraction continue.

3e Exemple. *Soit l'équation exponentielle* $10^x = 3$.

La plus petite valeur entière approchée de x est $q = 0$; car $x = 0$ donne $10^x = 1$, et $x = 1$ donne $10^x = 10$.

Posant donc $x = \frac{1}{y}$, on a $y > 1$, $3 = 10^{\frac{1}{y}}$, $3^y = 10$.

La plus petite valeur entière approchée de y est $q' = 2$;

(*) On verra dans la Géométrie que les fractions $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{314159}{100000}$, sont des valeurs approchées du *rapport de la circonférence au diamètre.*

car $y=2$ donne $3^y=9$, et $y=3$ donne $3^y=27$. On fait donc

$y=2+\frac{1}{z}$; d'où $10=3^y=3^{2+\frac{1}{z}}=3^2\times 3^{\frac{1}{z}}$, et $\left(\frac{10}{9}\right)^z=3$.

Donnant à z les valeurs, $2, 3, \ldots, 10, 11$, on verra que la plus petite valeur entière approchée de z est $q''=10$, Posant $z=10+\frac{1}{t}$, on trouvera que la plus petite valeur entière approchée de t est $q'''=2$; et ainsi de suite. On en déduira que les réduites successives sont $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{21}{44}$, etc. Si l'on prend $x=\frac{21}{44}=0,47727$ etc., cette valeur de x sera trop grande (n° 96), mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{44^2}$ (n° 99) ou que $0,0005$ etc.

102. *Une réduite quelconque* $\frac{c'}{a'}$ *exprime la valeur de la fraction continue totale* x, *plus exactement que toute fraction* $\frac{b}{a}$ *dont le dénominateur serait moindre que* a'.

Cette propriété ayant été démontrée (n° 96) quand $\frac{b}{a}$ est une des réduites, il suffit de considérer le cas où $\frac{b}{a}$ n'est pas une des réduites.

Je dis d'abord que la fraction $\frac{b}{a}$ ne peut être comprise entre la réduite $\frac{c'}{a'}$ et la réduite précédente $\frac{c}{a}$. En effet, si $\frac{b}{a}$ était comprise entre ces réduites, la différence entre $\frac{c}{a}$ et $\frac{b}{a}$ serait numériquement moindre que la différence des deux réduites $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$, (n° 51, 8°) ; de sorte qu'on aurait,

$\pm\left(\frac{a\mathcal{C}-b\alpha}{a\alpha}\right)<\frac{1}{\alpha\alpha'}$ (n° 97); d'où $\pm(a\mathcal{C}-b\alpha)<\frac{a}{\alpha'}$.

Or, cette dernière inégalité ne saurait subsister; car $\frac{b}{a}$ n'étant pas égal à $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, le nombre entier $\pm(a\mathcal{C}-b\alpha)$ ne peut avoir une valeur absolue moindre que l'unité, et a étant plus petit que α', le quotient de a par α' est moindre que l'unité.

Par conséquent, la fraction $\frac{b}{a}$ est plus grande que la plus grande des réduites, $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, ou plus petite que la plus petite de ces réduites.

Supposons, pour fixer les idées, que $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$ soit une réduite de rang pair. On aura $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}>x$, $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}<x$, (n°96).

Si $\frac{b}{a}>\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, les quantités $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, x, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, $\frac{b}{a}$, formeront une suite croissante; la réduite $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$ approchera donc plus de x que la fraction $\frac{b}{a}$.

Si $\frac{b}{a}<\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, les quantités $\frac{b}{a}$, $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, x, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, formeront une suite croissante; la réduite $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ approchera donc plus de x que la fraction $\frac{b}{a}$; et comme la réduite $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$ approche plus de x que la réduite précédente $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ (n° 96), il en résulte que $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$ approche plus de x que $\frac{b}{a}$.

On raisonnerait d'une manière semblable, si la réduite $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$ était de rang impair.

103. La propriété du n° 97 fournit le moyen de *trouver une solution entière d'une équation quelconque du* 1er *degré à deux inconnues ;* à cet effet, on ramène d'abord cette équation à l'une des formes $\pm ax \pm by = c$, (a, b, c, désignant des nombres entiers positifs qui n'ont aucun diviseur commun). Pour que l'équation proposée admette des solutions entières, il faut et il suffit que a et b soient premiers entre eux (n°s 55 et 56). On convertit la fraction irréductible $\frac{b}{a}$ en fraction continue (n° 101); on forme les réduites successives (n° 94), la dernière est $\frac{b}{a}$; et si $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ désigne la réduite précédente, on a $a\mathcal{C} - b\alpha = \pm 1$, (n^e^ 97).

Quand $a\mathcal{C} - b\alpha = 1$, on a $ac\mathcal{C} - bc\alpha = c$.

On obtient donc une solution de $ax + by = c$, en prenant $x = c\mathcal{C}$, $y = -c\alpha$.

On trouverait une solution de $-ax + by = c$, en prenant $x = -c\mathcal{C}$, $y = -c\alpha$. Et ainsi de suite.

Quand $a\mathcal{C} - b\alpha = -1$, on a $-ac\mathcal{C} + bc\alpha = c$; et en comparant cette dernière égalité à l'équation $\pm ax \pm by = c$, on en déduit une solution $x = \mp c\mathcal{C}$, $y = \pm c\alpha$, de l'équation proposée.

D'après cette discussion,

si $a\mathcal{C} - b\alpha = +1$, les solutions des équations

$ax+by=c$, $-ax+by=c$, $ax-by=c$, $-ax-by=c$,

seront respectivement

$x=+c\mathcal{C}, y=-c\alpha$; $x=-c\mathcal{C}, y=-c\alpha$; $x=+c\mathcal{C}$, $y=+c\alpha$; $x=-c\mathcal{C}$, $y=c\alpha$;

et si $a\mathcal{C} - b\alpha = -1$, les solutions des mêmes équations seront

$x=-c\mathcal{C}$, $y=c\alpha$; $x=c\mathcal{C}$, $y=c\alpha$; $x=-c\mathcal{C}$, $y=-c\alpha$; $x=c\mathcal{C}$, $y=-c\alpha$.

Lorsqu'on aura trouvé de cette manière une solution entière de l'équation proposée, il sera facile d'en déduire toutes les autres solutions entières de cette équation (n° 57)

CHAPITRE V.

Rapports, Proportions, Progressions et Logarithmes.

§ Ier. *Des rapports, des proportions et des progressions.*

104. La théorie des *rapports* et des *proportions* ayant été traitée complètement dans l'Arithmétique, nous allons nous occuper des *progressions*.

Des Progressions arithmétiques ou par différence.

105. *La progression arithmétique ou par différence, est formée d'une suite de termes tels, que si l'on retranche de chaque terme celui qui le précède, on obtient une différence constante.* Cette différence est la *raison* de la progression.

D'après cette définition, si l'on désigne par a le 1er terme et par d la *raison*, le 2e terme sera $a+d$, le 3e sera $a+2d$, ... ; et en général, le $n^{ième}$ terme sera $a+(n-1)d$.

Un terme d'un rang quelconque est donc égal au premier terme augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

L'ensemble de ces termes s'écrit ainsi,

$$\therefore a,\ (a+d).(a+2d).(a+3d).(a+4d).\ldots\ldots$$

Suivant que la valeur de la *raison* d est positive ou négative, la progression est *croissante* ou *décroissante*.

Si l'on représente le nombre des termes par n, leur somme par s et le dernier terme par ω, on aura (1)... $\omega = a+(n-1)d$,

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + \{a+(n-1)d\}.$$

On obtient une expression plus simple de la somme s en observant que sa valeur pouvant se mettre sous les deux formes

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (\omega-2d) + (\omega-d) + \omega,$$
$$s = \omega + (\omega-d) + (\omega-2d) + \ldots + (a+2d) + (a+d) + a,$$

si l'on ajoute ces équations membre à membre, et si l'on observe que la somme de deux termes du même rang se réduit à $a+\omega$, on verra que $2s = n$ fois $(a+\omega)$, d'où

$$(2)\ldots\ s=\tfrac{1}{2}n(a+\omega).$$

Remarque. La relation (1) fournit le moyen d'*insérer m moyens arithmétiques entre deux nombres*, a, ω; car il suffit de chercher la raison d d'une progression arithmétique, dont le 1er terme est a, dont le dernier terme est ω, et dont le nombre des termes est $m+2$. La relation (1) donne

$$\omega = a + (m+1)d; \quad \text{d'où} \quad d=\frac{\omega-a}{m+1}.$$

Cette formule démontre que *pour obtenir la raison de la progression demandée, il suffit de prendre la différence entre les deux nombres donnés, et de diviser cette différence par le nombre des moyens arithmétiques augmenté de* 1.

106. Les équations, (1), (2), donnent le moyen de résoudre ce problème général : *Connaissant trois des cinq quantités, a, d, n, ω, s, qui entrent dans une progression arithmétique, déterminer les deux autres.* Cette question fournit dix problèmes dont les solutions n'offrent aucune difficulté; car on a toujours deux équations pour déterminer les deux inconnues, et les équations à résoudre sont du premier ou du second degré. Les formules relatives à ces problèmes sont réunies dans le *tableau* ci-joint. Nous nous bornerons ici à traiter les cas qui conduisent à une équation du second degré.

1er Problème. *Connaissant, a, s et d, trouver n et ω.*

On élimine ω entre (1) et (2), ce qui conduit à

$$(3)\ldots\ n=\frac{1}{2d}\left[d-2a\pm\sqrt{(d-2a)^2+8ds}\right].$$

La formule (3) fournit deux valeurs de n; et la substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donne les valeurs correspondantes de ω. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que n soit un nombre entier positif.

1er. Exemple. *Soient*, $a=+9$, $s=21$, $d=-2$.

R. Notes sur l'Algèbre, 7e édition, (*page* 112).

Formules relatives aux progressions arithmétiques.

Données.	Inconnues.	VALEUR DES INCONNUES.
a, d, n	ω, s	$\omega = a+(n-1)d,\ s=\frac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)d\right\}.$
s, d, n	a, ω	$a=\frac{2s-n(n-1)d}{2n},\quad \omega=\frac{2s+n(n-1)d}{2n}.$
ω, d, n	a, s	$a=\omega-(n-1)d,\ s=\frac{1}{2}n\left\{2\omega-(n-1)d\right\}.$
a, ω, n	s, d	$s=\frac{1}{2}n(a+\omega),\quad d=\frac{\omega-a}{n-1}.$
a, s, n	ω, d	$\omega=\frac{2s}{n}-a,\quad d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}.$
ω, s, n	a, d	$a=\frac{2s}{n}-\omega,\quad d=\frac{2(n\omega-s)}{n(n-1)}.$
a, ω, d	n, s	$n=\frac{\omega-a}{d}+1,\quad s=\frac{(\omega+a)\ (\omega-a+d)}{2d}.$
a, s, d	n, ω	$n=\frac{(d-2a)\pm\sqrt{(d-2a)^2+8ds}}{2d},\ \omega=a+(n-1)d.$
ω, d, s	n, a	$n=\frac{(d+2\omega)\pm\sqrt{(d+2\omega)^2-8ds}}{2d},\ a=\omega-(n-1)d.$
a, ω, s	n, d	$n=\frac{2s}{a+\omega},\quad d=\frac{(\omega+a)\ (\omega-a)}{2s-(\omega+a)}.$

La formule (3) donne $n=+3, n=+7$; les valeurs correspondantes de a, déduites de l'équation (1), sont $+5$ et -3; ce qui détermine les deux progressions

$$\div 9.7.5, \quad \| \quad \div 9.7.5.3.1.-1.-3.$$

2e Exemple. *Soient*, $a=3$, $s=24$, $d=2$.

On trouve, $n=4$, $n=-6$. La seule progression qui satisfasse à la question est donc, $\div 3.5.7.9$.

2e Problème. *Connaissant*, a, s, d, *trouver* n *et* a.

L'équation (1) donne (4)... $a=a-(n-1)d$.

La substitution de cette valeur de a dans (2) conduit à

$$n=\frac{1}{2d}\left[d+2a \pm \sqrt{(d+2a)^2-8ds}\right].$$

Cette formule détermine n, et l'équation (4) fournit les valeurs correspondantes de a.

Exemple. *Soient*, $a=9$, $s=21$, $d=2$.

On trouve $n=3$, $n=7$; les valeurs correspondantes de a sont $+5$ et -3; ce qui donne les progressions

$$\div 5.7.9, \quad \div -3.-1.+1.+3.+5.+7.+9.$$

Des progressions géométriques ou par quotient.

107. *La progression géométrique ou par quotient est formée d'une suite de termes tels, qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède, le quotient reste constant;* ce quotient est la *raison* de la progression.

D'après cette définition, si l'on désigne par a le 1er terme et par q la *raison*, le 2e terme sera aq, le 3e terme sera aq^2,..; et en général, le $n^{ième}$ terme sera aq^{n-1}.

Un terme d'un rang quelconque est donc égal au premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent.

L'ensemble de ces termes s'écrit ainsi,

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 :.....$$

Suivant que la raison q est plus grande ou plus petite que l'unité, la progression est *croissante* ou *décroissante*.

Si l'on représente le nombre des termes par n, leur somme par s, et le dernier terme par u, on aura (1).. $u = aq^{n-1}$

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$

Il est facile d'obtenir une valeur plus simple de s; car

$$s = a + q\,(a + aq + \ldots\ldots + aq^{n-2}) = a + q\,(s - aq^{n-1}); \text{ et}$$

$s = a + q\,(s - aq^{n-1})$ donne (2)... $s = \dfrac{a\,(q^n - 1)}{(q-1)}$.

108. Les équations (1) et (2) donnent le moyen de résoudre ce problème général : *Connaissant trois des cinq quantités*, a, q, n, u, s, *qui entrent dans une progression géométrique, déterminer les deux autres*. Ce problème fournit dix questions analogues à celles du n° 106. Les formules qui servent à résoudre ces questions sont réunies dans le *tableau* ci-contre. Nous allons traiter, parmi ces questions, celles qui présentent des difficultés.

1er Problème. *Connaissant, a, u et n, déterminer q et s.*

L'équation (1)... $u = aq^{n-1}$ donne (3)... $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{u}{a}}$.

Cette valeur de q substituée dans (2), déterminerait s.

Mais on peut abréger ce calcul; car l'équation (1) donnant $uq = aq^n$, la formule (2) conduit à $s\,(q-1) = uq - a$.

Mettant la valeur (3) de q dans cette dernière équation, et multipliant ensuite les deux membres par $\sqrt[n-1]{a}$, on trouve

$$\left(\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}\right) s = u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}; \text{ d'où } s = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Remarque. La formule (3) donne le moyen d'*insérer m moyens géométriques entre deux nombres donnés, a, u;* car cela revient à trouver la raison q d'une progression géométrique

R. Notes sur l'Algèbre, 7e édition, (*page* 114).

Formules relatives aux progressions géométriques.

Données.	Inconnues.	VALEURS DES INCONNUES.
a, q, n	u, s	$u = aq^{n-1}, \quad s = \dfrac{a(q^n-1)}{(q-1)}.$
s, q, n	a, u	$a = \dfrac{s(q-1)}{q^n-1}, \quad u = \dfrac{s(q-1)\,q^{n-1}}{q^n-1}.$
u, q, n	a, s	$a = \dfrac{u}{q^{n-1}}, \quad s = \dfrac{(q^n-1)u}{(q-1)q^{n-1}}.$
a, u, n	q, s	$q = \sqrt[n-1]{\dfrac{u}{a}}, \quad s = \dfrac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}.$
a, s, n	q, u	$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1 = \dfrac{s}{a}, \quad u = aq^{n-1}.$
u, s, n	q, a	$(s-u)q^{n-1} - u(q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q^2 + q + 1) = 0, \quad a = \dfrac{u}{q^{n-1}}.$
a, u, q	s, n	$s = \dfrac{uq-a}{q-1}, \quad n = 1 + \dfrac{lu - la}{lq}.$
a, s, q	u, n	$u = \dfrac{a + s(q-1)}{q}, \quad n = \dfrac{l(sq-s+a) - la}{lq}.$
u, q, s	a, n	$a = uq - s(q-1), \quad n = 1 + \dfrac{lu - l(uq+s-sq)}{lq}.$
a, u, s	q, n	$q = \dfrac{s-a}{s-u}, \quad n = 1 + \dfrac{lu - la}{l(s-a) - l(s-u)}.$

dont le 1er terme est a, dont le dernier terme est ω, et dont le nombre des termes est $m+2$; et la relation (3) donnant

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{\omega}{a}},$$

on voit que *Pour obtenir la raison de la progression demandée, il suffit de diviser les nombres donnés l'un par l'autre, et d'extraire du quotient la racine dont le degré est marqué par le nombre des moyens géométriques augmenté d'une unité.*

2e Problème. *Connaissant, a, s, n, trouver q et ω.*

On a (1)... $\omega=aq^{n-1}$, (4)... $s=a+aq+..+aq^{n-1}$.

L'équation (4) sert à calculer q, et ensuite les valeurs correspondantes de ω se déduisent de (1).

Exemple. *Soient*, $a=5$, $s=35$, $n=3$.

L'équation (4) devient $q^2+q=6$; d'où $q=2$, $q=-3$.

Les valeurs correspondantes de ω, déduites de (1), sont $+20$ et $+45$; ce qui détermine les deux progressions

$$\div\div 5 : 10 : 20, \quad \div\div +5 : -15 : +45.$$

3e Problème. *Connaissant, ω, s, n, trouver q et a.*

On élimine a entre les équations (1) et (4), ce qui conduit à l'équation du $(n-1)^{ième}$ degré

(5)... $(s-\omega)\,q^{n-1}-\omega\,(q^{n-2}+q^{n-3}+...+q^2+q+1)=0$.

Cette équation détermine q, et ensuite les valeurs correspondantes de a se déduisent de la relation (1).

Exemple. *Soient*, $\omega=20$, $s=35$, $n=3$.

L'équation (5) donne $q=2$, $q=-\frac{2}{3}$; les valeurs correspondantes de a, déduites de (1), sont $+5$ et $+45$; ce qui fournit les deux progressions

$$\div\div 5 : 10 : 20, \quad \div\div +45 : -30 : +20.$$

109. Quand le nombre n des termes est inconnu, la valeur de n dépend d'une équation de la forme $a^n=c$, dans laquelle

a et c sont des nombres connus. Pour résoudre cette équation, il suffit de prendre les logarithmes des deux membres; car, d'après ce qui a été démontré dans l'Arithmétique, le logarithme de a^n étant égal à n fois le logarithme de a, on a

$$n \times \log a = \log c\,; \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log c}{\log a}.$$

4e Problème. *Connaissant, u, a et q, trouver s et n.*

La relation $s(q-1) = uq - a$, (page 114), détermine s.

Pour calculer n, on prend les logarithmes des deux membres de l'équation $u = aq^{n-1}$, ce qui donne

$$\log u = \log a + (n-1) \times \log q\,; \text{ d'où } n = 1 + \frac{\log u - \log a}{\log q}.$$

Des calculs analogues aux précédens conduiront aux formules qui servent à déterminer les inconnues, lorsque les trois *données* sont q, s, a, ou u, q, s, ou u, a, s.

110. Problème. *Connaissant le premier terme a, et la raison q, d'une progression géométrique décroissante prolongée à l'infini, calculer la somme de tous les termes de cette progression.*

Il résulte de l'énoncé de la question, que l'on a $q < 1$, $n = \infty$. La valeur de s dépend de la relation

$$(2) \ldots \quad s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Les nombres a et q étant donnés, la dernière expression de s fait voir que, n augmentant indéfiniment, la somme *variable* s approche aussi indéfiniment de la *constante* $\frac{a}{1-q}$; car, q étant moindre que l'unité, q^n diminue à mesure que n augmente. On pourra donc toujours prendre assez de termes pour que leur somme diffère de la *constante* $\frac{a}{1-q}$ d'une quantité moindre que toute grandeur donnée. Enfin, à la *limite*, quand la progression se prolonge à l'infini, n est infiniment

grand, $\frac{aq^n}{1-q}$ se réduit à zéro, et la somme de tous les termes est *rigoureusement* égale à $\frac{a}{1-q}$.

La somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante prolongée à l'infini, est donc égale au premier terme de cette progression divisé par l'unité moins la raison.

On trouve de cette manière que la fraction décimale périodique 0,272727 etc., est égale à $\frac{27}{99}$; car elle est équivalente à la somme de tous les termes de la progression indéfinie

$$\frac{27}{100} : \frac{27}{100^2} : \frac{27}{100^3} : \frac{27}{100^4} : \text{etc.},$$

dans laquelle, $n = \infty$, $a = \frac{27}{100}$, $q = \frac{1}{100}$; et par suite la règle énoncée donne $s = \frac{27}{99}$.

§ III. *Théorie algébrique des Logarithmes.*

111. Il existe une *analogie remarquable entre les propriétés des* LOGARITHMES, *démontrées dans l'Arithmétique, et les règles relatives aux* EXPOSANS.

Par exemple, dans la multiplication, le LOGARITHME du *produit* de plusieurs facteurs est égal à la *somme* des logarithmes de ces facteurs, et de même l'EXPOSANT du *produit* de plusieurs puissances d'une quantité est égal à la *somme* des exposans de ces puissances. Cette concordance entre les logarithmes et les exposans ayant également lieu dans la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, on est conduit à penser que *les logarithmes peuvent être considérés comme des exposans.*

Nous allons faire voir que *tous les systèmes de logarithmes* dont nous avons parlé en Arithmétique, *peuvent se déduire d'une relation de la forme* (1) ... $a^x = y$. En effet, l'un quelconque de ces systèmes est fourni par des progressions indéfinies,

$$\div\div \ldots : q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : q^0 \text{ ou } 1 : q^1 : q^2 : q^3 : \ldots$$
$$\div \ldots . -3\delta . -2\delta . -\delta . \quad 0 \quad . \delta . 2\delta . 3\delta . \ldots$$

dans lesquelles les termes de la progression arithmétique sont les logarithmes des termes correspondans de la progression géométrique. Or, en donnant à l'exposant x les valeurs successives

$$\ldots, -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \quad \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$$

les valeurs correspondantes de y, déduites de la relation (1)... $a^x = y$, sont

$$\ldots, \quad a^{-3\delta}, \quad a^{-2\delta}, \quad a^{-\delta}, \quad a^0 \text{ ou } 1, \quad a^{\delta}, \quad a^{2\delta}, \quad a^{3\delta}, \ldots$$

Pour que ces valeurs de y reproduisent les termes de la progression géométrique ci-dessus, il faut et il suffit que $a^{n\delta} = q^n$; d'où $a^{\delta} = q$ et $a = \sqrt[\delta]{q}$. Lorsque q et δ seront donnés, la dernière relation déterminera l'inconnue a; et en remplaçant q par a^{δ}, les progressions précédentes devenant

$$\div\div \ldots : a^{-3\delta} : a^{-2\delta} : a^{-\delta} : a^0 : a^{\delta} : a^{2\delta} : a^{3\delta} : \ldots$$
$$\div \ldots . -3\delta . -2\delta . -\delta . 0 . \delta . 2\delta . 3\delta . \ldots,$$

on voit que la *table* des logarithmes

$$\ldots . -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$$

des nombres correspondans

$$\ldots . a^{-3\delta}, \quad a^{-2\delta}, \quad a^{-\delta}, \quad a^0, \quad a^{\delta}, \quad a^{2\delta}, \quad a^{3\delta}, \ldots$$

est absolument la même que celle qu'on déduirait de l'ensemble des solutions de l'équation $a^x = y$, en donnant à x les valeurs $\ldots . -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta \ldots$; de sorte qu'en concevant δ très petit, le logarithme x, de y, passera par tous les états de grandeur, et donnera pour y la suite de tous les nombres.

112. *Nous considérerons désormais les* LOGARITHMES *des nombres, comme les* EXPOSANS *des puissances auxquelles il faut*

élever un nombre constant, nommé BASE, *pour en déduire tous ces nombres.*

Ainsi, en désignant par x l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base a pour obtenir le nombre y, et par ly le logarithme de y pris dans ce système, on a

$$y = a^x, \quad x = ly; \quad \text{d'où} \quad y = a^{ly}.$$

L'ensemble de toutes les valeurs de x et y correspondantes à une même valeur de a, forme un *système de logarithmes.*

Les diverses *propriétés des logarithmes* se déduisent avec facilité de cette nouvelle définition. En effet, si l'on désigne par x et X les logarithmes des nombres, y, Y, dans le système dont la base est a, on aura

$$y = a^x, \quad Y = a^X, \quad x = ly, \quad X = lY; \quad \text{d'où}$$

$$yY = a^{x+X}, \quad \frac{y}{Y} = a^{x-X}, \quad y^m = a^{mx}, \quad \sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}. \quad \text{Donc,}$$

$$l(yY) = x + X = ly + lY, \quad l\left(\frac{y}{Y}\right) = x - X = ly - lY,$$

$$l(y^m) = mx = mly, \quad l\sqrt[m]{y} = \frac{x}{m} = \frac{ly}{m}.$$

Par conséquent, 1°. *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs;* 2°. *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur; le logarithme d'une fraction est donc égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur;* 3°. *le logarithme de la $m^{ième}$ puissance d'une quantité s'obtient en multipliant par m le logarithme de cette quantité;* 4°. *le logarithme de la racine $m^{ième}$ d'une quantité s'obtient en divisant par m le logarithme de cette quantité.*

REMARQUE. *Lorsque des nombres sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression arithmétique;* car, en prenant les logarithmes des termes, a, aq, aq^2, aq^3, etc., d'une progression géométrique dont la raison est q, on obtient

les termes, $la, la+lq, la+2lq, la+3lq$, etc., d'une progression arithmétique dont la raison est lq.

113. *Dans tous les systèmes de logarithmes, le logarithme de l'unité est zéro, et le logarithme de la base est égal à l'unité.*

En effet, soit x le logarithme de y dans le système dont la base est a, on aura $y=a^x$, $ly=x$.

La valeur $x=0$ donnant $y=1$, on voit que $log\ 1=0$,
et $x=1$ donnant $y=a$, on voit que $log\ a=1$.

Remarque. Lorsqu'on a une *table de logarithmes*, il est facile de *trouver la* base *relative à cette table;* car, en cherchant dans la table le nombre dont le logarithme est 1, ce nombre est la base demandée.

114. *Dans tout système dont la base a est positive et plus grande que l'unité, les logarithmes des quantités plus grandes que l'unité sont positifs et d'autant plus grands que ces quantités sont plus grandes; les logarithmes des quantités positives moindres que l'unité sont négatifs et d'autant plus grands négativement que ces quantités sont plus petites.*

En effet, soit x le logarithme de y, dans le système dont la base est a, on a $y=a^x$, $x=ly$.

L'hypothèse $x=0$ donne $y=1$; et si x augmente d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, la valeur de y augmentera d'une manière continue depuis l'unité jusqu'à l'infini positif. Mais $x=ly$; les logarithmes des quantités plus grandes que l'unité sont donc positifs et d'autant plus grands que ces quantités sont plus grandes.

Pour obtenir les logarithmes des quantités positives moindres que l'unité, on fait $x=-z$; d'où $y=a^{-z}=\left(\frac{1}{a}\right)^z$.

Or, z augmentant depuis zéro jusqu'à l'infini positif, la valeur de y diminue depuis l'unité jusqu'à zéro. Les logarithmes des quantités positives moindres que l'unité sont donc négatifs et d'autant plus grands, en valeur absolue, que ces quan-

tités sont plus petites. C'est dans ce sens qu'on dit que *le logarithme de zéro est l'infini négatif.*

On verrait d'une manière semblable que, *dans tout système dont la base est positive et moindre que l'unité, les logarithmes des quantités positives plus petites que l'unité sont positifs et d'autant plus grands que ces quantités sont plus petites, et que les logarithmes des quantités positives plus grandes que l'unité sont négatifs et d'autant plus grands négativement qu'ils appartiennent à des quantités plus grandes.*

115. D'après la discussion précédente, *lorsque dans l'équation* $a^x = y$, *le nombre* a *est positif, si* x *augmente d'une manière continue depuis* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$, *on obtiendra pour* y *toutes les quantités comprises entre zéro et l'infini positif.*

Aucune valeur réelle de x ne pouvant rendre y négatif, les valeurs de x correspondantes aux valeurs négatives de y, sont *imaginaires.* Par conséquent, *dans tout système dont la base est positive, les logarithmes des quantités positives sont réels, et les logarithmes des quantités négatives sont* IMAGINAIRES.

116. Les propriétés des fractions continues donnent le moyen de *calculer le logarithme d'un nombre donné, dans un système dont la base est connue ;* car en désignant par x le logarithme de C dans le système dont la base est a, on a (1)... $a^x = C$; et l'on trouve la valeur de x par des calculs analogues à ceux du n° 101.

EXEMPLE. *Calculer le logarithme de* 3, *dans le système dont la base est* 10.

Si x désigne le logarithme demandé, on a $10^x = 3$, et l'on a vu (page 108) que cette équation donne $x = 0{,}477$ etc. ; le logarithme de 3 est donc 0,477 à moins d'un millième d'unité.

117. *Connaissant les logarithmes de tous les nombres dans le système dont la base est* a, *pour en déduire les logarithmes des mêmes nombres dans le système dont la base est* A, *il suffit de calculer le quotient* M *de l'unité par le logarithme de* A *pris dans le système dont la base est* a, *et de multiplier les logarithmes donnés, par* M ; car en désignant par X le logarithme inconnu de C dans la base A, et par, lC, lA, les logarithmes des

nombres, C, A, dans la base a, on a

$$C = A^X,\ lC = l(A^X) = X \times lA;\ \text{d'où}\ X = (lC) \times \frac{1}{lA} = (lC) \times M.$$

Le nombre constant M est le MODULE relatif à la base A.

118. La *base* de notre système de numération étant 10, pour simplifier les calculs autant que possible, on a choisi ce nombre pour la *base* des TABLES *de logarithmes usuelles*. Dans ce système, le logarithme d'un nombre C étant l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base 10, pour obtenir le nombre C, on a $10^x = C$.

Pour *former une table de logarithmes*, on calcule d'abord les logarithmes des nombres *premiers*, en donnant successivement à C les valeurs, 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. Et en ajoutant ces logarithmes, on en déduit les logarithmes des nombres entiers.

Par exemple, pour calculer le logarithme de 72, on observe que 72 étant égal à $2^3 \times 3^2$, on a $l72 = 3l2 + 2l3$.

Nous ferons usage désormais de notre nouvelle édition *stéréotype* des *Tables de logarithmes de* LALANDE, *étendues à sept décimales* (*). *L'avertissement* qui précède ces tables fournit le moyen de *trouver le logarithme d'un nombre donné*, et de *calculer le nombre qui correspond à un logarithme donné*.

119. Les tables de logarithmes fournissent le moyen de *résoudre les équations à une seule inconnue, quand cette inconnue n'entre que dans les exposans*.

1°. Soit l'*équation exponentielle* $a^x = C$. On a,

$$lC = l(a^x) = xla;\ \text{d'où}\ x = \frac{lC}{la}.$$

On obtiendra donc la valeur de l'inconnue x *en divisant le logarithme de* C *par le logarithme de* a.

2°. Soit la *double exponentielle* (1)... $a^{b^x} = c$, dans laquelle

(*) Une décision nouvelle, relative aux examens pour l'admission à l'*École Polytechnique* et dans la *Marine*, oblige les candidats à effectuer les calculs avec des logarithmes à sept décimales.

le 1er membre indique que a doit être élevé à une puissance marquée par b^x. On fait $b^x = y$; la relation (1) devient $a^y = c$. On en déduit, $y = \frac{lc}{la}$, $x = \frac{ly}{lb}$.

Ainsi, la division de lc par la donnera y, et ensuite le quotient de ly par lb exprimera x.

EXEMPLE. *Soit l'équation* $5^{2x} = 390625$.

On aura; $a = 5$, $b = 2$, $c = 390625$,

$$y = \frac{lc}{la} = \frac{l390625}{l5} = \frac{5,5917600}{0,6989700} = 8, x = \frac{ly}{lb} = \frac{l8}{l2} = \frac{0,9030899}{0,3010300}.$$

En effectuant la division, on trouve que la valeur très approchée de x est 3. Cette valeur de x satisfait à l'équation proposée, car $2^x = 2^3 = 8$, $5^8 = 390625$.

Pour exprimer x en *fonction* des nombres donnés, a, b, c, on observe que la relation

$y = \frac{lc}{la}$ donnant $ly = l\left(\frac{lc}{la}\right) = llc - lla$, on a $x = \frac{llc - lla}{lb}$.

Si $c = 100$, on aura $lc = 2$, $llc = l2 = 0,3010300$.

Problèmes relatifs aux intérêts composés.

120. Lorsque l'intérêt d'une somme placée au commencement d'une année se joint au capital pour porter intérêt pendant l'année suivante, on dit qu'on prend les *intérêts des intérêts*, ou encore qu'on tire les *intérêts composés*.

1er PROBLÈME. *Déterminer combien le capital* a *francs vaudra dans* n *années, en ayant égard aux intérêts des intérêts; l'intérêt de* 100 *francs par an est* γ *francs.*

Puisque 100 francs comptant valent $100 + \gamma$ francs dans un an,

1^f^ comptant vaut $\frac{100 + \gamma}{100}$ francs dans un an.

Par conséquent : *Pour trouver combien une somme, placée au commencement d'une année, vaut à la fin de cette année, il suffit de la multiplier par* $\frac{100 + \gamma}{100}$. Soit $\frac{100 + \gamma}{100} = b$.

On déduit de cette règle générale que le capital a francs vaudra $a \times b^n$ francs à la fin de la $n^{ième}$ année. De sorte que si l'on désigne la somme cherchée par $\mathcal{C}$ francs, on aura $\mathcal{C} = ab^n$.

Cette dernière équation donne le moyen de calculer l'une quelconque des quantités a, $\mathcal{C}$, b, n, quand les trois autres sont connues.

2e Problème. *Un particulier place a francs au commencement de la 1re année, a_1 francs à la fin de la 1re année, a_2 francs à la fin de la 2e,..., et enfin a_n francs à la fin de la $n^{ième}$ année; l'intérêt annuel de 100 francs est γ francs; trouver la somme $\mathcal{C}$ francs qui sera due à ce particulier à la fin de la $n^{ième}$ année.*

Les $n+1$ placemens a, a_1, a_2, ..., a_n, évalués à la fin de la $n^{ième}$ année, vaudront respectivement

$$ab^n,\ a_1b^{n-1},\ a_2b^{n-2},\ \ldots,\ a_{n-1}b,\ a_n;\ \text{donc}$$

$$(1)\ldots\ \mathcal{C} = ab^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}b + a_n.$$

1er Exemple. *Un particulier place a francs au commencement de la 1re année, et a francs à la fin de chaque année; calculer la somme $\mathcal{C}$ francs qui lui sera due à la fin de la $n^{ième}$ année.*

Pour trouver $\mathcal{C}$, il suffit de supposer dans (1) que chacune des sommes a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, est égale à a; ce qui donne

$$\mathcal{C} = a + ab + ab^2 + \ldots + ab^{n-1} + ab^n.$$

On voit que $\mathcal{C}$ est égal à la somme des termes d'une progression géométrique, dont le 1er terme est a, dont la raison est b, et dont le nombre des termes est $n+1$. La formule (2) du n° 107 donne, $\mathcal{C} = \dfrac{a(b^{n+1}-1)}{b-1}$.

Remarque. Il résulte de ces deux expressions de $\mathcal{C}$, que

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1} + b^n = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}.$$

2e Exemple. *Un particulier place a francs au commencement de la 1re année, et prélève δ francs à la fin de chaque année. Combien restera-t-il à ce particulier après n années?*

Si l'on remplace chacune des quantités a_1, a_2, ..., a_n, par

$-\delta$, la valeur correspondante de $\mathcal{C}$, déduite de (1), exprimera la fortune du particulier à la fin de la $n^{ième}$ année ; on trouvera $\mathcal{C} = ab^n - \delta(b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1)$.

Or, on vient de voir que

$$b^n + b^{n-1} + \ldots + b^2 + b + 1 = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}.$$

Donc, (2) $\ldots b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^2 + b + 1 = \frac{b^n - 1}{b - 1}$.

L'expression de $\mathcal{C}$ se réduit donc à

$$(3)\ldots \quad \mathcal{C} = ab^n - \frac{\delta(b^n - 1)}{b - 1}.$$

Selon que cette valeur de $\mathcal{C}$ sera positive ou nulle ou négative, le particulier possédera $\mathcal{C}$ francs, ou ne possédera rien, ou devra $\mathcal{C}$ francs, à la fin de la $n^{ième}$ année.

3e Exemple. *Un particulier qui doit a francs, voudrait s'acquitter au moyen de n paiemens égaux effectués à la fin de chaque année. Calculer la valeur de chaque paiement.*

On fera $\mathcal{C} = 0$ dans la formule (3), la valeur correspondante de δ exprimera l'inconnue du problème actuel.

Remarque. La formule (2) peut servir à *déterminer l'expression du quotient de* $x^n - a^n$ *par* $x - a$; car en y faisant $b = \frac{x}{a}$, elle donne $\frac{x^n - a^n}{(x-a)a^{n-1}} = \frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{a^{n-2}} + \ldots + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + 1$, et en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par a^{n-1}, on parvient à la relation demandée

$$(4)\ldots \quad \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1}.$$

Si l'on change a en $-a$, la formule (4) donnera, suivant que n sera pair ou impair,

$$(5)\ldots \quad \frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1}, \text{ ou}$$

$$(6)\ldots \quad \frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1}.$$

On fera souvent usage de ces formules.

CHAPITRE VI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

§ 1er. *Définitions et notations. Propriétés relatives aux facteurs des polynomes et aux racines des équations.*

121. Le principal but de la *théorie générale des équations* est de faire connaître les propriétés des équations de tous les degrés, pour en déduire le moyen de les résoudre. Nous supposerons que les équations proposées ne renferment que des puissances entières des inconnues; de sorte que l'équation du $m^{ième}$ degré à une seule inconnue peut se ramener à la forme

$$(1)\ldots\ x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \ldots + sx + t = 0.$$

Les exposans, $m, m-1$, etc., sont des nombres entiers positifs, et les coefficiens, $p, q, r, \ldots, s, t$, sont indépendans de x.

Quand nous dirons qu'une racine d'une équation est positive ou négative, nous sous-entendrons que cette racine est réelle.

Lorsque l'on considère une suite de signes + et − qui se succèdent dans un ordre quelconque, on dit que deux signes consécutifs forment une *permanence* lorsqu'ils sont les mêmes, et une *variation* lorsqu'ils sont différens.

Ainsi, la suite + + + − + − − − + −
offre quatre permanences et cinq variations.

Lorsque nous dirons qu'une équation est *complète*, nous sous-entendrons qu'aucun des coefficiens $p, q, r \ldots, s, t$, de x, n'est égal à zéro.

Quand le coefficient p de x^{m-1} est nul, on dit que l'*équation manque de second terme*. Lorsque p et q sont nuls, on dit qu'il manque deux termes entre x^m et rx^{m-3}; et ainsi de suite.

Lorsqu'une équation est incomplète, on peut toujours la rendre complète, sans changer ses racines, en rétablissant les termes qui manquent et en les affectant du coefficient ± 0.

Dans toute équation complète, le nombre des permanences ajouté à celui des variations donne une somme égale au degré de l'équation.

Lorsque nous dirons que deux polynomes ordonnés par rapport à une même lettre x sont *divisibles* l'un par l'autre, nous entendrons que la division conduit à un reste nul et que le quotient est entier *par rapport à* x. Les coefficiens des diverses puissances de x dans le quotient pourront être entiers ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables, réels ou imaginaires.

On dit qu'une quantité *entière* est *première*, lorsqu'elle n'est *divisible* par aucune quantité entière autre qu'elle-même et l'unité. Lorsque deux quantités A, B, n'ont aucun facteur commun, on dit qu'elles sont *premières entre elles*, ou que A est *premier avec* B.

Pour indiquer que y est *fonction* de x, c'est-à-dire que y dépend de x, on écrit $y = f(x)$.

Quand des fonctions sont composées d'une manière semblable, on l'indique en conservant la même forme à l'*indice* de la fonction. De sorte que $f(z)$ est ce que devient $f(x)$ quand on change x en z dans $f(x)$. Si $f(x) = x^2 - 4x + 7$, on aura

$$f(z) = z^2 - 4z + 7, f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h) + 7.$$

Des fonctions différentes se distinguent les unes des autres par la forme de la lettre qui sert d'indice à la fonction. Ainsi, $F(x)$, $f(x)$ et $\phi(x)$, désignent des fonctions différentes de x.

122. *Quand un polynome* $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + sx + t$, *est réduit à zéro par l'hypothèse* $x = a$, *il est divisible par* $x - a$; *et quand* $x = a$ *ne réduit pas ce polynome à zéro, il n'est pas divisible par* $x - a$. *La réciproque est vraie.*

En effet, désignons ce polynome par $f(x)$, et divisons-le par $x - a$; le diviseur étant du premier degré en x, on pourra continuer les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R indépendant de x; si $\phi(x)$ désigne le quotient entier correspondant, on aura (1)... $f(x) = (x - a) \times \phi(x) + R$.

Cette égalité étant vraie quel que soit x, on peut y faire $x = \alpha$; le produit $(x-\alpha)\times\varphi(x)$ se réduit à zéro, car $x-\alpha$ devient nul, et $\phi(x)$ ne peut devenir infini; d'ailleurs R ne change pas; donc (2)... $f(\alpha) = \mathrm{R}$. Cela posé :

1°. Si $x = \alpha$ réduit $f(x)$ à zéro, on a $f(\alpha) = 0$; la valeur $f(\alpha)$ du reste R étant nulle, $x-\alpha$ divise $f(x)$.

Par exemple, la valeur $x = 2$ réduisant $x^2 - 5x + 6$ à zéro, on est certain que $x^2 - 5x + 6$ est divisible par $x - 2$; et le polynome $x^2 + 2yx + y^2 - 1$ se réduisant identiquement à zéro, lorsqu'on y fait $x = 1 - y$, on est certain qu'il est divisible par $x - (1-y)$; le quotient est $x + y + 1$; de sorte que $x^2 + 2yx + y^2 - 1 = (x+y-1)(x+y+1)$.

2°. Si $x = \alpha$ ne réduit pas $f(x)$ à zéro, la valeur $f(\alpha)$ de R ne sera pas nulle; $f(x)$ ne sera donc pas divisible par $x - \alpha$.

La réciproque se démontre d'une manière semblable.

1re Remarque. L'identité (2) fait voir que, *pour obtenir le reste de la division d'un polynome par* $x - \alpha$, *il suffit de faire* $x = \alpha$ *dans ce polynome.*

2e Remarque. Le principe que nous venons d'établir donne le moyen de *reconnaître dans quel cas* $x^m \pm \alpha^m$ *est divisible par* $x \pm \alpha$. En effet, l'hypothèse $x = \alpha$ réduisant $x^m - \alpha^m$ à zéro et n'y réduisant pas $x^m + \alpha^m$, il en résulte que $x - \alpha$ divise $x^m - \alpha^m$ et ne divise pas $x^m + \alpha^m$. Lorsque m est un nombre pair, $x = -\alpha$ réduit $x^m - \alpha^m$ à zéro et n'y réduit pas $x^m + \alpha^m$; par conséquent, $x + \alpha$ divise $x^m - \alpha^m$ et ne divise pas $x^m + \alpha^m$. On verrait de même que, m étant impair, $x + \alpha$ divise $x^m + \alpha^m$ et ne divise pas $x^m - \alpha^m$.

Les formules (4), (5), (6), (*page* 125), déterminent les quotiens de ces divisions.

On peut d'ailleurs s'assurer que *le quotient de* $x^m - \alpha^m$ *par* $x - \alpha$ est $x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} + \ldots + \alpha^{m-2} x + \alpha^{m-1}$, quel que soit α; car ce quotient multiplié par $x - \alpha$ donne un produit qui se réduit à $x^m - \alpha^m$.

En général, pour qu'un polynome $px^m + qx^{m-1} + \text{etc.}$, soit divisible par $ax + b$, (c'est-à-dire pour que le quotient

soit entier par rapport à x), il faut et il suffit que la valeur de x tirée de $ax+b=0$, réduise ce polynome à zéro.

123. Le principe du n° 122 peut s'énoncer de cette autre manière : *Si α est une racine de l'équation*

$$(1)\ldots\ x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+rx^2+sx+t=0,$$

le premier membre sera divisible par $x-\alpha$; et si α n'est pas une racine de l'équation (1), $x-\alpha$ *ne divisera pas le premier membre. La réciproque est vraie.*

124. *Si toute équation de la forme* (1) *a une racine* (*), *l'équation du $m^{ième}$ degré aura m racines, et aucune autre valeur de x ne pourra satisfaire à cette équation.* En effet, si a_1 désigne une racine de l'équation (1), le 1er membre sera divisible par $x-a_1$ (n° 123); le quotient sera de la forme $x^{m-1}+p'x^{m-2}+$ etc., et l'on aura

$$x^m+px^{m-1}+\text{etc.}=(x-a_1)\,(x^{m-1}+p'x^{m-2}+\text{etc.}).$$

L'équation $x^{m-1}+$ etc. $=0$ ayant une racine a_2, son premier membre est divisible par $x-a_2$; de sorte que

$$x^{m-1}+\text{etc.}=(x-a_2)\,(x^{m-2}+\text{etc.});\qquad \text{d'où}$$
$$x^m+px^{m-1}+\text{etc.}=(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x^{m-2}+\text{etc.}).$$

En continuant ces décompositions, on parviendra à un dernier facteur $x-a_m$, et l'on aura

$$x^m+\text{etc.}=(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,\ldots\,(x-a_m).$$

Un produit étant nul quand l'un de ses facteurs se réduit à zéro, chacune des m valeurs $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_m$, réduira le 1er membre de l'équation (1) à zéro. Cette équation a donc m racines, a_1, a_2, a_3, ..., a_m.

(*) Les propriétés qui seront fondées sur la décomposition des équations en facteurs, reposeront sur l'hypothèse que *toute équation a une racine*. La légitimité de cette hypothèse sera vérifiée ; car on en déduira des méthodes générales pour calculer toutes les racines des équations.

D'ailleurs, aucune autre valeur $x = \alpha$ ne saurait réduire le 1er membre de l'équation (1) à zéro; car si cela arrivait, $x - \alpha$ diviserait le produit des m facteurs premiers $x - a_1$, $x - a_2, \ldots, x - a_m$, (n° 123); $x - \alpha$ diviserait donc l'un de ces m facteurs; ce qui ne saurait avoir lieu puisque $x - \alpha$ n'est égal à aucun de ces facteurs.

Remarque. Quand des facteurs de $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$, sont égaux entre eux, il n'y a plus m manières différentes de satisfaire à l'équation $x^m + px^{m-1} + \text{etc.} = 0$. Cependant, pour conserver l'*analogie*, on dit encore que cette équation a m racines; mais on ajoute qu'il y a des *racines égales*.

En général, *lorsque la division du polynome* $x^m + px^{m-1} + \text{etc.}$ *par* $(x - \alpha)^n$, *fournit un quotient exact qui ne renferme plus le facteur* $x - \alpha$, *ce polynome contient* n *facteurs égaux à* $x - \alpha$; *on dit par ce motif que l'équation* $x^m + \text{etc.} = 0$, *renferme* n *racines égales à* α, *et que* n *est le degré de multiplicité de cette racine.*

125. *Dans toute équation ramenée à la forme*

$$(1) \ldots x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

le coefficient p_1 *du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des* m *racines; le coefficient* p_2 *du troisième terme est égal à la somme de leurs produits deux à deux; le coefficient* p_3 *du quatrième terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme de leurs produits trois à trois; et ainsi de suite. Enfin, d'après cette loi, selon que* m *est pair ou impair, le dernier terme* p_m, *pris avec son signe ou avec un signe contraire, est égal au produit des* m *racines.*

En effet, si les m racines de l'équation (1) sont, $a, b, c, \ldots, k$, le premier membre sera identiquement égal au produit des m binomes, $x - a$, $x - b$, $x - c$, $\ldots$, $x - k$, (n° 124). Or, pour déduire ce produit de celui des binomes $x + a$, $x + b$, $\ldots$, $x + k$ (n° 68), il suffit de changer les signes des seconds termes, a, b, $\ldots$, k; la somme de ces seconds termes ne

fait que changer de signe, la somme de leurs produits deux à deux reste la même, la somme de leurs produits trois à trois change seulement de signe; et ainsi de suite. Le principe du n° 68 conduit ainsi aux relations indiquées

$$(2)\ldots\begin{cases} -p_1 = a+b+\ldots+k, & p_2 = ab+ac+\text{etc.}, \\ -p_3 = abc+abd+\text{etc.}, \ldots, & \pm p_m = abc\ldots k. \end{cases}$$

Ces relations démontrent les propriétés suivantes :

1°. *Deux équations dont les racines sont les mêmes, ont nécessairement les mêmes coefficiens. La réciproque est évidente.*

2°. Lorsque l'équation (1) est *complète*, si toutes ses racines sont réelles et positives, ses termes ne présenteront que des *variations;* si toutes ses racines sont réelles et négatives, ses termes ne présenteront que des *permanences.*

3°. Pour *former l'équation* (1) *dont les m racines sont*, $a, b, c, \ldots, k$, il suffit de calculer les m coefficiens $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, à l'aide des m relations (2), ou d'égaler à zéro le produit des m facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, $\ldots$, $x-k$, (n° 124).

4°. *Quand on connaît la somme* S *de* $m-1$ *racines de l'équation* (1), *il est facile d'en déduire la* $m^{ième}$ *racine* k; car l'expression (2) de p_1 donne $k=-(S+p_1)$.

5°. *Quand les racines de l'équation* (1) *ne font que changer de signes, les coefficiens* $p_1, p_3, \ldots$, *ne font que changer de signes, et les coefficiens* $p_2, p_4, \ldots$, *restent les mêmes.*

Pour *démontrer la réciproque*, nous chercherons à *transformer l'équation* (1) *en une équation* $f(y)=0$, *dont les racines soient égales à celles de la proposée prises avec des signes contraires.* Il suffit pour cela de faire $x=-y$ dans (1); car, d'après la relation $y=-x$, si les racines de l'équation (1) sont, $a, b, c, \ldots, k$, celles de l'équation

$$(3)\ldots(-y)^m+p_1(-y)^{m-1}+p_2(-y)^{m-2}+\text{etc.}=0$$

seront, $-a, -b, -c, \ldots, -k$. Cela posé :

Lorsque m est un nombre *pair*, l'équation (3) se réduit à

$$(4)\ldots y^m-p_1y^{m-1}+p_2y^{m-2}-p_3y^{m-3}+p_4y^{m-4}-\text{etc.}=0.$$

Lorsque m est *impair*, l'équation (3) devient

$$-y^m + p_1 y^{m-1} - p_2 y^{m-2} + p_3 y^{m-3} - p_4 y^{m-4} + \text{etc.} = 0;$$

et en changeant les signes de tous les termes, ce qui ne change pas les racines, on obtient encore l'équation (4). Ce qui démontre la réciproque.

REMARQUE. *Pour que toutes les racines de l'équation* (1) *ne fassent que changer de signes, il suffit d'y changer les signes des termes de rang pair à partir du premier terme.*

126. *Lorsque n valeurs différentes,* $x = \alpha$, $x = \beta, \ldots,$ $x = \omega$, *réduisent* (1)... $x^m + px^{m-1} + \ldots + sx + t$, *à zéro, ce polynome est divisible par le produit des n facteurs correspondans* $x - \alpha$, $x - \beta, \ldots,$ $x - \omega$.

En effet, puisque $x = \alpha$ réduit le polynome (1) à zéro, il est divisible par $x - \alpha$; le quotient de cette division est de la forme $x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.}$, et l'on a

$$x^m + \text{etc.} = (x - \alpha)(x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.}).$$

Or, par hypothèse, $x = \beta$ réduit $x^m + \text{etc.}$ à zéro; $x = \beta$ doit donc réduire à zéro le produit de $x - \alpha$ par $x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc}$; mais $x = \beta$ ne rend pas nul le facteur $x - \alpha$; il faut donc que $x = \beta$ réduise à zéro l'autre facteur $x^{m-1} + p'x^{m-2} + \text{etc.}$; ce dernier polynome est donc divisible par $x - \beta$; le quotient est $x^{m-2} + \text{etc.}$, et l'on a

$$x^{m-1} + \text{etc.} = (x - \beta)(x^{m-2} + \text{etc.}); \text{ d'où}$$
$$x^m + \text{etc.} = (x - \alpha)(x - \beta)(x^{m-2} + \text{etc.}).$$

En continuant ces décompositions, on parviendra à l'identité

$$x^m + \text{etc.} = (x - \alpha)(x - \beta) \ldots (x - \omega)(x^{m-n} + \text{etc.}),$$

qui démontre le principe énoncé.

RÉCIPROQUEMENT, *lorsque le polynome* (1) *est divisible par un polynome du* $n^{ième}$ *degré,* $x^n + Px^{n-1} + \text{etc.}$, *toutes les valeurs,* $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, *de x, qui réduisent ce dernier polynome à zéro, jouissent aussi de la propriété de rendre nul le polynome* (1).

1re REMARQUE. Il résulte du principe précédent que, *lorsqu'on connaît n racines,* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, *d'une équation*

du $m^{\text{ième}}$ degré $f(x) = 0$, on obtient l'équation qui détermine les $m-n$ autres racines, en égalant à zéro le quotient de $f(x)$ par le produit des n facteurs, $x - a_1$, $x - a_2, \ldots, x - a_n$.

2° Remarque. *Pour qu'un polynome $px^m + qx^{m-1} +$ etc., soit divisible par $ax^2 + bx + c$, il faut et il suffit que les deux valeurs de x tirées de $ax^2 + bx + c = 0$ étant inégales, chacune d'elles réduise le polynome à zéro.*

127. *Quand une équation a n racines égales à zéro, les coefficiens des n derniers termes sont nuls.* En effet, si l'équation

$$(1)\ldots x^m + \ldots\ldots + A_{n+1}x^n + A_n x^{n-1} + A_{n-1}x^{n-2} + \ldots + A_2 x + A_1 = 0,$$

admet n racines nulles, son 1er membre sera divisible par $(x-0)^n$ ou par x^n (n° 126); ce qui exige que les n coefficiens $A_1, A_2, \ldots, A_n$, soient nuls.

Réciproquement, quand ces n coefficiens sont nuls, le premier membre de (1) est divisible par x^n ou par $(x-0)^n$; l'équation (1) a donc n racines égales à zéro (*Remarque du* n° 124).

128. *Lorsqu'une équation $f(x) = 0$ ne renferme que des puissances paires de l'inconnue, toutes ses racines sont égales deux à deux et de signes contraires;* car, si $x = a$ réduit $f(x)$ à zéro, $x = -a$ donnera le même résultat.

Réciproquement, *lorsque toutes les racines d'une équation* $(1)\ldots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + sx^{m-4} +$ etc. $= 0$, *sont égales deux à deux et de signes contraires, cette équation ne renferme que des puissances paires de l'inconnue x.* En effet, cette équation est nécessairement de degré pair; d'ailleurs, en y faisant $x = -y$, ce qui revient à changer les signes de toutes les racines (n° 125, 5°), l'équation transformée $y^m - py^{m-1} + qy^{m-2} - ry^{m-3} +$ etc. $= 0$, doit avoir les mêmes racines que l'équation (1); il faut donc que les coefficiens soient les mêmes dans ces deux équations (n° 125, 1°); ce qui exige que les coefficiens, p, r, etc., des puissances impaires de x soient nuls.

129. Pour *former l'équation $\varphi(y) = 0$, dont les racines*

sont égales à celles d'une équation donnée $f(x) = 0$, *augmentées de* α *où multipliées par* $\frac{\alpha}{\zeta}$, on pose la relation indiquée $y = x + \alpha$ ou $y = x \times \frac{\alpha}{\zeta}$; on en déduit $x = y - \alpha$ ou $x = \frac{\zeta y}{\alpha}$; et la substitution de l'expression de x en fonction de y, dans $f(x) = 0$, donne l'équation demandée $f(y - \alpha) = 0$ ou $f\left(\frac{\zeta y}{\alpha}\right) = 0$. De sorte qu'il suffit de remplacer x par $y - \alpha$ ou par $\frac{\zeta y}{\alpha}$, dans $f(x) = 0$.

Si l'on veut que toutes les racines réelles de $f(y - \alpha) = 0$ soient positives, il suffit de prendre pour α une *limite supérieure* des racines négatives de $f(x) = 0$, (n° 134).

130. *Quand un polynome*

$$(1) \ldots x^m \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm \ldots \pm sx \pm t,$$

est ordonné suivant les puissances entières positives et décroissantes de x, *on peut toujours déterminer une valeur de* x, *plus grande que l'unité, qui rende le premier terme plus grand que la valeur absolue de la somme de tous les autres, et qui soit telle, en outre, que toute valeur de* x *plus grande jouisse de la même propriété.* En effet, soit c le plus grand de tous les coefficiens, $p, q, \ldots, s, t$; on aura évidemment

$$cx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + cx + c > \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm \ldots \pm sx \pm t.$$

Il suffit donc de satisfaire à l'inégalité

$$x^m > cx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + cx + c, \text{ qui revient à}$$

$$x^m > c(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1), \text{ ou à}$$

$$x^m > c\left(\frac{x^m - 1}{x - 1}\right) \text{ (page 125), ou à } x^m > \frac{cx^m}{x - 1} - \frac{c}{x - 1}.$$

Or, x étant supposé plus grand que l'unité, pour satisfaire à la dernière inégalité, il suffit évidemment de poser

$$x^m \geqq \frac{cx^m}{x-1}, \text{ ou encore } x^m > \frac{cx^m}{x-1};$$

ce qui donne $x = c+1$, ou $x > c+1$.

La valeur de x, qui jouit de la propriété demandée, est donc égale au plus grand de tous les coefficiens pris positivement et augmenté de l'unité.

REMARQUE. *Lorsqu'on fait $x = c+1$ ou $x > c+1$, dans le polynome* (1), *le résultat est nécessairement positif*, puisque le 1er terme x^m devient plus grand que la somme de tous les autres termes.

Par une raison semblable, *si δ désignant une quantité positive, qui peut se réduire à zéro, on fait $x = -(c+1+\delta)$ dans le polynome* (1), *le résultat sera nécessairement positif ou négatif, selon que l'exposant m sera pair ou impair.*

Limites des racines d'une équation.

131. Toute quantité plus grande que la plus grande racine positive d'une équation, est ce qu'on nomme une *limite supérieure* des racines positives de cette équation; et toute quantité moindre que la plus petite des racines positives, est une *limite inférieure* de ces racines. Les mêmes définitions conviennent aux valeurs absolues des racines négatives.

Une limite supérieure des racines positives est d'autant plus approchée de la plus grande racine positive, qu'elle est plus petite; et une limite inférieure est d'autant plus approchée de la plus petite racine qu'elle est plus grande. Par conséquent, lorsqu'on pourra trouver plusieurs limites des racines positives d'une équation, *on devra préférer la plus petite des limites supérieures et la plus grande des limites inférieures.*

132. Pour *déterminer la limite supérieure des racines positives d'une équation*, on ramène d'abord cette équation à la forme

$$(1)\ldots\ x^m \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm \ldots \pm sx \pm t = 0.$$

1°. Il résulte de la remarque du n° 130 qu'*on obtiendra une limite supérieure des racines positives de l'équation* (1), *en ajoutant l'unité au plus grand des coefficiens de cette équation pris positivement.*

2°. *Lorsque la valeur absolue* N *du plus grand des coefficiens négatifs de l'équation* (1) *est moindre que la valeur* P *du plus grand des coefficiens positifs, on peut prendre pour limite supérieure des racines positives, la quantité* $N+1$ *moindre que la limite* $P+1$ *obtenue* (1°).

En effet, soit représenté par $f(x)$ le 1er membre de l'équation (1); on aura trouvé une *limite supérieure des racines positives de l'équation* $f(x)=0$, si l'on obtient un nombre positif qui, substitué pour x, rende $f(x)$ positif, et tel en outre que toute valeur plus grande de x jouisse de la même propriété.

Pour trouver cette valeur de x, on observe que la partie positive de $f(x)$ n'est jamais moindre que x^m, et que la valeur absolue de la partie négative de $f(x)$ ne saurait surpasser $Nx^{m-1}+Nx^{m-2}+\ldots+Nx+N$; la valeur de x qui rend $x^m-Nx^{m-1}-Nx^{m-2}-\ldots-Nx-N$ positif, rendra donc à plus forte raison $f(x)$ positif. Or, l'inégalité

$$x^m-Nx^{m-1}-Nx^{m-2}-\ldots-Nx-N>0, \text{ revient à}$$
$$x^m>Nx^{m-1}+Nx^{m-2}+\ldots+Nx+N;$$

et d'après ce qu'on a vu (n° 130), pour satisfaire à cette dernière, il suffit de prendre $x=N+1$, ou $x>N+1$.

Toutes les racines positives de l'équation (1) sont donc effectivement moindres que $N+1$.

Lorsque N n'est pas moindre que P, les limites indiquées (1°) et (2°) sont les mêmes.

3°. Enfin, *lorsque le second terme de l'équation* $f(x)=0$ *étant positif, la valeur absolue* N *du plus grand des coefficiens négatifs est plus grande que l'unité, on peut obtenir une limite supérieure moindre que les précédentes.* En effet, soit l'équation

$$(2)\ldots\ x^m+\ldots+ax^{m-n+1}-bx^{m-n}\pm cx^{m-n-1}\pm\ldots\pm sx\pm t=0,$$

dans laquelle le premier des termes affectés du signe — est $-bx^{m-n}$. Le 1er membre de cette équation sera nécessairement positif, si l'on a

$$(3)\ldots\ x^m > bx^{m-n} \pm cx^{m-n-1} \pm \ldots \pm sx \pm t;$$

et toute valeur de x qui rendra

$$(4)\ldots\ x^m > Nx^{m-n} + Nx^{m-n-1} + \ldots + Nx + N,$$

satisfera à plus forte raison à l'inégalité (3). Or, d'après ce qu'on a vu (*page* 125), l'inégalité (4) revient à

$$x^m > N\left(\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1}\right),\ \text{ou à }\ x^m > \frac{Nx^{m-n+1}}{x-1} - \frac{N}{x-1};$$

et cette dernière inégalité aura lieu si x étant plus grand que l'unité, on a

$$x^m > \frac{Nx^{m-n+1}}{x-1};\ \text{d'où}\ \ (x-1)x^{n-1} > N.$$

On satisfait à cette dernière condition en posant

$$(x-1)(x-1)^{n-1} = N,\ \text{ou}\ \ (x-1)(x-1)^{n-1} > N;$$

ce qui revient à $(x-1)^n = N$, ou à $(x-1)^n > N$.

On en déduit, $x = 1 + \sqrt[n]{N}$, ou $x > 1 + \sqrt[n]{N}$.

Le 1er membre de l'équation (2) prenant une valeur positive lorsqu'on y fait $x = 1 + \sqrt[n]{N}$ ou $x > 1 + \sqrt[n]{N}$, les racines positives de l'équation (2) sont nécessairement moindres que $1 + \sqrt[n]{N}$.

On peut donc prendre pour limite supérieure des racines positives de l'équation (2), *l'unité augmentée de la racine du plus grand des coefficiens négatifs* (*pris positivement*), *le degré de cette racine étant indiqué par la différence*, n, *entre les exposans*, m, $m-n$, *de* x *dans le* 1er *terme* x^m *et dans le* 1er *terme négatif* $-bx^{m-n}$.

Lorsque le second terme de l'équation (1) étant positif, N est plus grand que l'unité, on a $n > 1$, $1 + \sqrt[n]{N} < 1 + N$. La limite $1 + \sqrt[n]{N}$ est donc plus approchée que $1 + N$.

Lorsque $N < 1$, on a $1 + \sqrt[n]{N} > 1 + N$. La limite $1 + N$ est donc plus approchée que $1 + \sqrt[n]{N}$.

Quand le second terme de l'équation (2) est négatif, n est égal à l'unité, et l'on retrouve la limite $N + 1$ obtenue (2°).

REMARQUE. *Lorsque l'expression de la limite supérieure des racines positives, obtenue par l'une des trois méthodes précédentes, n'est pas un nombre entier, on prend pour limite le nombre entier immédiatement supérieur.*

Par exemple, soit l'équation

$$(5)\ldots\ x^6 + 100x^4 - 10x^3 - 80x + 7 = 0.$$

Les limites indiquées (1°), (2°) et (3°), seront 101, 81 et $1 + \sqrt[4]{80}$; cette dernière tombant entre 3 et 4, on prendra 4 pour limite supérieure des racines positives de l'équation (5).

On verra de même que les limites supérieures les plus approchées des racines positives des équations

$$6x^3 - 43x^2 + 79x - 12 = 0, \quad x^3 - 112x + 448 = 0,$$

sont + 9 et + 12.

133. Pour *déterminer une limite inférieure des racines positives de l'équation* $f(x) = 0$, il suffit de faire $x = \frac{1}{z}$ dans $f(x) = 0$, et de chercher une limite supérieure α des racines positives de la *transformée* $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$; la fraction $\frac{1}{\alpha}$ sera une limite inférieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, car x est d'autant plus petit que z est plus grand. *Cette limite sera moindre que l'unité*, car $\alpha > 1$.

Pour obtenir la limite inférieure la plus approchée, c'est-à-

dire la limite inférieure la plus grande, on prendra pour a la plus petite des limites indiquées dans le n° 132.

Par exemple, soit l'équation

$$7x^6 - 80x^5 - 10x^4 + 100x^2 + 1 = 0;$$

en y faisant $x = \frac{1}{z}$, on obtient la *transformée*,

$$z^6 + 100z^4 - 10z^3 - 80z + 7 = 0.$$

Les diverses limites supérieures des racines positives de cette dernière équation étant 101, 81 et 4 (n° 132), toutes les racines positives de l'équation proposée sont plus grandes que l'une quelconque des fractions $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{4}$. La dernière limite inférieure est la plus approchée.

On trouvera de même que la limite inférieure la plus approchée des racines positives de l'équation

$$x^6 - 42x^4 + 441x^2 - 49 = 0, \text{ est } \frac{1}{4}.$$

134. Pour *déterminer les limites des racines négatives d'une équation* (1)... $f(x) = 0$, on y fait $x = -y$; les racines de la transformée (2)... $f(-y) = 0$, étant égales à celles de l'équation (1) prises avec des signes contraires (n° 125, 5°), les limites des racines positives de l'équation (2) seront les limites des valeurs absolues des racines négatives de l'équation (1).

On trouvera de cette manière que toutes les racines négatives de l'équation

$$x^6 + 100x^4 - 10x^3 - 80x + 7 = 0,$$

sont comprises entre $-\frac{1}{3}$ et -3.

135. *Lorsque deux nombres*, a, C, *substitués pour* x *dans le premier membre* $f(x)$ *de l'équation numérique*....., (1)... $x^m + px^{m-1} + \ldots + sx + t = 0$, *donnent des résultats de signes contraires, une des racines de l'équation* (1) *est comprise entre* a *et* C. En effet :

1°. Quand α et $\mathcal{C}$ sont *tous deux positifs*, en désignant par P la somme des termes positifs de $f(x)$, et par N la somme des termes affectés du signe —, l'équation (1) devient $P-N=0$. Or, tous les termes de P et de N sont précédés du signe +, et les exposans de x sont positifs. Par conséquent, si α étant moindre que $\mathcal{C}$, l'on conçoit que x croisse d'une manière continue depuis α jusqu'à $\mathcal{C}$, les valeurs correspondantes de P et N croîtront d'une manière continue; et ces accroissemens seront tels que si N était moindre que P, pour $x=\alpha$, N deviendra plus grand que P, pour $x=\mathcal{C}$; il y aura donc un instant où N sera égal à P; il existera donc une valeur de x, comprise entre α et $\mathcal{C}$, qui donnera $P=N$; cette valeur sera une racine réelle de l'équation (1).

Remarque. *La démonstration précédente est fondée sur ce que, x croissant d'une manière continue depuis α jusqu'à $\mathcal{C}$, les valeurs correspondantes de* P *et* N *croissent aussi d'une manière continue; ce qui exige que x reste constamment positif entre α et $\mathcal{C}$*; car dans le cas où x prendrait des valeurs négatives, les termes de P et N qui contiennent des puissances impaires de x devenant négatifs, chacune des quantités P, N, pourrait contenir des termes positifs et négatifs, de sorte qu'on ne serait plus certain que, x augmentant, P et N augmentent. Il faut donc que α et $\mathcal{C}$ soient positifs.

2°. *Quand α et $\mathcal{C}$ ne sont pas tous deux positifs*, on ramène ce cas au précédent en augmentant toutes les racines de l'équation (1), d'une quantité positive δ plus grande que les valeurs absolues de α et de $\mathcal{C}$; à cet effet, on pose $x+\delta=z$; d'où $x=z-\delta$; d'après cette relation, faire $x=\alpha$ et $x=\mathcal{C}$ dans $f(x)$, se réduit à faire $z=\alpha+\delta$ et $z=\mathcal{C}+\delta$ dans $f(z-\delta)$, car les résultats de ces substitutions sont toujours $f(\alpha)$ et $f(\mathcal{C})$. Les valeurs positives $\alpha+\delta$, $\mathcal{C}+\delta$, de z, substituées dans $f(z-\delta)$, fournissant deux résultats $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, qu'on suppose de signes contraires, il suit de (1°) que l'équation $f(z-\delta)=0$ a une racine comprise entre $\alpha+\delta$ et $\mathcal{C}+\delta$; mais $x=z-\delta$; l'équation (1) a donc nécessairement une racine réelle comprise entre α et $\mathcal{C}$.

136. *Quand deux nombres, α, $\mathcal{C}$, comprennent un nombre*

impair de racines réelles de l'équation (1)... $f(x)=0$, *si l'on fait successivement* $x=\alpha$, $x=\mathcal{C}$, *dans le premier membre* $f(x)$, *les résultats* $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, *seront de signes contraires; si les nombres* $\alpha, \mathcal{C}$, *que l'on met à la place de* x *dans* $f(x)$, *ne comprennent aucune racine réelle de l'équation* (1), *ou en comprennent un nombre pair, les résultats* $f(\alpha), f(\mathcal{C})$, *seront de même signe. La réciproque est vraie.*

1°. Si α et $\mathcal{C}$ comprennent trois racines réelles, a, b, c, de l'équation (1), on aura $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\times\varphi(x)$.

La valeur $x=\alpha$ donnera $f(\alpha)=(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\times\varphi(\alpha)$,

et $x=\mathcal{C}$ donnera $f(\mathcal{C})=(\mathcal{C}-a)(\mathcal{C}-b)(\mathcal{C}-c)\times\varphi(\mathcal{C})$.

Soit $\alpha > \mathcal{C}$; les racines, a, b, c, seront moindres que α et plus grandes que $\mathcal{C}$; les facteurs $\alpha-a$, $\alpha-b$, $\alpha-c$, étant positifs, leur produit sera positif; les facteurs, $\mathcal{C}-a$, $\mathcal{C}-b$, $\mathcal{C}-c$, étant négatifs, leur produit sera négatif (n° 9, 5°). D'ailleurs, α et $\mathcal{C}$ ne comprenant que les trois racines a, b, c, de l'équation (1), $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\mathcal{C})$ sont nécessairement de même signe; car, autrement, il existerait une valeur δ de x, comprise entre α et $\mathcal{C}$, qui réduirait $\varphi(x)$ à zéro, et qui, par suite, réduirait $f(x)$ à zéro, puisque $\varphi(x)$ est un facteur de $f(x)$; l'équation (1) aurait donc une quatrième racine comprise entre α et $\mathcal{C}$, ce qui est contre l'hypothèse. Les résultats, $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, sont donc de signes contraires.

Ce raisonnement convient évidemment à un nombre impair quelconque de racines réelles comprises entre α et $\mathcal{C}$.

2°. On prouvera de même que, si α et $\mathcal{C}$ ne comprennent aucune racine réelle de l'équation (1), ou en comprennent un nombre pair, les résultats $f(\alpha), f(\mathcal{C})$, seront de même signe.

3°. *Lorsque deux nombres* $\alpha, \mathcal{C}$, *mis pour* x *dans le premier membre* $f(x)$ *de l'équation* (1), *donnent des résultats* $f(\alpha), f(\mathcal{C})$, *de signes contraires, il tombe un nombre impair de racines réelles de l'équation* (1) *entre* α *et* $\mathcal{C}$; car, d'après (2°), s'il ne tombait pas de racine entre α et $\mathcal{C}$, ou s'il en tombait un

nombre pair, les résultats $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, seraient de même signe; ce qui est contre l'hypothèse.

4°. Enfin, *quand deux nombres*, α, $\mathcal{C}$, *substitués pour* x *dans le premier membre* $f(x)$ *de l'équation* (1), *donnent des résultats* $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, *de même signe, il n'existe aucune racine réelle de l'équation* (1), *entre* α *et* $\mathcal{C}$, *ou il en tombe un nombre pair;* car, d'après (1°), si α et $\mathcal{C}$ comprenaient un nombre impair de racines réelles de l'équation (1), les résultats $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, seraient de signes contraires, ce qui est contre l'hypothèse.

137. *Lorsqu'on sait que deux nombres*, α, $\mathcal{C}$, *ne peuvent comprendre qu'une seule racine réelle de l'équation* $f(x)=0$, *il est facile de reconnaître si l'une des racines de cette équation est comprise entre* α *et* $\mathcal{C}$. Car, en faisant successivement $x=\alpha$, $x=\mathcal{C}$, dans $f(x)$: si les résultats $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, sont de signes contraires, une seule racine de l'équation $f(x)=0$ sera comprise entre α et $\mathcal{C}$ (n° 136, 3°); et si les résultats $f(\alpha)$, $f(\mathcal{C})$, sont de même signe, les nombres α, $\mathcal{C}$, ne comprendront aucune racine de l'équation $f(x)=0$, (n° 136, 4°).

138. *Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme; et toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.* En effet, soient les équations de cette espèce

$$(1)..x^{2n+1}\pm\ldots-t=0,\ (2)..x^{2n+1}\pm\ldots+t=0,\ (3)...x^{2n}\pm\ldots-t=0;$$

et désignons par c la valeur absolue du plus grand de tous les coefficiens de l'équation donnée.

1°. Si l'on fait $x=c+1$ dans (1), on obtiendra un résultat positif (*Remarque* du n° 130); et $x=0$ donne le résultat négatif $-t$. L'équation (1) a donc nécessairement une racine réelle comprise entre 0 et $+(c+1)$, (n° 135).

2°. En faisant $x=-(c+1)$ dans (2), on obtient un résultat négatif (*Remarque* du n° 130), et $x=0$ donne le résultat positif $+t$. L'équation (2) a donc une racine réelle comprise entre 0 et $-(c+1)$, (n° 135).

3°. Enfin, si l'on fait successivement $x=0$, $x=c+1$,

dans (3), les résultats seront de signes contraires ; et il en sera de même si l'on fait successivement $x=0$, $x=-(c+1)$; l'équation (3) a donc deux racines réelles, l'une comprise entre 0 et $c+1$, l'autre entre 0 et $-(c+1)$.

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

Remarque. Une équation qui n'a aucune racine réelle est nécessairement de degré pair, et son dernier terme est positif.

139. *Les racines imaginaires d'une équation sont toujours en nombre pair.* En effet, si l'équation du $m^{ième}$ degré (1)... $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx+t=0$, n'a que n racines réelles, $a, b, c, \ldots, \omega$, en divisant son 1er membre par le produit des n facteurs correspondans $x-a, x-b, x-c, \ldots, x-\omega$, le quotient égalé à zéro fournira l'équation du $m-n^{ième}$ degré (2)... $x^{m-n}+p'x^{m-n-1}+$ etc. $=0$, qui détermine les $m-n$ racines imaginaires de l'équation (1), (n° 126). L'équation (2) n'ayant aucune racine réelle, sera nécessairement de degré pair (n° 138). Le nombre $m-n$ des racines imaginaires de l'équation (1) est donc toujours pair.

De la Règle des signes de Descartes.

140. La *règle des signes de* Descartes, pour être exacte, doit s'énoncer de la manière suivante : 1°. *Dans toute équation, complète ou incomplète,* $f(x)=0$, *ordonnée suivant les puissances de l'inconnue* x, *le nombre des racines positives est au plus égal au nombre des variations ;* 2°. *lorsque l'équation est complète, le nombre des racines négatives est au plus égal au nombre des permanences ;* 3°. *quand l'équation est incomplète, le nombre des racines négatives ne saurait surpasser le plus petit nombre des permanences que l'on peut obtenir en rétablissant les termes qui manquent et en les affectant successivement des coefficiens* $+0$, -0 ; 4°. *enfin, lorsqu'une équation complète a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences.*

Pour démontrer le principe énoncé (1°), nous ferons voir

d'abord que, lorsqu'un polynome, qui ne contient qu'une seule lettre x, est ordonné suivant les puissances décroissantes de cette lettre, si l'on multiplie ce polynome par un binome $x-\alpha$, dans lequel α représente un nombre positif, le produit contiendra au moins une variation de plus que le polynome qu'on a multiplié.

Par exemple, soit le polynome

$$x^7+bx^6-cx^5-dx^4-ex^3+fx^2+gx+h.$$

En le multipliant par $x-\alpha$, le produit sera

$$x^8+bx^7-cx^6-dx^5-ex^4+fx^3+gx^2+hx$$
$$-\alpha x^7-\alpha bx^6+\alpha cx^5+\alpha dx^4+\alpha ex^3-\alpha fx^2-\alpha gx-\alpha h.$$

Si l'on suppose que, α, b, c, d, e, f, g, h, sont positifs, les trois premiers termes du multiplicande offriront une seule variation depuis le 1er terme x^7, jusqu'au 3e terme $-cx^5$; les trois termes correspondans, $+x^8$, $+(b-\alpha)x^7$, $-(c+\alpha b)x^6$, du produit, présenteront toujours une variation, car $-(c+\alpha b)$ est nécessairement négatif. Le multiplicande, n'offrant qu'une variation depuis le 3e terme $-cx^5$ jusqu'au 6e terme $+fx^2$, les termes correspondans du produit présentent au moins une variation depuis le 3e terme $-(c+\alpha b)x^6$ jusqu'au 6e terme $+(f+\alpha e)x^3$. Enfin, le multiplicande n'offrant aucune variation depuis le 6e terme $+fx^2$ jusqu'au dernier terme h, les termes correspondans du produit admettent au moins une variation depuis le 6e terme $+(f+\alpha e)x^3$ jusqu'au dernier terme $-\alpha h$. Le produit contient donc au moins une variation de plus que le multiplicande.

Les mêmes raisonnemens étant applicables à un polynome quelconque P, il en résulte que *α étant positif, le produit de* P *par* $x-\alpha$ *contient au moins une variation de plus que le multiplicande* P.

Cette dernière propriété conduit au principe énoncé (1°). En effet, si l'on représente par $\varphi(x)$ le produit des facteurs du 1er degré correspondans aux racines imaginaires et aux racines négatives de l'équation (1)... $f(x)=0$, le 1er membre $f(x)$ sera le produit de $\varphi(x)$ par tous les facteurs $x-a$, $x-b$,

$x-c, \ldots$, correspondans aux racines positives, a, b, $c, \ldots$, de l'équation (1). Or, d'après ce qui vient d'être démontré, si $\varphi(x)$ admet γ variations, le produit de $\varphi(x)$ par $x-a$ contiendra au moins $\gamma+1$ variations; le produit de $(x-a)\,\varphi(x)$ par $x-b$ contiendra donc au moins $\gamma+2$ variations; et ainsi de suite. Par conséquent, si l'équation (1) admet p racines réelles positives a, b, $c, \ldots$, le produit $f(x)$, de $\varphi(x)$ par $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, contiendra au moins $\gamma+p$ variations. De sorte que V désignant le nombre des variations de $f(x)$, on aura $V>\gamma+p$, ou $V=\gamma+p$. Si γ n'est pas nul, p sera moindre que V; et si $\gamma=0$, on aura $p<V$ ou $p=V$. Le nombre p des racines réelles positives de $f(x)=0$ est donc au plus égal au nombre V des variations du premier membre $f(x)$. Ce qui démontre le principe énoncé (1°).

Ainsi, l'équation complète $x^4-3x^3+14x^2+6x-18=0$, ayant trois variations, ne saurait admettre au plus que trois racines réelles positives; tandis que l'équation incomplète... $x^3-7x+6=0$, ayant deux variations, ne peut admettre plus de deux racines positives.

2°. *Lorsque l'équation* (1)... $f(x)=0$ *est* COMPLÈTE, *le nombre de ses racines négatives est au plus égal au nombre des permanences de* $f(x)$. En effet, les racines négatives de (1), sont les racines positives de l'équation (2).... $f(-x)=0$ qui résulte du changement de x en $-x$ dans (1), (n° 125, 5°); l'équation (1) étant *complète*, l'équation (2) peut se déduire de (1) en changeant, dans (1), les signes des termes de rang pair (n° 125, 5°); et par ce changement de signes, les variations deviennent des permanences, tandis que les permanences deviennent des variations. Par conséquent, si (1) contient P permanences, (2) aura P variations; et d'après (1°), l'équation (2) admettra au plus P racines positives; l'équation (1) aura donc au plus P racines négatives. Ce qui démontre le principe énoncé (2°).

Ainsi, l'équation complète $x^4-3x^3+14x^2+6x-18=0$, n'ayant qu'une permanence, ne saurait admettre plus d'une racine négative.

REMARQUE. Une équation complète, qui n'a que des variations, ne peut admettre aucune racine négative.

3°. *Lorsque l'équation* $f(x)=0$ *est incomplète, le nombre de ses racines négatives peut surpasser celui des permanences; mais* il résulte de (2°) que, *si l'on rétablit tous les termes qui manquent, en leur donnant le coefficient* ± 0, *le nombre des racines négatives ne pourra jamais surpasser le plus petit nombre des permanences que l'on obtiendra en donnant successivement les signes* + *et* — *aux termes affectés du coefficient zéro.* Ce qui démontre le principe énoncé (3°).

EXEMPLE. *Soit l'équation incomplète* $x^7 - x + 1 = 0$.

Cette équation n'a pas de permanence, et cependant elle admet nécessairement une racine négative (n° 138). Si l'on rétablit les termes qui manquent, en leur donnant ± 0 pour coefficient, on obtiendra l'équation *complète*

$$x^7 \pm 0x^6 \pm 0x^5 \pm 0x^4 \pm 0x^3 \pm 0x^2 - x + 1 = 0.$$

Or, de quelque manière qu'on détermine les doubles signes, cette transformée ne saurait offrir moins d'une permanence. L'équation proposée ne peut donc pas admettre plus d'une racine négative (2°).

4°. Enfin, *lorsqu'une équation complète* $x^m \pm px^{m-1} + \text{etc.} = 0$, *a toutes ses racines réelles, le nombre* p *des racines positives est égal au nombre* V *des variations, et le nombre* n *des racines négatives est égal au nombre* P *des permanences.* En effet, l'équation étant complète, il est évident que $V + P = m$; et les m racines étant réelles, on a

$p + n = m$. Donc $V + P = p + n$; d'où $V - p = n - P$.

Or, d'après (1°), p ne peut surpasser V. D'ailleurs, si p était moindre que V, la relation $V - p = n - P$ donnerait $n > P$; le nombre n des racines négatives serait donc plus grand que le nombre P des permanences; ce qui est contraire à ce qui a été démontré (2°). On a donc $p = V$, et par suite $n = P$. Ce qui démontre la propriété énoncée.

Par exemple, l'équation complète,

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0,$$

présentant trois variations et une permanence, si toutes ses racines sont réelles, elle aura trois racines positives et une racine négative; et en effet, ces racines sont $+1$, $+2$, $+3$ et -3.

141. *Le nombre des racines négatives de l'équation incomplète* (1)... $f(x)=0$, *est au plus égal au nombre des variations de l'équation* (2)... $f(-x)=0$ *que l'on obtient par le changement de* x *en* $-x$ *dans* (1); car les racines négatives de (1) sont les racines positives de (2), (n° 125, 5°), et d'après le principe du n° 140 (1°), le nombre de ces racines est au plus égal au nombre des variations de (2).

Remarque. Lorsqu'on voudra découvrir combien une équation incomplète peut admettre au plus de racines négatives, on devra faire usage du principe précédent, parce qu'il est plus facile à appliquer que celui du n° 140, (3°).

Exemple. *Soit* $f(x)=x^7-x+1$; on a $f(-x)=-x^7+x+1$; et comme $f(-x)$ n'a qu'une variation, l'équation $f(x)=0$ ne saurait admettre plus d'une racine négative. Ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (n° 140, 3°).

142. La règle des signes de *Descartes* fournit deux méthodes pour *découvrir si une équation incomplète du* $m^{ième}$ *degré*, (1)... $f(x)=0$, *admet des racines imaginaires.*

1re Méthode. On change x en $-x$ dans $f(x)$; si $f(x)$ et $f(-x)$ admettent respectivement V et V′ variations, l'équation (1) contiendra au plus V racines positives (n° 140, 1°) et V′ racines négatives (n° 141); il y aura donc au plus $V+V'$ racines réelles. *L'équation* (1) *admettra donc au moins* $m-(V+V')$ *racines imaginaires.*

2e Méthode. On rétablit les termes qui manquent, en les affectant du coefficient $+0$ ou -0, de manière à introduire le plus grand nombre possible de variations dans l'équation complétée. *Si* $f(x)$ *contenant* V *variations, l'équation* (1), *rendue complète, admet* $V+\alpha$ *variations, il y aura au moins* α *racines imaginaires.* En effet, l'équation (1) contenant V variations, admet au plus V racines positives (n° 140, 1°); or,

après avoir rétabli les termes qui manquent, l'équation résultante admet $V + \alpha$ variations; elle a donc $m - (V + \alpha)$ permanences; le nombre des racines négatives ne peut donc pas surpasser $m - (V + \alpha)$, (n° 140, 2°); le nombre des racines réelles ne saurait donc surpasser $V + \{m - (V + \alpha)\}$ ou $m - \alpha$; il y a donc au moins α racines imaginaires.

143. On déduira facilement de cette dernière propriété que *n désignant un nombre entier positif, s'il manque 2n ou 2n + 1 termes entre deux termes de signes contraires, l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins 2n racines imaginaires; et que s'il manque 2n + 1 ou 2n + 2 termes entre deux termes de même signe, l'équation admet au moins 2n + 2 racines imaginaires.*

On reconnaîtra, par l'une quelconque de ces méthodes, que l'équation $x^{10} - x^5 - 1 = 0$, admet au moins huit racines imaginaires. Or, elle a nécessairement deux racines réelles (n° 138); on est donc certain que l'équation proposée a huit racines imaginaires et deux racines réelles.

§ II. *Propriétés des facteurs premiers. Théorie du plus grand commun diviseur.*

144. Nous ne considèrerons, dans toute cette théorie, que des nombres entiers et des quantités *entières* (page 3). Quand nous dirons que A est *divisible* par B, ou que B *divise* A, il faudra entendre que la division de A par B donne un quotient entier Q et un reste nul; de sorte que $A = BQ$.

145. Le *plus grand commun diviseur* de plusieurs quantités A, B, C, ..., est celui de tous les diviseurs communs à ces quantités, dont le *degré* est le plus élevé et dont les coefficiens numériques sont les plus grands. Ce plus grand commun diviseur est généralement de la forme ND; N désignant un nombre entier, et D une quantité littérale, qui n'est divisible par aucun nombre entier. Les quantités A, B, C, ..., n'admettront aucun diviseur commun d'un degré plus élevé que D; mais, si les facteurs premiers de N sont $d, d', d'', \ldots$, elles seront divisibles par les quantités du même degré, D, dD, d'D,

$d''D, \ldots, dd'D, dd''D, \ldots\ldots, ND$; et comme le plus grand de tous ces diviseurs communs est ND, on dit que ND est le *plus grand commun diviseur* des quantités A, B, C...

146. Il résulte de cette définition que *le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités entières est le produit de tous les facteurs premiers communs à ces quantités, chacun de ces facteurs communs étant affecté du plus petit de ses exposans dans les quantités données* (*). Quand nous parlerons désormais du produit des facteurs communs à plusieurs quantités, nous sous-entendrons que ces facteurs sont premiers et qu'ils sont affectés de leurs plus petits exposans dans ces quantités.

147. *Le plus grand commun diviseur de différens monomes s'obtient en multipliant le plus grand commun diviseur de leurs coefficiens numériques, par leur plus grand commun diviseur littéral.* On a vu dans l'Arithmétique comment on détermine le plus grand commun diviseur des coefficiens numériques ; et le plus grand commun diviseur littéral des monomes est toujours en évidence.

Par exemple, soient les monomes $48a^3b^3c^2$, $18a^6b^4d^2$, $15a^2b^4c^3d$; on cherche d'abord le plus grand commun diviseur des coefficiens 48, 18, 15, qui est 3 ; et comme le plus grand commun diviseur des monomes $a^3b^3c^2$, $a^6b^4d^2$, $a^2b^4c^3d$, est a^2b^3, on voit que le plus grand commun diviseur demandé est $3a^2b^3$.

148. Le plus grand commun diviseur des monomes qui composent un polynome, est le *plus grand commun diviseur monome* de ce polynome. Ainsi, le plus grand commun diviseur monome de $48a^3b^3c^2 - 18a^6b^4d^2 + 15a^2b^4c^3d$ est $3a^2b^3$.

149. Pour *déterminer le plus grand commun diviseur monome* M, *de différens polynomes* P', P'', P''', ..., on cherche leurs plus grands communs diviseurs monomes M', M'', M'''...;

(*) Nous admettons ici qu'un polynome n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers.

le plus grand commun diviseur de M′, M″, M‴,..., est le plus grand commun diviseur M demandé.

150. La *recherche du plus grand commun diviseur des polynomes* repose sur les principes suivans :

1°. *Le plus grand commun diviseur de deux quantités est le même que celui qui existe entre l'une d'elles et le produit ou le quotient de l'autre par une quantité qui n'ait aucun facteur commun avec la première ;* car les facteurs communs restent les mêmes, et le plus grand commun diviseur est le produit de ces facteurs (n° 146).

Ainsi, lorsque P est premier avec B, le plus grand commun diviseur de A et B est le même que celui de AP et B.

On simplifie ordinairement l'énoncé de cette propriété, en disant que *le plus grand commun diviseur de deux quantités ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise l'une d'elles par une quantité qui n'a aucun facteur commun avec l'autre.*

Lorsque P n'est pas premier avec B, les facteurs communs de A et B n'étant plus les mêmes que ceux de AP et B, le plus grand commun diviseur de A et B n'est pas le même que celui de AP et B.

Par conséquent, *pour que le plus grand commun diviseur de deux quantités quelconques* A, B, *soit le même que celui de* AP *et* B, *il faut et il suffit que* P *soit premier avec* B.

2°. *Quand on aperçoit un facteur* N *commun à plusieurs quantités* A, B, C,..., *on peut simplifier la recherche de leur plus grand commun diviseur ;* car en divisant A, B, C,....., par N, on trouvera des quotiens exacts A′, B′, C′,..., on aura $A = NA'$, $B = NB'$, $C = NC'$,..., et il suit du principe du n° 146, qu'on obtiendra le plus grand commun diviseur demandé en multipliant N par le plus grand commun diviseur des quotiens A′, B′, C′,...

3°. *Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, pour en déduire celui d'un nombre quelconque de quantités,* A, B, C,...., on détermine successivement le plus grand commun diviseur δ de A et B, le plus grand commun diviseur δ' de δ et C ; et ainsi de suite :

le dernier de ces plus grands communs diviseurs est celui des quantités données. En effet, le plus grand diviseur commun à des quantités étant le produit de tous les facteurs premiers communs à ces quantités, δ est le produit des facteurs premiers communs à A et B, et δ' est le produit des facteurs premiers communs à δ et C; δ'' est donc le produit de tous les facteurs premiers communs à A, B, C; δ'' est donc le plus grand commun diviseur de A, B, C; et ainsi de suite.

4°. *Lorsqu'un polynome* $A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$, *est divisible par une quantité* δ *indépendante de la lettre ordonnatrice* x, *chacun des coefficiens* A, B, C, *etc.*, *de* x, *est nécessairement divisible par* δ, (n° 20).

151. *Pour simplifier la recherche du plus grand commun diviseur de différens polynomes* P', P'', P''', ..., nous les diviserons d'abord par leurs plus grands communs diviseurs monomes respectifs, M', M'', M''', ...; les quotiens A, B, C, ..., ne seront divisibles par aucun monome, et le plus grand commun diviseur des polynomes proposés sera égal au produit du plus grand commun diviseur M des monomes, M', M'', M''', ..., par le plus grand commun diviseur D des polynomes A, B, C, ..., (n° 150, 2°). Nous allons faire voir comment on peut calculer D.

152. Pour *calculer le plus grand commun diviseur* D, *des polynomes* A, B, *qui n'admettent aucun diviseur monome*, on observe que si l'un de ces polynomes divisait l'autre, il serait nécessairement le plus grand commun diviseur cherché. On est donc conduit à diviser ces polynomes l'un par l'autre; à cet effet, on les ordonne suivant les puissances décroissantes d'une même lettre x; et si le plus fort des exposans de x dans B est moindre que dans A, on divise A par B. Si A et B étaient du même degré par rapport à x, il serait indifférent de diviser A par B ou B par A.

1°. *Quand les polynomes* A, B, *ne contiennent qu'une seule lettre* x, *ils ne peuvent admettre aucun diviseur indépendant de* x. En effet, si B était divisible par une quantité δ indépendante

de x, tous les coefficiens de x dans B, seraient divisibles par δ (n° 150, 4°); or ces coefficiens sont des nombres entiers; δ serait donc un nombre entier ; B admettrait donc un diviseur monome ; ce qui est contre l'hypothèse. Cela posé :

Lorsque B divise A, le plus grand commun diviseur cherché est B.

Quand la division de A par B fournit un quotient entier Q' et un reste R', on a

$$A = BQ' + R' ; \text{ d'où } R' = A - BQ'.$$

Les polynomes A, B, Q', R', étant entiers, la 2e égalité fait voir que tout diviseur commun de A et B divise R', et il résulte de la 1re égalité que tout diviseur commun de B et R' divise A ; les diviseurs communs de A et B sont donc les mêmes que ceux de B et R' ; le plus grand commun diviseur D de A et B, est donc le même que celui de B et R'.

Quand le quotient Q' est fractionnaire, on ignore si les diviseurs communs de A et B sont les mêmes que ceux de B et R'. Mais, la propriété du n° 150 (1°) fournit le moyen d'éviter les quotiens fractionnaires. En effet, supposons que la division de A par B donne un quotient entier q' et un reste r' *plus grand* que B, tel que le coefficient α du 1er terme de r' ne soit pas divisible par le coefficient C du 1er terme de B; on aura $A = Bq' + r'$, et l'on en déduita comme ci-dessus, que le plus grand commun diviseur D de A et B est le même que celui de r' et B. On est donc conduit à diviser r' par B. Si l'on effectuait cette division, pour parvenir au reste R' *moindre* que le diviseur B, on trouverait des termes fractionnaires au quotient.

On peut éviter les fractions, sans changer le plus grand commun diviseur, en multipliant r' par une quantité entière γ indépendante de x, telle que le coefficient du premier terme de $\gamma r'$ soit divisible par C (*) ; car le diviseur B n'admettant

(*) On rendrait la division possible en multipliant r' par C. Mais, quand α et C ne sont pas premiers entre eux, on obtient un multiplicateur plus simple

aucun diviseur indépendant de x, le multiplicateur γ est premier avec B, et par suite, le plus grand commun diviseur D de r' et B est le même que celui de $\gamma r'$ et B (n° 150, 1°). Il suffit donc de chercher ce dernier plus grand commun diviseur. La division de $\gamma r'$ par B donnera un quotient entier q'' et un reste r'' *moindre* que $\gamma r'$; on aura

$$\gamma r' = Bq'' + r''; \quad \text{d'où} \quad r'' = \gamma r' - Bq''.$$

Les quantités γ, B, r', r'', q'', étant entières, la 2e égalité fait voir que tout diviseur commun de $\gamma r'$ et B divise r'', et il résulte de la 1re égalité que tout diviseur commun de r'' et B divise $\gamma r'$; le plus grand commun diviseur D, de $\gamma r'$ et B, est donc le même que celui de r'' et B. Si l'on continue ces calculs, en ayant soin, lorsque le 1er terme d'un dividende partiel n'est pas divisible par $\mathcal{C}$, de multiplier ce dividende par une quantité indépendante de x, telle que le 1er terme du produit soit divisible par $\mathcal{C}$, on n'obtiendra que des termes entiers au quotient, et le plus grand commun diviseur ne changera pas.

Par conséquent, *lorsque dans la division de deux polynomes entiers l'un par l'autre, le diviseur ne contient aucun facteur indépendant de la lettre ordonnatrice x, on peut toujours éviter les quotiens fractionnaires, sans changer le plus grand commun diviseur, en multipliant les dividendes partiels par des quantités entières indépendantes de x; le plus grand commun diviseur entre le dividende et le diviseur est constamment le même que celui qui existe entre le diviseur et l'un quelconque des restes partiels obtenus dans le cours de la division.*

Les plus forts exposans de x dans les restes partiels $r', r'', ..,$ étant des nombres entiers positifs qui vont en diminuant, on parviendra toujours à un dernier reste R' *moindre* que le diviseur

---

en multipliant r' par le produit γ de tous les facteurs de $\mathcal{C}$ qui n'entrent pas dans α. Pour calculer γ, on cherche le plus grand commun diviseur d des nombres $\alpha, \mathcal{C}$, et l'on divise $\mathcal{C}$ par d; le quotient exprime le multiplicateur γ demandé.

B; et d'après le principe précédent, le plus grand commun diviseur D de A et B sera le même que celui de B et R'.

Ainsi, dans tous les cas, la recherche du plus grand commun diviseur D, des polynomes A, B, proposés, sera réduite à déterminer le plus grand commun diviseur D de deux polynomes B, R', dans lesquels les plus forts exposans de x sont respectivement moindres que dans A et B. Ce qui conduit à diviser B par R'.

Lorsque B sera divisible par R', le plus grand commun diviseur D de A et B sera R'.

Lorsque B ne sera pas divisible par R', si la division de B par R' fournit un quotient entier Q'' et un reste R'' *moindre* que R', on prouvera comme ci-dessus que le plus grand commun diviseur D de B et R' sera le même que celui de R' et R''.

Si, dans la division de B par R', le 1er terme d'un dividende partiel n'étant pas divisible par le coefficient du 1er terme de R', ce diviseur ne contient aucun facteur indépendant de x, on pourra éviter les quotiens fractionnaires, sans changer le plus grand commun diviseur, en multipliant ce dividende par une quantité indépendante de x; on n'obtiendra de cette manière que des termes entiers au quotient, on parviendra à un reste R'' *moindre* que le diviseur R'; et le plus grand commun diviseur D de B et R' sera le même que celui des restes R', R''.

Mais, lorsque le diviseur R' admettra un facteur indépendant de x, si dans le cours de la division par R', on trouve un dividende partiel dont le 1er terme ne soit pas divisible par le coefficient du 1er terme de R', on ne pourra plus éviter les quotiens fractionnaires en multipliant le dividende par une quantité indépendante de x, car cette multiplication pourrait altérer le plus grand commun diviseur en introduisant des facteurs communs (n° 150, 1°). Pour remédier à cet inconvénient, on observe que B ne contenant aucun facteur indépendant de x, on ne changera pas le plus grand commun diviseur de B et R' en supprimant tous les facteurs indépendans de x contenus dans R'; à cet effet, on cherche le plus grand commun

diviseur d' des coefficiens de x dans R' (*); on divise R' par d', ce qui donne un quotient R_1; on a $R' = d'R_1$; et le plus grand commun diviseur D de B et R' est le même que celui de B et R_1 (n° 150, 1°). De sorte qu'il suffit de déterminer ce dernier plus grand commun diviseur. On est donc conduit à diviser B par R_1. Dans tout le cours de cette division, le diviseur R_1 n'admettant aucun facteur indépendant de x, on pourra éviter les quotiens fractionnaires, sans changer le plus grand commun diviseur, en multipliant les dividendes partiels par des quantités indépendantes de x, et l'on parviendra à un reste R'' *moindre* que le diviseur R_1. Le plus grand commun diviseur D de B et R_1 sera le même que celui de R_1 et R''.

On sera donc conduit à diviser R' ou R_1 par R''.

En continuant ces calculs, et en ayant soin de supprimer tous les facteurs indépendans de x qui peuvent exister dans chaque reste, *moindre* que le diviseur, on n'obtiendra que des termes entiers dans les quotiens et dans les restes, chaque diviseur n'admettra aucun facteur indépendant de x; et le plus grand commun diviseur D des polynomes A, B, sera le même que celui qui existera entre l'un quelconque des dividendes et le diviseur correspondant. Les plus forts exposans de x diminuant dans les restes successifs, on parviendra toujours à un reste R indépendant x.

Lorsque R sera nul, le diviseur S, qui aura conduit à ce reste R, sera le plus grand commun diviseur D de A et B. Ce plus grand commun diviseur contiendra nécessairement la lettre ordonnatrice x.

Lorsque R ne sera pas nul, les polynomes A, B, seront premiers entre eux; car leur plus grand commun diviseur étant le même que celui qui existe entre le diviseur S et le reste R, s'il existait un plus grand commun diviseur D entre les po-

(*) Ces coefficiens étant des nombres entiers, on a donné dans l'Arithmétique le moyen de trouver leur plus grand commun diviseur.

lynomes proposés, D diviserait S et R; or R ne contient pas la lettre ordonnatrice x; D serait donc indépendant de x; A et B admettraient donc un commun diviseur indépendant de x; ce qui n'est pas possible (page 151, 1°).

Ainsi, lorsque les polynomes A, B, qui ne contiennent que la seule lettre x, admettront un plus grand commun diviseur, on parviendra toujours à un reste nul, et le diviseur qui aura conduit à ce reste, sera le plus grand commun diviseur de A et B. Quand les polynomes A, B, seront premiers entre eux, on parviendra nécessairement à un reste indépendant de x qui ne sera pas nul.

1re Remarque. Lorsque dans le cours d'une division, on aperçoit dans un reste partiel k, un facteur indépendant de x, on peut simplifier le calcul (sans changer le plus grand commun diviseur) en supprimant ce facteur dans le reste k; car, d'après la manière dont on a opéré, le diviseur ne saurait admettre aucun facteur indépendant de x.

2e Remarque. Le premier diviseur B ne contenant aucun facteur monome, on ne changera pas le plus grand commun diviseur, en supprimant tous les facteurs monomes contenus dans chaque reste.

3e Remarque. Lorsque dans le cours d'une division, on aperçoit un facteur k commun entre un des restes et le diviseur, ce facteur devant entrer dans le plus grand commun diviseur cherché, on peut simplifier le calcul en divisant ce reste et le diviseur par k; on détermine le plus grand commun diviseur k' entre les quotiens de ces divisions; et le plus grand commun diviseur des polynomes proposés est égal au produit de k par k', (n° 150, 2°).

Exemple. *Soient*,

$$A = 4x^4 - 10x^3 + x^2 - 1, \quad B = 6x^3 - 11x^2 - 8x - 1.$$

Pour déterminer le plus grand commun diviseur D de A et B, on observe que dans la division de A par B, le diviseur B ne contenant aucun facteur indépendant de x, on n'altère pas le plus grand commun diviseur en multipliant A par un nombre

quelconque, car ce nombre est premier avec B. Ainsi, pour *éviter les fractions*, on pourrait multiplier A par le coefficient 6 du 1er terme du diviseur; mais on déduit de la méthode qui a été donnée (page 152), qu'il suffit de multiplier A par 3; le plus grand commun diviseur de A et B étant le même que celui de 3A et B, on divise 3A par B, ce qui donne le quotient $2x$ et le reste $r' = -8x^3 + 19x^2 + 2x - 3$, qui n'admet aucun diviseur indépendant de x, ni aucun diviseur monome.

Le plus grand commun diviseur demandé étant le même que celui de r' et B, on est conduit à diviser r' par B; on rend la division possible, sans changer le plus grand commun diviseur, en multipliant r' par 3; la division de $3r'$ par B donne le quotient -4 et le reste $R' = 13(x^2 - 2x - 1)$; on supprime le facteur monome 13 qui est premier avec B, et la question se trouve réduite à chercher le plus grand commun diviseur entre B et le reste simplifié $R_1 = x^2 - 2x - 1$. On divise B par R_1; cette division se fait sans qu'il soit nécessaire d'introduire des facteurs dans les dividendes partiels; on parvient à un reste nul, et l'on en conclut que R_1 est le plus grand commun diviseur des polynomes A, B.

On trouvera de cette manière le plus grand commun diviseur de deux polynomes contenant une seule lettre; et le principe du n° 150 (3°) fournira le moyen d'en déduire le *plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes contenant une seule lettre.*

2°. *Lorsque les polynomes* A, B, *contiennent deux lettres* x, y, les coefficiens de x dans A et B, ne renferment qu'une seule lettre y, et ces polynomes peuvent admettre des diviseurs indépendans de x. Si, pour trouver le plus grand commun diviseur D de A et B, on divisait A par B, on ne pourrait pas généralement éviter les quotiens fractionnaires; car le diviseur B pouvant admettre des facteurs indépendans de x, lorsque le coefficient du 1er terme d'un dividende partiel ne serait pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur, la multiplication de ce dividende par une quantité ϕ

indépendante de x, pourrait altérer le plus grand commun diviseur ; de plus, on risquerait de changer le plus grand commun diviseur en supprimant les facteurs indépendans de x contenus dans B, car A peut admettre des facteurs de cette espèce. Pour lever cette difficulté, on ramène la question à chercher le plus grand commun diviseur de deux polynomes qui n'ont aucun diviseur indépendant de x. A cet effet, on détermine successivement, par la méthode indiquée (1°), le plus grand commun diviseur Y′ des coefficiens de x dans A, et le plus grand commun diviseur Y″ des coefficiens de x dans B ; le plus grand commun diviseur Y, de Y′ et Y″, est le *plus grand commun diviseur indépendant de* x, des polynomes A, B. Les quantités Y′, Y″, Y, ne peuvent être que des polynomes en y, ou l'unité, car A et B n'admettent aucun diviseur monome (*page* 151).

Pour trouver le *plus grand commun diviseur dépendant de* x, on divise A par Y′ et B par Y″ ; les quotiens A′, B′, sont des fonctions de x et y qui n'admettent aucun diviseur indépendant de x, et qui ne sont divisibles par aucun monome. On a, $A = Y'A'$, $B = Y''B'$.

Or, d'après le principe du n° 150 (2°), on obtiendra le plus grand commun diviseur D des polynomes A, B, en multipliant Y par le plus grand commun diviseur D′ des polynomes A′, B′.

La question est ainsi réduite à *déterminer le plus grand commun diviseur des polynomes* A′, B′, *qui n'admettent aucun diviseur indépendant de* x, *ni aucun diviseur monome*. On calculera ce plus grand commun diviseur, par la méthode indiquée (1°). Ainsi, on divisera A′ par B′. Le diviseur B′ n'admettant aucun facteur indépendant de x, ni aucun facteur monome, toute quantité indépendante de x ou monome, sera première avec B′ ; on n'altérera donc pas le plus grand commun diviseur en multipliant ou en divisant les dividendes partiels par des quantités indépendantes de x ou par des monomes. Ainsi, lorsque le coefficient a du 1er terme d'un dividende partiel N, ne sera pas divisible

par le coefficient $\mathcal{C}$ du 1er terme du diviseur B', on rendra la division possible, sans altérer le plus grand commun diviseur, en multipliant N par le produit γ des facteurs de $\mathcal{C}$ qui n'entrent pas dans α (*); on pourra supprimer dans chaque reste son plus grand commun diviseur indépendant de x, et son plus grand diviseur monome. On parviendra de cette manière à un reste simplifié R_1, *moindre* que B', qui n'admettra aucun diviseur indépendant de x, ni aucun diviseur monome. Le plus grand commun diviseur de A' et B' sera le même que celui de B' et R_1. La question sera réduite à chercher le plus grand commun diviseur de B' et R_1; et comme R_1 ne contient aucun diviseur indépendant de x, ni aucun diviseur monome, on pourra opérer sur B' et R_1 comme on vient de le faire sur A' et B'; ce qui conduira à un reste simplifié R_2 *moindre* que R_1, qui n'admettra aucun diviseur indépendant de x, ni monome. Le plus grand commun diviseur de A' et B' sera le même que celui de R_1 et R_2. En continuant ces calculs, on parviendra à un reste R indépendant de x. Lorsque R sera nul, le diviseur qui aura conduit à ce reste sera le plus grand commun diviseur D' de A' et B'; le plus grand commun diviseur de A et B sera $Y \times D'$. Quand R ne sera pas nul, on prouvera, comme dans la page 155, que A' et B' seront premiers entre eux; le plus grand commun diviseur de A et B sera Y.

EXEMPLE. *Soient les deux polynomes*

$$A=(y^3-1)x^3+(y-1)y^2x^2-(y^3-y^2+y-1)x-(y-1)y,$$
$$B=(y-1)x^3-(y-1)x^2-(y-1)y^2x+(y-1)y^2.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficiens de x dans A est $Y'=y-1$, et celui des coefficiens de x dans B est $Y''=y-1$. Le plus grand commun diviseur indépendant de x, de A et B, est donc $Y=y-1$.

(*) Les coefficiens α, $\mathcal{C}$, ne pouvant renfermer qu'une lettre, on calculera leur plus grand commun diviseur d par la méthode indiquée (1°); et en divisant $\mathcal{C}$ par d, le quotient exprimera le multiplicateur γ demandé.

On divise A et B par $y-1$, ce qui donne les quotiens,

$$A' = (y+1)x^3 + y^2x^2 - (y^2+1)x - y,$$
$$B' = x^3 - x^2 - y^2x + y^2.$$

Pour *trouver le plus grand commun diviseur dépendant de* x, on divise A' par B', ce qui donne le quotient $y+1$ et le reste $R' = (y^2+y+1)x^2 + (y^3-1)x - (y^2+y+1)y$.

On divise les coefficiens de x, dans ce reste, par leur plus grand commun diviseur y^2+y+1; ce qui donne le quotient $R_1 = x^2 + (y-1)x - y$. Le plus grand commun diviseur de A' et B' étant le même que celui de B' et R_1, on divise B' par R_1, ce qui donne le quotient $x-y$, et le reste $R = 0$. Le plus grand commun diviseur de A' et B' est R_1, et le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, proposés est... $YR_1 = (y-1)\{x^2 + (y-1)x - y\}$.

On trouvera de cette manière le plus grand commun diviseur de deux polynomes quelconques contenant deux lettres; et le principe du n° 150 (3°), fournira le moyen d'en déduire le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes contenant deux lettres. On en déduira le *plus grand commun diviseur de polynomes contenant trois lettres;* et ainsi de suite. On est donc en état de *déterminer le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes entiers, quel que soit d'ailleurs le nombre des lettres contenues dans ces polynomes.*

153. *Un procédé analogue à celui du plus grand commun diviseur, fournit le moyen de trouver une équation qui détermine toutes les valeurs de* y *qui satisfont au système de deux équations* (1)... $A = 0$, $B = 0$, *contenant deux inconnues,* x, y; *les premiers membres* A, B, *sont des polynomes entiers quelconques, qui peuvent admettre des diviseurs monomes et indépendans de l'une des inconnues.* On ordonne A et B suivant les puissances décroissantes de x; on divise A par B (on suppose que le plus fort exposant de x dans B n'est pas plus grand que dans A), en ayant soin de ne supprimer aucun facteur contenant les inconnues; et toutes les fois que le coeffi-

cient du 1er terme d'un dividende partiel n'est pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur, on rend la division possible en multipliant le dividende par une quantité indépendante de x (page 159); ce qui conduit à un reste R′ *moindre* que le diviseur B. On divise de même B par R′, en ayant soin d'éviter les quotiens fractionnaires, ce qui conduit à un reste R″ *moindre* que le diviseur R′. On continue à diviser les restes successifs, les uns par les autres, en évitant les quotiens fractionnaires, et en ne supprimant aucun facteur fonction des inconnues. On parvient ainsi à un reste R indépendant de x, et *l'équation* $R=0$ *détermine toutes les valeurs de* y *qui conviennent au système* (1)....$A=0$, $B=0$.

Supposons que pour parvenir au reste R′ *moindre* que le diviseur B, il soit nécessaire, afin de ne trouver que des termes entiers au quotient, de multiplier les dividendes successifs par des quantités γ, γ', γ'',..., entières et indépendantes de x; la division de $A\gamma$ par B donnera un quotient entier q et un reste r *plus grand* que B; la division de $r\gamma'$ par B donnera un quotient entier q' et un reste r' *plus grand* que B, mais *moindre* que r; et ainsi de suite. On aura

$$A\gamma=Bq+r,\quad r\gamma'=Bq'+r',\quad r'\gamma''=Bq''+r'',\ldots..$$

D'après ces relations, toute *solution* du système (1) réduit à zéro les restes, r, r', r'',..., R′; cette solution donne donc $B=0$, $R'=0$.

Ainsi, *lorsqu'on évite les quotiens fractionnaires, les valeurs de* x *et* y *qui réduisent le dividende et le diviseur à zéro, jouissent de la propriété de réduire à zéro les restes successifs correspondans aux différens termes du quotient.*

De même, si l'on divise B par R′, en évitant les quotiens fractionnaires, on obtiendra des restes entiers, s, s', s'',... *plus grands* que R′, mais qui seront de plus en plus petits par rapport à x; on parviendra à un reste R″ *moindre* que le diviseur R′; et d'après ce qui vient d'être démontré, toute solution du système (1) donnant $B=0$, $R'=0$, réduira à zéro tous les restes, s, s', s'',....

En continuant ces calculs, on parviendra à un reste R indépendant de x; et il résulte de ce qui vient d'être démontré que toute solution du système (1) réduira à zéro les différens restes r, r', r''..., R', s, s', s'', ..., R'', ..., R. L'équation $R = 0$, déterminera donc toutes les valeurs de y propres à satisfaire au système (1). Ce qui démontre le principe énoncé.

REMARQUE. *Les valeurs de x et y qui réduisent deux restes consécutifs à zéro, peuvent ne pas convenir au système* (1). Par exemple, si $x = a$, $y = \zeta$, réduisent r' et r'' à zéro, la relation $r' \gamma^n = Bq'' + r''$ donnera $Bq'' = 0$, ce qui peut avoir lieu sans que B devienne zéro, car q'' peut devenir nul.

Il résulte de cette discussion que *l'équation* $R = 0$ *fournit toutes les valeurs de y, propres à satisfaire au système* (1), *et qu'elle peut donner en outre des valeurs de y étrangères à ce système.* Nous verrons (n°s 181, ..., 187) comment on détermine toutes les solutions du système (1).

§ III. *Des Fonctions dérivées.*

154. *Lorsqu'on change x en $x + h$, dans une fonction quelconque $f(x)$ de la* VARIABLE x, *et qu'on effectue le développement de $f(x + h)$ suivant les puissances entières positives et croissantes de h, le coefficient de la première puissance de h, dans le développement de $f(x + h)$, est ce qu'on nomme la* FONCTION DÉRIVÉE *de $f(x)$, ou simplement la* DÉRIVÉE *de $f(x)$;* on la représente par $f'(x)$.

Nous allons chercher les dérivées des *fonctions entières*

$$\alpha x^m, \quad x^m + px^{m-1} + \text{etc.}, \quad (x-a)^\alpha (x-b)^\zeta (x-c)^\gamma,$$

dans lesquelles les exposans, m, α, ζ, γ, sont des nombres entiers positifs.

1°. Soit $f(x) = \alpha x^m$. On aura

$$f(x+h) = \alpha(x+h)^m = \alpha(x^m + m\dot{x}^{m-1}h + \text{etc.}).$$

La dérivée de αx^m est donc $m\alpha x^{m-1}$.

Ainsi, *pour obtenir la dérivée d'un monome αx^m, il suffit*

de multiplier ce monome par l'exposant de x, et de diminuer l'exposant d'une unité.

Si l'on fait successivement $m = 1$ et $m = 0$, dans la dérivée max^{m-1} de ax^m, on verra que la dérivée de ax est ax^0 ou a, et que *la dérivée (par rapport à la* VARIABLE x*) d'une quantité a indépendante de x est égale à zéro.*

2°. Soit $f(x) = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + rx^2 + sx + t$.

Pour calculer $f'(x)$, on change x en $x + h$, dans $f(x)$, ce qui donne

$$(x+h)^m + p(x+h)^{m-1} + q(x+h)^{m-2} + \ldots + r(x+h)^2 + s(x+h) + t.$$

Dans cette expression de $f(x+h)$, on développe les puissances indiquées, à l'aide de la *formule du binome;* les termes affectés de la première puissance de h sont les seconds termes de ces développemens, et l'on trouve que le coefficient de la première puissance de h dans le développement de $f(x+h)$ est $f'(x) = mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} + \ldots + 2rx + s$.

En comparant cette expression de $f'(x)$ à celle de $f(x)$, on voit que *la dérivée d'un polynome entier est égale à la somme des dérivées des différens termes de ce polynome;* de sorte que *pour former cette dérivée, il suffit de multiplier chaque terme du polynome par l'exposant de x dans ce terme et de diminuer l'exposant de x d'une unité.*

Par exemple, si $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7x - 3$,

on aura $f'(x) = 4x^3 - 10x + 7$.

3°. Soit $f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma$.

Pour trouver la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$, on change x en $x + h$ dans $f(x)$, ce qui donne

$$f(x+h) = (x-a+h)^\alpha (x-b+h)^\beta (x-c+h)^\gamma.$$

On développe les puissances indiquées, par rapport aux puissances croissantes de h, en regardant $(x-a)+h$,

$(x-b)+h$, $(x-c)+h$, comme des binomes dont les premiers termes sont, $x-a$, $x-b$ et $x-c$; les facteurs de $f(x+h)$ deviennent,

$$(x-a)^{\alpha}+\alpha(x-a)^{\alpha-1}h+\text{etc.},$$
$$(x-b)^{\zeta}+\zeta(x-b)^{\zeta-1}h+\text{etc.},$$
$$(x-c)^{\gamma}+\gamma(x-c)^{\gamma-1}h+\text{etc.}$$

Pour obtenir le coefficient $f'(x)$ de la première puissance de h dans le produit de ces trois facteurs, on multiplie successivement le coefficient de la première puissance de h dans un facteur, par les termes indépendans de h dans les autres facteurs, et l'on trouve que le coefficient cherché est

$$\begin{aligned}&\alpha(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\zeta}(x-c)^{\gamma}\\+\;&\zeta(x-b)^{\zeta-1}(x-a)^{\alpha}(x-c)^{\gamma}\\+\;&\gamma(x-c)^{\gamma-1}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\zeta}.\end{aligned}$$

Chacun des trois termes de cette expression de $f'(x)$, étant divisible par $(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\zeta-1}(x-c)^{\gamma-1}$, si l'on pose $P=\alpha(x-b)(x-c)+\zeta(x-a)(x-c)+\gamma(x-a)(x-b)$, on pourra mettre $f'(x)$ sous la forme

$$(3)\ldots f'(x)=(x-a)^{\alpha-1}\times(x-b)^{\zeta-1}\times(x-c)^{\gamma-1}\times P,$$

et P ne sera divisible par aucun des facteurs, $x-a$, $x-b$, $x-c$, de $f(x)$, car chacun de ces binomes divise deux des trois termes de P et ne divise pas le troisième. Or,

$$f(x)=(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\zeta-1}(x-c)^{\gamma-1}\times(x-a)(x-b)(x-c).$$

Comparant cette expression de $f(x)$ à celle de $f'(x)$, on voit que le plus grand diviseur commun à $f(x)$ et $f'(x)$ est le produit

$$(x-a)^{\alpha-1}\times(x-b)^{\zeta-1}\times(x-c)^{\gamma-1}$$

de tous les facteurs de $f(x)$, élevés respectivement à une puissance moindre d'une unité.

155. Les raisonnemens du n° 154 (3°), étant applicables à un nombre quelconque de facteurs, et les exposans α, β, γ, etc., des facteurs de $f(x)$, pouvant être égaux à l'unité, on en déduit que *le plus grand diviseur commun à un polynome* $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+sx+t$, *et à sa dérivée* $mx^{m-1}+(m-1)px^{m-2}+(m-2)qx^{m-3}+\ldots+s$, *est le produit des facteurs de ce polynome élevés respectivement à une puissance moindre d'une unité.*

Par exemple, si $f(x)=(x-a)^3\ (x-b)^2\ (x-c)$, le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ sera $(x-a)^2\ (x-b)\ (x-c)^0$, ou $(x-a)^2\ (x-b)$, car $(x-c)^0=1$.

156. La dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ étant une nouvelle fonction de x, on peut chercher de même la dérivée de $f'(x)$; cette nouvelle dérivée est la *deuxième dérivée de* $f(x)$, et on la désigne par $f''(x)$. Par une raison semblable, la dérivée de $f''(x)$ est la *troisième dérivée* de $f(x)$, on la désigne par $f'''(x)$; la fonction $f'''(x)$ est la première dérivée de $f''(x)$, ou la deuxième dérivée de $f'(x)$. Et ainsi de suite.

Exemple. Si $f(x)=x^m+px^{m-1}+\ldots+rx^2+sx+t$, on a

$$f'(x)=mx^{m-1}+(m-1)px^{m-2}+\ldots+2rx+s,$$
$$f''(x)=m(m-1)x^{m-2}+(m-1)(m-2)px^{m-3}+\ldots+2r,$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)x^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)px^{m-4}+\text{etc.}$$

Et ainsi de suite.

157. *Lorsque* $f(x)$ *est un polynome entier, les coefficiens des diverses puissances de* h, *dans le développement de* $f(x+h)$ *ordonné suivant les puissances croissantes de* h, *peuvent être exprimés au moyen des dérivées successives de* $f(x)$. En effet, soit

$f(x)=x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+rx^2+sx+t$; on aura
$f(x+h)=(x+h)^m+p(x+h)^{m-1}+\ldots+r(x+h)^2+s(x+h)+t.$

Développant les diverses puissances de $x+h$, suivant les puissances croissantes de h, l'expression de $f(x+h)$ devient

$$\begin{array}{l|l|l}
x^m + mx^{m-1} & h + m(m-1)\,x^{m-2} & \frac{1}{2}h^2 + \text{etc.} \\
+px^{m-1} + (m-1)px^{m-2} & +(m-1)(m-2)px^{m-3} & \\
+qx^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} & +(m-2)(m-3)qx^{m-4} & \\
\vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \\
+rx^2 + 2rx & + 2r & \\
+sx + s & & \\
+t & &
\end{array}$$

Dans ce développement de $f(x+h)$: le terme indépendant de h est la fonction primitive $f(x)$; le coefficient $mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} + \ldots + 2rx + s$, de la première puissance de h, est la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.

Le coefficient de $\frac{1}{2}h^2$ est la 2e dérivée $f''(x)$ de $f(x)$.

Et en poussant plus loin les calculs, on verrait que dans la suite du développement de $f(x+h)$, les coefficiens de $\frac{h^3}{2.3}$, $\frac{h^4}{2.3.4}$, etc., sont les dérivées successives $f'''(x)$, $f''''(x)$, etc. De sorte que,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2.3}f'''(x) + \text{etc.}$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

§ IV. *Équation aux différences. Calcul d'une quantité moindre que la plus petite des différences réelles entre les racines d'une équation donnée.*

158. La méthode du n° 153 fournit le moyen de *former une équation qui détermine toutes les différences entre les racines, a, b, c, ..., k, d'une équation du m^{ième} degré* (1)... $f(x) = 0$.

En effet, si l'on désigne par z et z' des racines quelconques de l'équation (1), chacune des quantités, z, z', pourra prendre successivement les m valeurs, $a, b, c, \ldots, k$; et l'on exprimera que z et z' sont des racines de l'équation (1), en posant $f(z) = 0$, $f(z') = 0$.

Soit $z'-z=y$. Le système de ces trois dernières équations déterminera toutes les valeurs de y correspondantes aux m valeurs, a, b, c, ..., k, de chacune des inconnues z, z'; ces valeurs de y exprimeront donc toutes les différences entre les m racines de l'équation (1); on obtiendra donc l'équation qui détermine ces différences, en éliminant z' et z entre les équations $f(z)=0$, $f(z')=0$, $z'-z=y$.

Pour éliminer z', on remplace z' par sa valeur $z+y$ tirée de $z'-z=y$; l'équation $f(z')=0$ devient $f(z+y)=0$. Or d'après ce qu'on a vu (n° 157), si l'on développe $f(z+y)$ suivant les puissances croissantes de y, l'équation $f(z+y)=0$, deviendra

$$(2)\ldots\ldots f(z)+yf'(z)+\frac{y^2}{2}f''(z)+\frac{y^3}{2.3}f'''(z)+\ldots+y^m=0,$$

et $f(z)$ étant nul, l'équation (2) se réduit à

$$(3)\ldots\ldots yf'(z)+\frac{y^2}{2}f''(z)+\frac{y^3}{2.3}f'''(z)+\ldots+y^m=0.$$

Mais, pour une valeur a de z, la relation $y=z'-z$ donne $y=z'-a$; l'équation (3) devient

$$yf'(a)+\frac{1}{2}y^2f''(a)+\frac{1}{2.3}y^3f'''(a)+\ldots+y^m=0.$$

Les m racines de cette dernière équation sont les m différences $a-a$, $b-a$, $c-a$, ..., $k-a$, entre la racine a et les m racines, a, b, c, ..., k; car les valeurs de y, correspondantes à $z=a$, sont fournies par la relation $y=z'-a$, en donnant successivement à z' ses m valeurs a, b, c, ..., k.

Chacune des m valeurs, a, b, c, ..., k, de z, substituée dans (3), fournit donc une valeur nulle de y. Pour supprimer ces m valeurs nulles de y, il suffit de diviser le premier membre de (3) par y; alors, dans l'équation résultante

$$f'(z)+\frac{1}{2}yf''(z)+\frac{1}{2.3}y^2f'''(z)+\ldots+y^{m-1}=0,$$

chacune des m valeurs de z fournit $m-1$ valeurs corres-

pondantes de y, qui expriment les $m-1$ différences entre cette valeur de z et les $m-1$ autres. De sorte que les m valeurs nulles de y, qui satisfaisaient au système

$$f(z)=0,\ yf'(z)+\frac{1}{2}y^2f''(z)+\frac{1}{2.3}y^3f'''(z)+\ldots+y^m=0,$$

ne se trouvent plus dans le nouveau système

$$(4)\ldots f(z)=0,\ f'(z)+\frac{y}{2}f''(z)+\frac{y^2}{2.3}f'''(z)+\ldots+y^{m-1}=0,$$

Les équations (4) déterminant pour y, les $m(m-1)$ différences entre chacune des m racines $a, b, \ldots, k$, et les $m-1$ autres, si l'on élimine z entre ces équations, l'*équation finale* en y (*page* 190) sera l'équation aux différences $(5)\ldots\varphi(y)=0$.

On parviendra au même résultat en éliminant x entre

$$(6)\ldots f(x)=0 \text{ et } f'(x)+\frac{y}{2}f''(x)+\frac{y^2}{2.3}f'''(x)+\ldots+y^{m-1}=0,$$

car le système (6) se déduit de (4) en changeant z en x dans (4).

Par conséquent : *Pour déterminer l'équation aux différences,* $(5)\ldots\varphi(y)=0$, *de l'équation donnée* $(1)\ldots f(x)=0$, *il suffit de calculer l'équation finale résultante de l'élimination de x entre les équations* (6).

1er Exemple. *Soit l'équation* $x^3-7x+7=0$.

Les équations (6) deviennent

$$x^3-7x+7=0,\quad 3x^2+3yx+y^2-7=0;$$

et l'élimination de x entre ces deux dernières équations, effectuée par la méthode du n° 153, conduit à l'*équation aux différences*

$$y^6-42y^4+441y^2-49=0.$$

2e Exemple. *Soit l'équation*, $x^3-2x-5=0$.

On trouve que l'*équation aux différences est*

$$y^6-12y^4+36y^2+643=0.$$

Remarque. Si l'on éliminait directement z, entre l'équa-

tion (2) et $f(z)=0$, l'*équation finale* $F(y)=0$, déterminerait non-seulement les $m(m-1)$ différences $a-b$, $a-c$, etc., entre chacune des m racines, a, b, c, ..., k, et les $m-1$ autres, mais en outre les m différences $a-a$, $b-b$, ..., $k-k$, entre chaque racine et elle-même; car, l'équation finale $F(y)=0$ doit fournir les m^2 valeurs de y, qui résultent de la relation $y=z'-z$, en donnant successivement à z et z' les m valeurs a, b, c, ..., k. L'équation $F(y)=0$, admettant m racines nulles, son 1er membre serait divisible par y^m (n° 127); et le quotient égalé à zéro donnerait l'équation demandée (5).... $\varphi(y)=0$, dont les racines sont les $m(m-1)$ différences entre chaque racine de l'équation (1) et les $m-1$ autres. On dit, par ce motif, que $\varphi(y)=0$ est l'*équation aux différences* des racines de l'équation (1).

159. Les équations (1) et (5) du n° 158, jouissent des propriétés suivantes :

1°. *L'équation* (1) *étant du* $m^{ième}$ *degré, l'équation* (5) *aux différences est du* $m(m-1)^{ième}$ *degré;* car chacune des m racines de l'équation (1) donnant $m-1$ différences entre cette racine et les $m-1$ autres, ces m racines déterminent $m(m-1)$ différences qui sont les racines de l'équation (5).

2°. *Quand les racines de l'équation* (1) *ne font que changer de signes, l'équation aux différences reste la même;* car les différences entre deux racines quelconques a, b, de l'équation (1) étant $a-b$ et $b-a$, les différences entre $-a$ et $-b$ sont les mêmes.

3°. *Lorsque toutes les racines d'une équation augmentent ou diminuent d'une même quantité, l'équation aux différences ne change pas.*

4°. *L'équation aux différences ne contient que des puissances paires de l'inconnue;* car toutes ses racines, $a-b$, $b-a$, etc., sont égales deux à deux et de signes contraires.

Posant donc $m(m-1)=2n$, l'équation aux différences sera de la forme

$$(7).\ldots\ldots (y^2)^n+P(y^2)^{n-1}+Q(y^2)^{n-2}+\ldots+Sy^2+T=0.$$

Si l'on fait $y^2 = t$, dans (7), la transformée

$$(8)\ldots t^n + Pt^{n-1} + Qt^{n-2} + \ldots + St + T = 0,$$

sera ce qu'on nomme l'*équation aux quarrés des différences*, parce que ses racines sont les quarrés des différences entre les racines de l'équation (1).

5°. *Lorsque l'équation* (8), *aux quarrés des différences, a des permanences, l'équation* (1) *a nécessairement des racines imaginaires.* En effet, si toutes les racines de l'équation (1) étaient réelles, l'équation (8) n'aurait que des racines réelles positives; les termes de l'équation (8) seraient donc alternativement positifs et négatifs (n° 125, 2°); l'équation (8) n'aurait donc aucune permanence; ce qui est contre l'hypothèse.

EXEMPLE. *Soit l'équation* (9)... $x^3 - 2x - 5 = 0$.

L'équation (8) devient $t^3 - 12t^2 + 36t + 643 = 0$.

Cette dernière équation ayant une *permanence*, l'équation (9) a nécessairement des racines imaginaires.

Les racines imaginaires d'une équation étant toujours en nombre pair (n° 139), l'équation (9) n'a qu'une seule racine réelle. Cette racine est positive (n° 138).

160. Le procédé du n° 153 fournit le moyen de *calculer une quantité* δ *moindre que la plus petite des différences réelles entre les racines d'une équation donnée* $f(x) = 0$, *dont toutes les racines sont inégales*; car il suffit de chercher l'équation aux différences, $\varphi(y) = 0$, des racines de $f(x) = 0$, et l'une quelconque des limites inférieures des racines positives de $\varphi(y) = 0$, exprime δ.

EXEMPLE. *Soit l'équation* $x^3 - 7x + 7 = 0$.

L'équation aux différences est $y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0$, et la limite inférieure des racines positives de cette dernière équation étant $\frac{1}{4}$ (n° 133), on a $\delta = \frac{1}{4}$.

1re REMARQUE. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que le procédé d'élimination indiqué (n° 153), conduisait à l'équation aux différences $\varphi(y) = 0$. Or, d'après ce qu'on a

vu (n° 153), cette élimination donne quelquefois une équation $\varphi(y)\times F(y)=0$, compliquée de valeurs *étrangères* de y; cependant, *on peut prendre pour* δ *l'une quelconque des limites inférieures des racines positives de l'équation* $\varphi(y)\times F(y)=0$; car cette limite est à plus forte raison moindre que la plus petite racine positive de l'équation $\varphi(y)=0$.

2e Remarque. Si l'équation $f(x)=0$ avait des racines égales, l'équation $\varphi(y)=0$ aux différences aurait des racines nulles, et il n'existerait pas de quantité moindre que la plus petite des différences réelles entre les racines de $f(x)=0$.

§ V. *Résolution d'une équation numérique à une seule inconnue.*

161. Nous avons vu comment on résout les équations du premier et du second degré à une seule inconnue, et nous avons obtenu des formules générales qui expriment les racines de ces équations en fonction des coefficiens. Il existe des formules analogues pour les équations littérales du troisième et du quatrième degré; mais, lorsqu'une équation est d'un degré plus élevé, on ne sait pas exprimer ses racines en fonction de ses coefficiens. Cependant, nous allons voir que *lorsque l'équation est numérique, on peut toujours, à l'aide de certains essais, déterminer les valeurs exactes ou approchées de toutes ses racines réelles, quel que soit d'ailleurs son degré.*

Recherche des racines réelles commensurables.

162. Pour *déterminer les racines réelles commensurables d'une équation numérique* $f(x)=0$, on fait d'abord disparaître tous les dénominateurs (n° 32), et afin de simplifier l'équation résultante, on divise tous les coefficiens par leur plus grand commun diviseur, ce qui conduit à une équation

$$(1)\ldots Ax^m+px^{m-1}+qx^{m-2}\ldots+rx+s=0,$$

dans laquelle tous les coefficiens sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, qui n'admettent aucun commun diviseur.

163. *Lorsque le coefficient* A *du premier terme est égal à l'unité, toutes les racines commensurables de l'équation* (1) *sont nécessairement des nombres entiers.* En effet; si une fraction irréductible $\frac{b}{a}$ pouvait être racine de l'équation

$$(2)\ldots x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + rx + s = 0,$$

en substituant cette valeur de x dans (2), on parviendrait à la relation

$$b^m = -a(pb^{m-1} + qab^{m-2} + \ldots + ra^{m-2}b + sa^{m-1}).$$

Or, a, b, et tous les coefficiens, $p, q, \ldots, r, s$, sont supposés des nombres entiers; l'expression de b^m serait donc divisible par a; ce qui est impossible, puisque a est premier avec b. L'équation (2) ne saurait donc admettre des racines fractionnaires; ce qui démontre la propriété énoncée.

Les racines réelles commensurables de l'équation (2) ne pouvant être que des nombres entiers, on obtiendrait ces racines en essayant successivement pour x les valeurs 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ..., comprises entre zéro et les limites supérieures des racines positives et négatives de l'équation (2). Mais nous allons faire voir qu'on peut abréger ces calculs.

Pour fixer les idées, nous supposerons d'abord l'équation proposée du troisième degré, et de la forme

$$(3)\ldots x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0,$$

p_1, p_2, p_3, désignant des nombres entiers. Si α est une racine commensurable de l'équation (3), α sera nécessairement un nombre entier, et l'on aura

$$\alpha^3 + p_1\alpha^2 + p_2\alpha + p_3 = 0\ ;\ \text{d'où}\ \frac{p_3}{\alpha} = -(p_2 + p_1\alpha + \alpha^2).$$

La première des conditions qui doivent être satisfaites est donc que le quotient de p_3 par α soit un nombre entier q_1; *toute racine commensurable doit donc être un des diviseurs du der-*

nier terme. On a

$$q_1 = -(p_2 + p_1\alpha + \alpha^2)\,;\ \text{d'où}\ \frac{q_1+p_2}{\alpha} = -(p_1+\alpha).$$

La seconde des conditions qui doivent être satisfaites est donc que le quotient de $q_1 + p_2$ par α soit un nombre entier q_2. On a

$$q_2 = -(p_1+\alpha);\ \text{d'où}\ q_2 + p_1 = -\alpha.$$

La troisième des conditions qui doivent être satisfaites est donc que $q_2 + p_1$ soit égal au diviseur α, affecté d'un signe contraire à celui qu'il avait.

Ainsi, *toute racine commensurable de l'équation* (3) *doit satisfaire à ces trois conditions.*

RÉCIPROQUEMENT, *Tout diviseur α du dernier terme, qui satisfait aux conditions précédentes, est une racine de l'équation* (3); car ces trois conditions donnent

$$\frac{p_3}{\alpha} = q_1,\quad \frac{q_1+p_2}{\alpha} = q_2,\quad q_2 + p_1 = -\alpha,$$

et en éliminant q_1 et q_2 entre ces trois dernières égalités, on parvient à la relation $\alpha^3 + p_1\alpha^2 + p_2\alpha + p_3 = 0$, qui exprime que α est une racine de l'équation (3).

164. Des raisonnemens et des calculs analogues aux précédens pouvant s'appliquer à une équation d'un degré quelconque,

$$(1)\ldots x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-2}x^2 + p_{m-1}x + p_m = 0,$$

dans laquelle le coefficient du premier terme étant égal à l'unité, tous les autres coefficiens sont des nombres entiers, on est conduit à cette règle générale : *Pour découvrir si un diviseur α du dernier terme p_m de l'équation* (1) *est racine de cette équation, divisez p_m par α; le quotient sera un nombre entier q_1; ajoutez à q_1 le coefficient p_{m-1} de la 1re puissance de x, et divisez la somme par α; le quotient devra être un nombre entier q_2; ajoutez à q_2 le coefficient p_{m-2} de x^2, et divisez la somme par α; le quotient devra être un nombre entier q_3. Continuant ces calculs, vous parviendrez à ajouter au $(m-1)^{ième}$ quotient q_{m-1}, le coefficient p_1 de x^{m-1}; la*

somme devra être égale au diviseur a que vous essay, expris avec un signe contraire. Tout diviseur du dernier terme qui satisfait à ces m conditions est racine de l'équation (1), *et tout diviseur qui ne satisfait pas à l'une de ces conditions doit être rejeté. Quand l'équation n'est pas complète, on rétablit les termes qui manquent en les affectant du coefficient zéro.*

REMARQUE. *On ne soumet pas à ces essais les diviseurs* $+1$, -1, *du dernier terme, parce qu'il est plus simple de faire successivement* $x=+1$ *et* $x=-1$, *dans l'équation proposée; et l'on n'essaie que les diviseurs du dernier terme compris entre zéro et les limites supérieures des racines.*

165. *Lorsque dans l'équation proposée*

(1)... $Ax^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+rx+s=0$, (n° 162),

dont tous les coefficiens sont des nombres entiers, le coefficient A *du premier terme n'est pas égal à l'unité, cette équation peut admettre des racines commensurables fractionnaires; on cherche à la transformer en une équation* $\varphi(y)=0$ *dont toutes les racines commensurables soient nécessairement des nombres entiers.* Or, cette condition aurait lieu, si les racines de l'équation $\varphi(y)=0$ étaient égales à celles de l'équation (1) multipliées par un nombre entier z divisible par tous les dénominateurs des racines fractionnaires de l'équation (1). On est donc conduit à faire $y=x\times z$ (n° 129), d'où $x=\frac{y}{z}$; et l'on disposera de l'indéterminée z de manière qu'en substituant la valeur $\frac{y}{z}$ de x, dans (1), les racines commensurables de la transformée soient nécessairement des nombres entiers. Cette transformée revient à

(2)... $y^m+\frac{pz}{A}y^{m-1}+\frac{qz^2}{A}y^{m-2}+\ldots+\frac{rz^{m-1}}{A}y+\frac{sz^m}{A}=0.$

Mais, d'après le principe du n° 163, pour que les racines commensurables de l'équation (2) soient nécessairement des nombres entiers, il suffit que tous les coefficiens $\frac{pz}{A}$, $\frac{qz^2}{A}$,...,

soient des nombres entiers ; ce qui aura lieu si l'on fait $x = A$; d'où $x = \frac{y}{A}$. Par conséquent, *pour transformer l'équation* (1) *en une autre dont toutes les racines commensurables soient nécessairement des nombres entiers, il suffit d'égaler l'inconnue* x *à une nouvelle inconnue* y *divisée par le coefficient* A *du premier terme* Ax^m *de l'équation* (1). *Dans l'équation résultante*

$$(3)\ldots y^m + py^{m-1} + qAy^{m-2} + \ldots + rA^{m-2}y + sA^{m-1} = 0,$$

le coefficient du premier terme est l'unité, et tous les coefficiens des autres termes sont des nombres entiers. *La règle du* n° 164 *servira à calculer les racines commensurables de l'équation* (3) ; *et en les divisant par* A, *les quotiens seront les racines commensurables entières et fractionnaires de l'équation* (1).

166. Ce qui précède conduit à cette règle générale : *Pour calculer les racines commensurables d'une équation* $f(y) = 0$, *faites disparaître les dénominateurs, et ramenez cette équation à la forme*

$$(1)\ldots\ Ay^m + By^{m-1} + \ldots + Sy + T = 0 ;$$

tous les coefficiens A, B, ..., S, T, *désignent des nombres entiers qui n'admettent aucun commun diviseur ; faites* $y = \frac{x}{A}$ *dans* (1), *et multipliez tous les termes du résultat par* A^{m-1} ; *vous obtiendrez une équation de la forme*

$$(2)\ldots\ x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m = 0,$$

dans laquelle le coefficient du premier terme sera l'unité, et les coefficiens des autres termes seront des nombres entiers (n° 165) ; *toutes les racines commensurables de l'équation* (2) *étant des nombres entiers* (n° 163), *il sera facile de les calculer* (n° 164), *et en les divisant par* A, *les quotiens seront les racines commensurables de l'équation* (1) *proposée.*

EXEMPLE. *Soit l'équation* $(3)\ldots\ 2y^3 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2y}$.

On fait d'abord disparaître les dénominateurs, ce qui donne

$$(4)\ldots\ 4y^3 - 7y + 3 = 0.$$

Pour ramener cette dernière à la forme (2), on y fait $y = \frac{x}{4}$, ce qui conduit à l'équation $(5)\ldots x^3 - 28x + 48 = 0$, dont les racines commensurables ne peuvent être que des diviseurs du dernier terme 48, (n° 163); et comme ces racines sont comprises entre $+7$ et -8, (n°s 132 et 134), il suffit d'essayer, par la méthode du n° 164, les diviseurs $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$. On trouve ainsi que les racines de l'équation (5) sont $+2$, $+4$, -6; et en les divisant par 4, les quotiens sont les racines de l'équation (3).

167. *Lorsqu'on a obtenu une racine commensurable de l'équation* $f(x) = 0$, *le principe du n° 155 conduit très simplement à la détermination du degré de multiplicité de cette racine.* En effet, d'après ce principe, si l'équation $f(x) = 0$, a trois racines égales à α, on aura

$$f(x) = (x-\alpha)^3 \times \mathrm{M},\ f'(x) = (x-\alpha)^2 \times \mathrm{N},$$
$$f''(x) = (x-\alpha) \times \mathrm{P},\ f'''(x) = \mathrm{Q},$$

et aucun des polynomes, M, N, P, Q, ne sera divisible par $x-\alpha$; l'hypothèse $x = \alpha$ ne les réduira donc pas à zéro; d'ailleurs ces polynomes ne sauraient devenir infinis, pour la valeur finie $x = \alpha$, car ils ne contiennent que des puissances positives de x. Faisant donc $x = \alpha$, dans les fonctions, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, elles se réduiront à zéro, et la 3e dérivée $f'''(x)$ ne deviendra pas nulle.

En général : *Pour trouver combien de fois le facteur* $x-\alpha$ *entre dans* $f(x)$, *il suffit de faire* $x = \alpha$ *dans les dérivées successives de* $f(x)$; *le rang de la première dérivée qui n'est pas réduite à zéro, indique combien de fois le facteur* $x-\alpha$ *entre dans* $f(x)$.

168. *Lorsqu'on a calculé toutes les racines commensurables,* $a, b, c, \ldots, k$, *d'une équation* $f(x) = 0$, *il est facile de former l'équation* $\varphi(x) = 0$, *qui ne renferme plus que les*

racines incommensurables et imaginaires de $f(x)=0$; à cet effet, on détermine les degrés de multiplicité, α, β, γ, ..., ω, des racines commensurables, a, b, c, ..., k, (n° 167), on divise $f(x)$ par le produit des facteurs $(x-a)^{\alpha}$, $(x-b)^{\beta}$, $(x-c)^{\gamma}$, ..., $(x-k)^{\omega}$; ce qui donne un quotient exact $\varphi(x)$. L'équation demandée est $\varphi(x)=0$.

Recherche des Racines réelles incommensurables.

169. *Lorsque deux nombres* α, β, *substitués successivement pour* x, *dans le premier membre de l'équation numérique* $f(x)=0$, *donnent des résultats* $f(\alpha)$, $f(\beta)$, *de signes contraires, il tombe nécessairement un nombre impair de racines réelles de l'équation* (1) *entre* α *et* β, (n° 136, 3°). Nous allons faire voir qu'*on peut toujours approcher autant qu'on veut de l'une de ces racines.*

Si l'on veut calculer la valeur approchée d'une racine R, comprise entre α et β, de manière que l'erreur soit moindre que la quantité donnée γ, on substituera successivement pour x, dans $f(x)$, les valeurs α, $\alpha+\gamma$, $\alpha+2\gamma$, $\alpha+3\gamma$, ..., (on suppose $\alpha<\beta$), jusqu'à ce qu'on trouve un changement de signe dans les résultats de ces substitutions ; supposons que $\alpha+2\gamma$ et $\alpha+3\gamma$ donnent deux résultats de signes contraires, il résulte du principe du n° 51 (8°) qu'on obtiendra l'approximation demandée en prenant pour R l'un quelconque des nombres $\alpha+2\gamma$, $\alpha+3\gamma$.

On parviendra également à l'approximation demandée, en mettant successivement pour x, dans $f(x)$, une moyenne arithmétique entre les deux nombres qui ont fourni deux résultats de signes contraires. Ainsi, on fera $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ dans $f(x)$; le résultat sera nécessairement de signe contraire à $f(\alpha)$ ou à $f(\beta)$, puisque $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de signes contraires. Supposons que $x=\alpha$ et $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\beta'$, donnent deux résultats de signes contraires ; la racine R sera comprise entre α et β'. Pour obtenir une plus grande approximation, on fera $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta')$ dans $f(x)$; le résultat sera nécessairement de signe contraire à

$f(\alpha)$, ou à $f(\zeta')$; s'il est de signe contraire à $f(\zeta')$, la racine R sera comprise entre ζ' et $\frac{1}{2}(\alpha+\zeta')$; de sorte que chacun des nombres ζ', $\frac{1}{2}(\alpha+\zeta')$, différera de R d'une quantité moindre que la différence entre ζ' et $\frac{1}{2}(\alpha+\zeta')$. On continuera ces calculs, jusqu'à ce qu'on parvienne à substituer deux nombres p, q, qui fournissent deux résultats $f(p), f(q)$, de signes contraires, et qui soient tels que la différence entre p et q ne soit pas plus grande que γ; chacun des nombres p, q, jouira de la propriété demandée; c'est-à-dire qu'en prenant arbitrairement $R=p$ ou $R=q$, l'erreur sera moindre que γ.

Remarque. Ces deux méthodes ne donnent souvent que l'une des racines comprises entre α et ζ; car, d'après le principe du n° 136, deux substitutions consécutives qui fournissent deux résultats de même signe, peuvent comprendre un nombre pair de racines, et deux substitutions qui donnent deux résultats de signes contraires peuvent en comprendre un nombre impair.

170. *Lorsqu'on a trouvé la plus petite valeur entière approchée α d'une racine incommensurable positive de l'équation* (1)... $f(x)=0$, *et lorsqu'on sait en outre qu'il ne tombe que cette racine entre α et $\alpha+1$, les propriétés des fractions continues fournissent le moyen de calculer cette racine avec une approximation donnée.* On fait (2)... $x=\alpha+\frac{1}{z}$ dans (1); ce qui conduit à une *transformée* (3)... $F(z)=0$, qui a nécessairement une seule racine positive plus grande que l'unité; car, dans l'équation (1), l'inconnue x n'ayant qu'une valeur comprise entre α et $\alpha+1$, la relation (2) fait voir que z n'a qu'une valeur plus grande que l'unité. Deux nombres entiers consécutifs ne pouvant jamais comprendre que cette valeur réelle de z, il suit du principe du n° 137, qu'en donnant successivement à z, dans $F(z)$, les valeurs 1, 2, 3,..., on trouvera deux nombres entiers, ζ, $\zeta+1$, qui substitués dans $F(z)$ donneront deux résultats $F(\zeta)$, $F(\zeta+1)$, de signes contraires, et ζ sera la plus petite valeur entière approchée de z. On fera $z=\zeta+\frac{1}{z_1}$ dans (3); cela donnera une transformée en z_1 qui

n'aura qu'une racine réelle plus grande que l'unité; on calculera de même la plus petite valeur entière approchée γ de z_1; et ainsi de suite. *La racine incommensurable comprise entre* α *et* $\alpha+1$, *sera exprimée par une fraction continue indéfinie*; et par conséquent, *on pourra en déduire la valeur de cette racine avec une approximation donnée*, (n° 100).

Ce procédé, dû à LAGRANGE, est connu sous le nom de *méthode des substitutions successives.*

171. Lorsqu'en donnant successivement différentes valeurs à x, dans $f(x)$, les résultats présenteront autant de changemens de signes qu'il y a de racines réelles dans l'équation (1).... $f(x)=0$, les méthodes précédentes pourront servir à calculer toutes ces racines avec une approximation donnée.

On est donc conduit à *chercher quels sont les nombres qu'il faut mettre à la place de* x *dans* $f(x)$, *pour que les résultats de ces substitutions présentent nécessairement autant de changemens de signes qu'il y a de racines réelles dans l'équation* (1). Or, il résulte du principe du n° 137, qu'on satisfera à la condition demandée, si les nombres que l'on substitue diffèrent entre eux d'une quantité assez petite pour que deux substitutions consécutives ne puissent jamais comprendre plus d'une racine de l'équation (1); car d'après ce principe, selon que les résultats de deux substitutions consécutives seront de même signe ou de signes contraires, les deux nombres substitués ne comprendront pas de racine de l'équation (1), ou ces deux nombres en comprendront une seule. D'ailleurs, quand l'équation (1) n'a pas de racines égales, pour que deux nombres ne puissent pas comprendre plus d'une racine, il suffit que ces deux nombres diffèrent entre eux d'une quantité δ moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de l'équation (1). Par conséquent, *si l'équation* (1)... $f(x)=0$, *n'ayant pas de racines égales, on substituait successivement pour* x, *dans* $f(x)$, *les valeurs* $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots, 0, -\delta, -2\delta, -3\delta, \ldots$, *comprises entre les limites supérieures des racines réelles de* $f(x)=0$, *les résultats présenteraient nécessairement autant de change-*

mens de signes qu'il y aurait de racines réelles dans $f(x)=0$.

Mais, comme le procédé qui a été donné (n° 160), pour calculer une quantité δ moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de l'équation $f(x)=0$, fournit toujours une valeur $\frac{1}{\zeta}$ de δ moindre que l'unité, dans laquelle ζ représente un nombre entier positif, *on évite la substitution de nombres fractionnaires, en transformant d'abord l'équation proposée, en une autre, dans laquelle les différences entre les racines réelles soient plus grandes que l'unité.* Pour exécuter cette transformation, on observe que, si les différences positives entre les racines réelles, a, b, c, *etc.*, de l'équation (1) sont $a-b$, $a-c$, $b-c$, etc., on aura nécessairement

$$a-b > \frac{1}{\zeta},\quad a-c > \frac{1}{\zeta},\quad b-c > \frac{1}{\zeta},\ \text{etc.};\qquad \text{d'où}$$
$$a\zeta-b\zeta > 1,\quad a\zeta-c\zeta > 1,\quad b\zeta-c\zeta > 1,\ \text{etc.}$$

Par conséquent, si l'on forme l'équation (2)... $\varphi(y)=0$, dont les racines sont $a\zeta$, $b\zeta$, $c\zeta$, etc., les différences entre ces racines seront plus grandes que l'unité.

Pour trouver l'équation (2), dont les racines sont égales à celles de l'équation (1) multipliées par ζ, on fait $y=x\times\zeta$, (n° 129); d'où $x=\frac{y}{\zeta}$; la substitution de la valeur $\frac{y}{\zeta}$ de x, dans (1), fournit l'équation (2) demandée; cette dernière a autant de racines réelles que la proposée, car les valeurs de y, déduites de (2), divisées par ζ, fournissent les racines de l'équation (1); et si, comme on le suppose, l'équation (1) n'a pas de racines égales, il en sera de même des racines de l'équation (2).

Les différences entre les racines réelles de l'équation (2) étant plus grandes que l'unité, deux nombres entiers consécutifs ne pourront jamais comprendre plus d'une racine de l'équation (2). Par conséquent, *si l'on donne successivement à* y, *les valeurs*, $0, 1, 2, 3, \ldots$, *depuis zéro jusqu'à la limite su-*

périeure des racines positives de l'équation (2), *les valeurs correspondantes de* $\varphi(y)$ *présenteront autant de changemens de signes que l'équation* (2) *renferme de racines réelles positives, et l'on connaîtra les plus petites valeurs entières approchées de ces racines; le procédé du n° 170 fournira des valeurs aussi approchées que l'on voudra de ces racines positives.*

On obtiendrait de même les plus petites valeurs entières approchées, $-a'$, $-b'$, $-c'$, . . , des racines négatives de l'équation (2), en donnant successivement à y, dans $\varphi(y)$, les valeurs $0, -1, -2, -3, \ldots$, depuis zéro jusqu'à la limite supérieure $-L'$ des racines négatives de l'équation (2). Mais, *on évite de substituer des nombres négatifs* en observant que les racines négatives de l'équation (2) étant les racines positives de l'équation (3)... $\varphi(-y) = 0$, que l'on obtient par le changement de y en $-y$ dans l'équation (2), il suffit de calculer les racines positives de l'équation (3). Or, les différences entre les racines de l'équation (3) sont les mêmes que les différences entre les racines de l'équation (2), (n° 159); les différences entre les racines de l'équation (3) sont donc plus grandes que l'unité. Par conséquent, *si l'on substitue pour* y, *les nombres* $0, 1, 2, 3, \ldots$, *jusqu'à la limite supérieure* L' *des racines positives de l'équation* (3), *les valeurs correspondantes de* $\varphi(-y)$ *présenteront autant de changemens de signes qu'il y a de racines positives dans* (3); *et l'on connaîtra les plus petites valeurs entières approchées,* $a', b', c', \ldots$, *de toutes ces racines; on en déduira des valeurs aussi approchées qu'on voudra des racines positives de l'équation* (3), (n° 170); *ces racines, affectées du signe* —, *seront les racines négatives* $-a', -b', -c', \ldots$, *de l'équation* (2).

172. D'après ce qui précède, pour *calculer avec certitude des valeurs, aussi approchées qu'on voudra, de toutes les racines réelles incommensurables d'une équation numérique* (1)... $f(x) = 0$, *qui n'a que des racines inégales,* on détermine d'abord une quantité $\frac{1}{\zeta}$ moindre que la plus petite des diffé-

rences entre les racines réelles de cette équation (n° 160). On pose $y = \epsilon x$, d'où $x = \frac{y}{\epsilon}$; la substitution de cette valeur de x dans (1) donne une transformée (2)... $\varphi(y) = 0$ dont toutes les racines réelles diffèrent entre elles de quantités plus grandes que l'unité. On détermine les plus petites valeurs entières approchées des racines positives de l'équation (2), en mettant successivement pour y, dans $\varphi(y)$, les valeurs, $0, 1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à la limite supérieure des racines positives de l'équation (2); les résultats de ces substitutions présenteront autant de changemens de signes, qu'il y a de racines positives dans (2), et l'on connaîtra les plus petites valeurs entières approchées de toutes ces racines. Pour trouver les plus petites valeurs entières approchées des racines négatives de l'équation (2), on change y en $-y$ dans (2); les différences entre les racines de la transformée (3)... $\varphi(-y) = 0$, sont les mêmes que celles de l'équation (2), (n° 159). On substitue successivement pour y, dans $\varphi(-y)$, les nombres entiers, $0, 1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à la limite supérieure des racines positives de l'équation (3); les résultats de ces substitutions présenteront autant de changemens de signes qu'il y a de racines positives dans (3), et l'on connaîtra les plus petites valeurs entières approchées de toutes ces racines. On calculera ensuite, par la méthode du n° 170, des valeurs aussi approchées qu'on voudra de chacune des racines positives des équations (2) et (3); les racines positives de l'équation (3) seront les racines négatives de l'équation (2); et en divisant par ϵ toutes ces racines incommensurables de l'équation (2), les quotiens seront les racines demandées de l'équation (1).

EXEMPLE. *Soit l'équation* (4)... $x^3 - 7x + 7 = 0$.

Il est facile de s'assurer qu'elle n'admet aucune racine commensurable (n° 164). Pour calculer ses racines incommensurables, on cherche d'abord une quantité δ moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de l'équation (4); on trouve $\delta = \frac{1}{4}$ (n° 160); on fait donc $y = 4x$,

d'où $x = \frac{y}{4}$. La substitution de cette valeur de x, dans (4), conduit à une transformée (5)... $y^3 - 112y + 448 = 0$, dans laquelle toutes les différences entre ses racines réelles sont plus grandes que l'unité.

Pour obtenir les plus petites valeurs entières approchées des racines positives de l'équation (5), on donne successivement à y, dans $y^3 - 112y + 448$, les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...; les résultats de ces substitutions présentent deux changemens de signes; on trouve que l'équation (5) a une racine comprise entre 5 et 6, et une autre entre 6 et 7. L'équation (5) ne pouvant pas admettre plus de deux racines positives (n° 140), il est inutile d'essayer des nombres plus grands que 7.

Pour *calculer la racine* R, *comprise entre* 5 *et* 6, on fait $y = 5 + \frac{1}{z}$ dans (5), ce qui conduit à

$$(6)\ldots\quad 13z^3 - 37z^2 + 15z + 1 = 0.$$

Cette équation ne pouvant admettre qu'une seule valeur de z plus grande que l'unité, on obtiendra la plus petite valeur entière approchée de z en donnant à z, dans le 1er membre de (6), les valeurs 1, 2, 3, ..., jusqu'à ce qu'on trouve deux résultats de signes contraires; on verra que z est compris entre 2 et 3. On fera donc $z = 2 + \frac{1}{z_1}$ dans (6), ce qui conduira à la transformée

$$(7)\ldots\quad 13z_1^3 - 23z_1^2 - 41z_1 - 13 = 0.$$

On reconnaîtra de même que z_1 tombe entre 2 et 3.

En continuant ces calculs, on trouvera

$$z_1 = 2 + \frac{1}{z_2},\ z_2 = 1 + \frac{1}{z_3},\ z_3 = 19 + \frac{1}{z_4},\ \text{etc.};$$

On en déduira la *valeur de* R *en fraction continue* (n° 101); et les *réduites* successives seront,

$\frac{5}{1}, \frac{11}{2}, \frac{27}{5}, \frac{38}{7}, \frac{749}{138}$, etc., (n°94).

Si l'on veut *calculer la valeur de la racine* R *à moins de* $\frac{1}{10000}$ *d'unité*, on formera les réduites successives jusqu'à ce qu'on parvienne à une réduite dont le dénominateur surpasse $\sqrt{10000}$ ou 100, (n° 100). On voit que cette réduite est $\frac{749}{138}$; elle est plus petite que R, (n° 96), mais l'erreur est moindre que $\frac{1}{138^2}$ ou que $0,00005$ etc. Le quotient de 749 par 138 étant $5,4275$ etc., la racine R est comprise entre $5,4275$ et $5,4276$.

On trouvera, d'une manière semblable, que la valeur de y, comprise entre 6 et 7, est $y = 6,768$ *etc.* On en déduira que la troisième racine est $y = -12,195$ *etc.*, (n° 125, 4°); et en divisant ces valeurs de y par 4, on trouve que les racines de l'équation (4) sont $1,356$ etc., $1,692$ etc., $-3,048$ etc.

Ce qui précède donnant le moyen de calculer des valeurs aussi approchées que l'on veut, des racines réelles incommensurables, d'une équation qui n'a que des racines inégales, nous allons faire voir comment on peut découvrir si une équation a des racines égales, et comment on fait dépendre la recherche de ces racines de la résolution d'équations qui ne renferment que des racines inégales.

Des Racines égales.

173. Le plus grand commun diviseur entre un polynome $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$, étant le produit des facteurs de $f(x)$ élevés à une puissance moindre d'une unité (n° 155), on en déduit que *pour découvrir si l'équation* (1).... $f(x) = 0$ *a des racines égales, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre* $f(x)$ *et* $f'(x)$; *quand* $f(x)$ *et* $f'(x)$ *ont un commun diviseur* $\phi(x)$, *l'équation* (1) *a des racines égales; quand il n'existe pas de commun diviseur, fonction de* x,

entre $f(x)$ *et* $f'(x)$, *l'équation* (1) *n'a pas de racines égales.*

En effet, soit $f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\zeta}(x-c)^{\gamma}\ldots.$

Le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ est

$$D = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\zeta-1}(x-c)^{\gamma-1}\ldots, (\text{n}^{\circ}155).$$

Lorsque ce commun diviseur contient x, il y a au moins un des exposans, $\alpha-1, \zeta-1, \gamma-1, \ldots$, qui n'est pas nul; l'un des nombres entiers, $\alpha, \zeta, \gamma\ldots$, est donc plus grand que l'unité; $f(x)$ contient donc des facteurs égaux; et par suite, l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales.

Lorsque $f(x)$ et $f'(x)$ n'ont pas de commun diviseur fonction de x, tous les exposans, $\alpha-1, \zeta-1, \gamma-1, \ldots$, sont nécessairement nuls; tous les exposans $\alpha, \zeta, \gamma, \ldots$, des facteurs de $f(x)$, sont donc égaux à l'unité; tous les facteurs de $f(x)$ sont donc inégaux; l'équation $f(x) = 0$, n'a donc pas de racines égales.

174. Nous allons faire voir, que *lorsque l'équation* $f(x)=0$ *a des racines égales, le principe du* n° 155 *fournit le moyen de faire dépendre la recherche des racines de cette équation de la résolution de plusieurs équations d'un degré moindre qui n'ont que des racines inégales et dont les racines sont celles de la proposée.*

En effet, si l'on désigne par X_1 le produit des facteurs $x-a_1, x-b_1, \ldots, x-k_1$, qui n'entrent qu'une fois dans $f(x)$; par X_2 le produit des facteurs $x-a_2, x-b_2, \ldots, x-k_2$, qui entrent deux fois dans $f(x)$; par X_3 le produit des facteurs $x-a_3, x-b_3, \ldots, x-k_3$, qui entrent trois fois dans $f(x)$; et ainsi de suite; on aura

$$X_1=(x-a_1)(x-b_1)\ldots(x-k_1), X_2=(x-a_2)(x-b_2)\ldots(x-k_2),$$
$$X_3=(x-a_3)(x-b_3)\ldots(x-k_3), X_4=(x-a_4)(x-b_4)\ldots(x-k_4), \ldots$$

$$f'(x) = X_1 \times X_2^2 \times X_3^3 \times X_4^4 \times X_5^5 \ldots.$$

Pour *calculer les fonctions inconnues*, $X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots$, on cherche le plus grand commun diviseur $\varphi(x)$ entre $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$; il résulte du principe du n° 155 que

$$\varphi(x) = X_2 X_3^2 X_4^3 X_5^4 \text{ etc.}$$

Opérant sur $\varphi(x)$ de la même manière que sur $f(x)$, on cherche le plus grand commun diviseur $\varphi_1(x)$ entre $\varphi(x)$ et sa dérivée. Il résulte du principe du n° 155, que,

$$\varphi_1(x) = X_3 X_4^2 X_5^3 \ldots$$

On cherche de même le plus grand commun diviseur $\varphi_2(x)$ entre $\varphi_1(x)$ et sa dérivée. On a, $\varphi_2(x) = X_4 X_5^2 \ldots$.

En continuant ces calculs, on parviendra toujours à une fonction $F(x)$, qui ne contiendra plus de facteurs égaux; et l'on en sera averti, car il n'existera pas de commun diviseur en x, entre $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$, (n° 173).

Si $F(x) = \phi_2(x)$, on sera certain que $f(x)$ ne renferme pas de facteurs élevés à des puissances supérieures à la quatrième; car $\phi_2(x)$ sera égal à X_4. On aura donc,

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4, \quad \varphi(x) = X_2 X_3^2 X_4^3,$$
$$\varphi_1(x) = X_3 X_4^2, \quad \varphi_2(x) = X_4.$$

Ainsi, X_4 sera égal à la fonction connue $\phi_2(x)$.

Pour trouver X_1, X_2 et X_3, on divise successivement chacune des fonctions connues $f(x)$, $\varphi(x)$, $\phi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, par la suivante, ce qui fournit des quotiens

$$Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4, \quad Q_2 = X_2 X_3 X_4, \quad Q_3 = X_3 X_4 = X_3 \varphi_2(x).$$

On divise chacune des fonctions $Q_1, Q_2, Q_3, \varphi_2(x)$, par la suivante; les quotiens sont les fonctions demandées X_1, X_2, X_3.

Chacune des équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, etc., n'a que des racines inégales; et l'*on connaît le degré de multiplicité de ces racines dans l'équation proposée* $f(x) = 0$, car d'après la notation adoptée, les racines de $X_1 = 0$ entrent une seule fois dans l'équation (1), celles de $X_2 = 0$ entrent deux fois dans (1), celles de $X_3 = 0$ entrent trois fois dans (1); et ainsi de suite.

Exemple. *Soit*,

$$f(x) = x^8 - 13x^6 + 14x^5 + 35x^4 - 84x^3 + 98x^2 - 98x + 49.$$

On trouve, $\varphi(x) = x^3 - 7x + 7$.

Les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, n'ayant pas de commun diviseur,

on a, $f(x)=X_1X_2^2$, $\varphi(x)=X_2=x^3-7x+7$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=X_1X_2=x^5-6x^3+7x^2-7x+7=Q_1.$$

La division de Q_1 par $\varphi(x)$ donne le quotient $X_1=x^2+1$.

L'équation $X_1=0$ détermine les racines inégales $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, de $f(x)=0$.

L'équation $X_2=0$, fournit les racines qui entrent deux fois dans $f(x)=0$; on a vu (page 184) que ces racines sont

$$1,356 \text{ etc.}, \quad 1,692 \text{ etc.}, \quad -3,048 \text{ etc.}$$

On a, $f(x)=X_1X_2^2=(x^2+1)\ (x^3-7x+7)^2$.

175. Les théories précédentes conduisent à cette règle générale : *Pour trouver les racines réelles d'une équation numérique à une seule inconnue, ramenez d'abord cette équation à la forme* (1)... $x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots+p_{m-1}x+p_m=0$, *de manière que tous les coefficiens soient des nombres entiers* (n° 165). *Les racines commensurables de l'équation* (1) *seront des nombres entiers; a, b, c, ..., k,* (n° 163); *calculez ces racines par la méthode du* n° 164, *et déterminez ensuite les exposans, α, ζ, γ, ..., ω, des facteurs correspondans, x−a, x−b, x−c, ..., x−k,* (n° 167); *divisez le premier membre de l'équation* (1) *par le produit des facteurs* $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\zeta$, $(x-c)^\gamma$, ..., $(x-k)^\omega$; *le quotient, égalé à zéro, donnera une équation*

$$(2)\ldots\ x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\ldots+Mx+N=0,$$

qui n'aura plus de racines commensurables. Pour obtenir les racines de l'équation (2), *décomposez-la en d'autres équations,*

$$(3)\ldots\ X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0,\ \text{etc.},$$

qui ne renferment que des racines inégales (n° 174); *ces racines seront celles de l'équation* (2); *vous connaîtrez leur degré de multiplicité, car* $X_1=0$ *donne toutes les racines qui entrent une seule fois dans* (2); $X_2=0$ *détermine toutes les racines qui entrent deux fois dans* (2); *et ainsi de suite. La question sera*

ainsi réduite à résoudre les équations (3), *qui n'ont que des racines inégales. Le procédé du* n° 160, *servira à calculer une quantité* δ *moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles de chacune des équations* (3), *et la méthode du* n° 172 *conduira à des valeurs aussi approchées qu'on voudra des racines réelles des équations* (3); *ces racines seront les racines réelles incommensurables de l'équation* (1). *Le premier membre de l'équation* (1) *sera le produit des facteurs*, $(x-a)^{\alpha}$ $(x-b)^{\beta}$, $(x-c)^{\gamma}$, ..., $(x-k)^{\omega}$, X_1, X_2^2, X_3^3, X_4^4, etc.

EXEMPLE. *Soit l'équation*,

$$(4)\ldots y^3+\frac{7}{32y^2}+\frac{21}{8}-y^2-\frac{3}{2}y-\frac{21}{16y}=0.$$

On chasse d'abord les dénominateurs, ce qui donne

$$(5)\ldots 32y^5-32y^4-48y^3+84y^2-42y+7+0.$$

On pourrait ramener cette dernière équation à la forme (1), en y faisant $y=\frac{x}{32}$ (n° 165); mais il est plus simple d'observer que, l'équation (5) revenant à

$$(2y)^5-2(2y)^4-6(2y)^3+21(2y)^2-21(2y)+7=0,$$

il suffit d'y faire $2y=x$, car elle devient

$$(6)\ldots x^5-2x^4-6x^3+21x^2-21x+7=0=f(x).$$

La seule racine commensurable de l'équation (6) est $+1$.

Pour déterminer le degré de multiplicité de cette racine, on fait $x=1$ dans les dérivées de $f(x)$; ce qui donne $f'(x)=0$, $f''(x)=2$; le facteur $x-1$ entre donc deux fois dans $f(x)$. Divisant $f(x)$ par $(x-1)^2$, le quotient égalé à zéro conduit à l'équation (7).... $x^3-7x+7=0$, qui n'a plus de racines commensurables; et comme le polynome x^3-7x+7, n'a pas de commun diviseur avec sa dérivée, toutes les racines de l'équation (7) sont inégales; on a vu (page 184) que ces racines sont 1,356 etc., 1,692 etc., -3,048 etc.

Or, $y=\frac{1}{2}x$. Par conséquent, l'équation (4) a deux racines

égales à $+\frac{1}{2}$, et trois racines incommensurables inégales

$$+0{,}678 \text{ etc.}, \quad +0{,}846 \text{ etc.}, \quad -1{,}524 \text{ etc.}$$

176. Problème. *Déterminer les valeurs de x qui satisfont au système de plusieurs équations à une seule inconnue,*

$$f(x)=0, \quad f_1(x)=0, \quad f_2(x)=0, \text{ etc.}$$

Soient, $\alpha, \beta, \ldots, \omega$, les valeurs de x qui satisfont au système des équations proposées; ces valeurs réduisant à zéro les fonctions $f(x), f_1(x), f_2(x)$, *etc.*, ces fonctions sont divisibles respectivement par les facteurs $x-\alpha, x-\beta, \ldots, x-\omega$; elles sont donc divisibles par le produit de ces facteurs (n° 126). Par conséquent, *pour obtenir les valeurs de x qui satisfont à la fois aux équations données, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre les premiers membres de ces équations. Lorsqu'on trouve un commun diviseur $\varphi(x)$, l'équation $\varphi(x)=0$ fournit les valeurs de x demandées. Lorsqu'il n'y a pas de commun diviseur en x, une même valeur de x ne peut satisfaire à la fois aux équations proposées; de sorte que ces équations sont incompatibles.*

Exemple. *Soient les équations*, $x^3-2x^2-x+2=0$,

$$x^3-28x+48=0, \quad x^4+x^3-7x^2-x+6=0.$$

Le plus grand commun diviseur entre leurs premiers membres étant $x-2$, l'équation $x-2=0$ fournit la valeur $x=2$, qui satisfait au système des équations proposées.

§ VI. *Résolution de deux équations numériques à deux inconnues. Théorie de l'Élimination. Des équations irrationnelles.*

177. Lorsqu'on a des équations contenant plusieurs inconnues, *résoudre* ces équations, c'est chercher les divers systèmes de valeurs des inconnues qui rendent toutes ces équations identiques; chacun de ces sytèmes fournit une *solution* des équations proposées; et selon que des valeurs substituées pour les

inconnues, satisfont ou ne satisfont pas à toutes les équations proposées, on dit que ces valeurs sont *bonnes* ou qu'elles sont *étrangères*. Nous dirons qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues *convient* à un système d'équations, ou qu'elle est propre à *satisfaire* à ce système, lorsqu'en la combinant avec certaines valeurs des autres inconnues, elle fournit une solution du système donné. Lorsque après avoir *éliminé* une inconnue x entre deux équations (1)..$A=0, B=0$, contenant les deux inconnues x, y, on obtient une équation $\varphi(y)=0$, qui fournit toutes les valeurs de y propres à satisfaire au système (1), et qui ne détermine aucune valeur de y *étrangère* à ce système, on dit que $\varphi(y)=0$ est l'*équation* FINALE en y résultante de l'*élimination* de x entre les équations (1). Nous supposerons que les équations proposées sont *numériques* et qu'elles ne renferment que des quantités *entières*; *nous n'admettrons que les valeurs finies des inconnues*.

178. Quand *l'une des deux équations proposées ne renferme qu'une des inconnues*, x, y, *on obtient toutes les solutions de ces équations en résolvant des équations à une seule inconnue*.

En effet, soit le système (2).... $F(y)=0, f(x,y)=0$.

Chaque valeur $\mathcal{C}$ de y, tirée de $F(y)=0$, et substituée dans $f(x,y)=0$, donne l'équation à une seule inconnue $f(x,\mathcal{C})=0$, qui détermine les valeurs de x correspondantes à $y=\mathcal{C}$.

Si l'équation $f(x,\mathcal{C})=0$ contient x, on en déduira des valeurs de x, qui conjointement avec $y=\mathcal{C}$, fourniront des solutions du système (2).

Si $f(x,\mathcal{C})$ se réduit à un nombre, la valeur $y=\mathcal{C}$ ne conviendra pas au système (2).

Enfin, si $f(x,\mathcal{C})$ est identiquement nulle, la valeur $y=\mathcal{C}$ satisfera aux équations (2) quel que soit x; ce qui fournira une infinité de solutions du système (2), correspondantes à $y=\mathcal{C}$.

Dans ce dernier cas, $y=\mathcal{C}$ réduisant $f(x,y)$ à zéro, $f(x,y)$ sera divisible par $y-\mathcal{C}$ (n° 122); de sorte qu'en ordonnant $f(x,y)$ par rapport à x, les coefficiens des diverses puissances de x seront divisibles par $y-\mathcal{C}$, (n° 150, 4°); il existera donc

nécessairement un commun diviseur fonction de y, entre ces coefficiens et $F(y)$.

D'après cette discussion, pour *découvrir si le système* (2) *admet une infinité de solutions*, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur D entre $F(y)$ et les coefficiens de x dans $f(x,y)$.

Lorsque D contient y, l'équation $D=0$ détermine des valeurs de y qui satisfont au système (2) quel que soit x; de sorte que ce système admet une infinité de solutions. Si l'on veut obtenir ses autres solutions, on divisera $F(y)$ et $f(x,y)$ par D, ce qui donnera des quotiens exacts $F_1(y)$, $f_1(x,y)$; les équations $F_1(y)=0$, $f_1(x,y)=0$, détermineront les solutions demandées.

Quand D est un nombre ou est égal à l'unité, le système (2) ne peut admettre qu'un nombre déterminé de solutions.

1er Exemple. *Soit le système*

$$y^2-5y+6=0,\quad x^2-(2y+1)x+(y^2+y-2)=0.$$

La 1re équation donne $y=2$ et $y=3$; en substituant successivement ces valeurs de y dans la 2e équation, on trouve que les équations proposées admettent les quatre solutions,

$$y=2,\ x=1 \parallel y=2,\ x=4 \parallel y=3,\ x=2 \parallel y=3,\ x=5.$$

2e Exemple. $y^2-5y+6=0$, $(y^2-2y)x+3=0$.

La 1re équation donne $y=2$, $y=3$.

La valeur $y=2$ ne convient pas au système proposé; car elle réduit la 2e équation à $3=0$.

La valeur $y=3$, substituée dans la 2e équation, donne $x=-1$. Le système proposé n'admet donc que la seule solution $y=3$, $x=-1$.

3e Exemple. *Soient les équations*

$$y^2-3y+2=0,\quad (y^2+y-2)x+3y^2+y-4=0.$$

La 1re donne $y=2$, $y=1$.

La valeur $y=2$, substituée dans la 2e équation, donne

$x=-\frac{5}{2}$; ce qui fournit une solution des équations proposées.

La valeur $y=1$, réduisant la 2e équation à l'identité $0=0$, des valeurs arbitraires de x, combinées avec $y=1$, satisfont au système proposé; il admet donc une infinité de solutions correspondantes à $y=1$.

4e Exemple. *Soit le système*,

$$y^3-3y+2=0,\quad (y^3-3y^2+2y)x-y^3+3y+2=0.$$

Il n'admet aucune solution; car chaque valeur de y, tirée de la 1re équation, réduit la 2e équation à $4=0$.

179. *Lorsque les deux inconnues, x, y, entrant à la fois dans chaque équation, une de ces équations est du premier ou du second degré par rapport à l'une des inconnues, on peut ramener ce cas au précédent.* En effet :

1°. *Soient les équations*, $px-q=0$, $f(x,y)=0$, dans lesquelles p et q sont des fonctions *entières* de y. On substitue, dans la 2e équation, l'expression de x tirée de $px-q=0$; la transformée ne contenant que l'inconnue y, détermine les valeurs de cette inconnue, et chacune de ces valeurs, substituée dans $px-q=0$, fournit une équation en x qui détermine les valeurs correspondantes de x.

2°. *Soient les équations*, $px^2+qx+r=0$, $f(x,y)=0$, dans lesquelles p, q, r, sont des fonctions *entières* de y.

La première équation donne,

$$x=\frac{1}{2p}(-q+\sqrt{q^2-4pr}),\quad x=\frac{1}{2p}(-q-\sqrt{q^2-4pr}).$$

La substitution de la 1re valeur de x dans $f(x,y)=0$, conduira à un résultat de la forme $Q=P\sqrt{q^2-4pr}$, dans lequel P et Q seront des fonctions *entières* de y.

Pour *faire disparaître le radical*, on élevera les deux membres au quarré, ce qui donnera l'*équation rationnelle*

$$Q^2=P^2(q^2-4pr),\quad \text{d'où}\quad (1)\ldots. Q^2-P^2(q^2-4pr)=0.$$

On serait conduit à la même équation (1) en substituant la

2e valeur de x dans $f(x,y)=0$; car cette 2e valeur de x ne différant de la 1re que par le signe du radical, le résultat de cette substitution serait $Q=-P\sqrt{q^2-4pr}$; et en élevant au quarré, on parviendrait encore à l'équation (1).

L'équation (1) *détermine toutes les valeurs de* y *qui conviennent aux équations proposées;* car ces valeurs doivent satisfaire à l'une des équations,

$$Q-P\sqrt{q^2-4pr}=0, \quad Q+P\sqrt{q^2-4pr}=0,$$

et les racines de ces deux équations sont fournies par l'équation $(Q-P\sqrt{q^2-4pr})\times(Q+P\sqrt{q^2-4pr})=0$, qui se réduit à (1)... $Q^2-P^2(q^2-4pr)=0$.

Pour trouver la valeur α de x correspondante à une valeur $y=\mathcal{C}$, tirée de (1), on pourrait faire $y=\mathcal{C}$ dans les équations proposées; cela donnerait deux équations $\varphi(x)=0$, $f(x,\mathcal{C})=0$, qui devraient admettre une racine commune $x=\alpha$; $\varphi(x)$ et $f(x,\mathcal{C})$ seraient donc divisibles par $x-\alpha$ (n° 123); de sorte qu'en cherchant le plus grand commun diviseur D entre $\varphi(x)$ et $f(x,\mathcal{C})$, l'équation $D=0$ déterminerait les valeurs de x correspondantes à $y=\mathcal{C}$. Mais *on peut parvenir plus simplement aux mêmes solutions.* En effet :

(2)... $x=\frac{1}{2p}(-q+\sqrt{q^2-4pr})$ a donné (3)... $Q=P\sqrt{q^2-4pr}$,

(4)... $x=\frac{1}{2p}(-q-\sqrt{q^2-4pr})$ a donné (5)... $Q=-P\sqrt{q^2-4pr}$.

On obtiendra donc toutes les valeurs x et y qui conviennent aux équations proposées, en cherchant successivement les solutions de chacun des deux systèmes (2), (3), et (4), (5), dans lesquels toutes les *bonnes valeurs* de x sont fournies par l'équation (1).

Pour trouver la valeur $x=\alpha$ correspondante à une valeur $y=\mathcal{C}$ tirée de (1), on fait $y=\mathcal{C}$ dans (3) et (5).

Si la valeur $y=\mathcal{C}$ satisfait à (3) et (5), elle donnera néces-

sairement $Q=0$ et $P\sqrt{q^2-4pr}=0$; car en ajoutant (3), (5), membre à membre, on trouve $2Q=0$, d'où $Q=0$; et par suite, chacune des relations (3), (5), donne $P\sqrt{q^2-4pr}=0$. Les relations (2), (4), fourniront les deux bonnes valeurs de x qui correspondent à $y=\mathcal{C}$.

Si $y=\mathcal{C}$ ne satisfait qu'à (3), il n'y aura qu'une valeur correspondante de x; cette valeur sera donnée par la relation (2).

Enfin, si $y=\mathcal{C}$ ne satisfait qu'à (5), la valeur correspondante de x sera fournie par la relation (4).

Il résulte de cette discussion que si l'on se bornait à substituer dans (2) et (4) les valeurs de y tirées de (1), on trouverait quelquefois des valeurs de x qui ne conviendraient pas aux équations proposées.

EXEMPLE. *Soient les équations*, $x^2-2yx+y^2-y=0$,

$$x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-(y^3-y^2+2y)=0.$$

L'équation (1) se réduira à $y^2-y=0$; d'où $y=0$ et $y=1$. On verra que les valeurs correspondantes de x sont $x=0$ et $x=2$.

180. On peut facilement *reconnaître si deux équations données*, (1)... $A=0, B=0$, *admettent des valeurs nulles des inconnues*, x, y. En effet :

1°. Pour que les valeurs $x=0$, $y=0$, conviennent au système (1), il faut et il suffit que ces équations ne contiennent aucun terme indépendant des inconnues x, y.

Ainsi, les équations proposées ci-dessus ne contenant aucun terme indépendant des inconnues, on pouvait prévoir que les valeurs $x=0$, $y=0$, conviendraient à ces équations.

2°. Pour que la valeur $x=0$, convienne au système (1), il faut et il suffit que les termes indépendans de x, dans A et B, admettent un plus grand commun diviseur $\phi(y)$; l'équation $\phi(y)=0$, détermine les valeurs de y qui conjointement avec $x=0$, satisfont au système (1), car $x=0$ réduit A et B aux termes indépendans de x, et ensuite toute valeur de y tirée de $\phi(y)=0$, réduit ces termes indépendans de x à zéro.

EXEMPLE. *Soit le système*

$$yx^2+(y^2+y-2)=0,\quad yx+(y^2+2y-3)=0.$$

Les termes indépendans de x admettant le commun diviseur $y-1$, la valeur $x=0$ convient nécessairement à ce système; la valeur correspondante de y est fournie par l'équation $y-1=0$ qui donne $y=1$.

3°. Enfin, pour que la valeur $y=0$ convienne au système (1), il faut et il suffit que les termes indépendans de y, dans A et B, admettent un plus grand commun diviseur $f(x)$; l'équation $f(x)=0$ détermine des valeurs de x qui conjointement avec $y=0$, satisfont au système (1).

181. *Lorsque les deux inconnues, x, y, entrant à la fois dans chacune des équations proposées* (1).. $A=0$, $B=0$, *on ne sait résoudre aucune de ces équations par rapport à l'une des inconnues, le procédé du* n° 153 *fournit le moyen de faire dépendre la résolution du système* (1) *de celle d'un autre système de la forme* $F(y)=0$, $f(x,y)=0$. En effet, d'après ce qu'on a vu (n° 153), si l'on applique aux premiers membres, A, B, un procédé analogue à celui du plus grand commun diviseur, en ayant soin d'éviter les quotiens fractionnaires, et de ne supprimer dans les restes aucun facteur contenant les inconnues, *les diverses solutions du système* (1) *réduiront tous les restes à zéro;* mais les valeurs de x et y qui réduiront deux restes consécutifs à zéro, pourront ne pas convenir au système (1). Par conséquent, si l'on désigne par R_1 le dernier diviseur qui a conduit au reste R indépendant de x, *toutes les solutions du système* (1) *conviendront au système* (2).... $R=0$, $R_1=0$; *mais quelquefois des solutions du système* (2) *ne conviendront pas au système* (1). Ainsi, le système (2) fournira non-seulement toutes les solutions du système (1), mais quelquefois il donnera en outre des valeurs de x et y qui ne satisferont pas au système (1). Or, en général, R_1 ne contient que l'inconnue y, et R_1 renferme les deux inconnues x, y; on pourra donc déterminer les solutions du système (2) par la méthode du

n° 178. Quand on aura trouvé ces solutions, il sera facile de distinguer celles qui conviennent au système (1), en les substituant dans A et B. *On obtiendra de cette manière toutes les solutions du système* (1) *en résolvant des équations à une seule inconnue.*

1re Remarque. Lorsqu'on a trouvé toutes les valeurs $a, b, c, \ldots, k$, de y qui conviennent au système (1), l'*équation finale* en y, résultante de l'élimination de x entre les équations (1), est $(y-a)(y-b)(y-c)\ldots(y-k)=0$.

On peut former la même équation, quand on connaît toutes les valeurs $\alpha, \zeta, \ldots\ldots, \omega$, de y, *étrangères* au système (1), tirées de $R=0$, car il suffit d'égaler à zéro le quotient de R par $(y-\alpha)(y-\zeta)\ldots(y-\omega)$.

2e Remarque. *Si l'on admettait des quotiens fractionnaires, il arriverait quelquefois que des solutions du système* (1) *ne réduiraient pas tous les restes à zéro.*

Par exemple, si dans la division de A par B, le coefficient du 1er terme d'un dividende partiel n'étant pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur B, on n'évitait pas les fractions, en multipliant ce dividende par une quantité indépendante de x, la division de A par B donnerait un quotient fractionnaire de la forme $\frac{N}{\varphi(y)}$ et un reste R'. On aurait,

$$A=\frac{BN}{\varphi(y)}+R'; \quad \text{d'où} \quad R'=A-\frac{BN}{\varphi(y)}.$$

D'après cette dernière égalité, une solution $x=\alpha, y=\zeta$, du système (1), $A=0$, $B=0$, pourrait ne pas réduire R' à zéro; car, dans le cas où $y=\zeta$ donnerait $\varphi(y)=0$, l'expression de R' prendrait la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Le système (2) $R=0$, $R_1=0$, ne fournirait donc pas toujours toutes les solutions du système (1). *On risquerait donc en cherchant les valeurs de x et y qui conviennent au système* (2), *de ne pas obtenir toutes les solutions du système* (1). Pour remédier à cet inconvénient, *nous éviterons*

toujours les quotients fractionnaires, en multipliant les dividendes par des quantités indépendantes de x; quand ces multiplicateurs contiendront l'inconnue y, ils introduiront quelquefois dans le système (2) des valeurs de x et y *étrangères* au système (1); mais du moins, en déterminant toutes les solutions du système (2), on sera certain d'obtenir toutes les valeurs de x et y qui conviennent aux équations (1) proposées.

182. Nous allons faire voir qu'*on peut souvent reconnaître si une solution du système* (2) *convient au système* (1), *sans substituer les valeurs de x et y dans* A *et* B; et que, *dans certains cas, on peut assurer que* $R = 0$ *est l'équation finale en y, sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation* $R = 0$.

Pour fixer les idées, nous supposerons que les calculs du n° 153 conduisent, après trois divisions, au reste R indépendant de x, et que chaque division donne trois termes au quotient, de manière que

$$\begin{aligned} A\gamma &= Bq + r, & r\gamma' &= Bq' + r', & r'\gamma'' &= Bq'' + R', \\ B\delta &= R'p + s, & s\delta'' &= R'p' + s', & s'\delta''' &= R'p'' + R'', \\ R't &= R''n + t, & t\iota'' &= R''n' + t', & t'\iota''' &= R''n'' + R. \end{aligned}$$

Dans ces relations, γ, γ', γ'', sont les quantités indépendantes de x par lesquelles il a fallu multiplier le 1er dividende A et les restes r, r', afin de n'obtenir au quotient que des termes entiers q, q', q'', et de parvenir au reste R' *moindre* que le diviseur B; de même, δ, δ' et δ'' sont les quantités indépendantes de x par lesquelles il a fallu multiplier le dividende B et les restes, s, s', afin de n'obtenir au quotient que des termes entiers p, p', p'', et de parvenir au reste R'' *moindre* que le diviseur R'. Enfin, ι, ι', ι'', sont les quantités indépendantes de x par lesquelles on a multiplié le dividende R' et les restes t, t', pour n'obtenir au quotient que des termes entiers n, n', n'', et parvenir au reste R indépendant de x. D'après les relations ci-dessus :

1°. *Chaque solution du système* (1), $A = 0$, $B = 0$, *réduit à zéro tous les restes et tous les diviseurs*; car elle donne

successivement, $r=0$, $r'=0$, $R'=0$, $s=0$, $s'=0$, $R''=0$, $t=0$, $t'=0$, $R=0$.

2°. *Lorsqu'une solution* $x=\alpha$, $y=\mathfrak{C}$, *du système* (2)... $R=0, R''=0$, *est telle que* $y=\mathfrak{C}$ *ne réduit à zéro aucune des quantités* γ, γ', γ'', δ, δ', δ'', ε, ε', ε'', *par lesquelles il a fallu multiplier les dividendes successifs pour éviter les quotiens fractionnaires, cette solution convient nécessairement au système* (1)... $A=0$, $B=0$; car elle donne successivement, $t''=0$, $t=0$, $R'=0$, $s''=0$, $s=0$, $B=0$, $r''=0$, $r=0$, $A=0$. Il est donc inutile de substituer dans A et B les valeurs $x=\alpha$, $y=\mathfrak{C}$.

Par conséquent, lorsque aucune des valeurs de y, tirées de $R=0$, ne peut réduire à zéro l'un des multiplicateurs γ, γ', ..., ε'', les solutions du système (2) sont les mêmes que celles du système (1), et $R=0$ est *l'équation finale* en y (page 190). Ces conditions ont nécessairement lieu, quand les multiplicateurs γ, γ', ..., ε', ε'', sont des nombres; elles ont également lieu quand il n'existe aucun commun diviseur, fonction de y, entre R et l'un quelconque de ces multiplicateurs.

Remarque. *Lorsque dans tout le cours des divisions, le coefficient du* 1er *terme de chaque dividende partiel est divisible par le coefficient du* 1er *terme du diviseur*, tous les multiplicateurs γ, γ'..., ε'', se réduisent à l'unité, et *les solutions du système* (2) *sont nécessairement les mêmes que celles du système* (1).

3°. *Lorsqu'une solution* $x=\alpha$, $y=\mathfrak{C}$, *du système* (2) *est telle que* $y=\mathfrak{C}$ *réduit à zéro l'un des multiplicateurs* γ, γ', ..., ε'', *cette solution peut ne pas convenir au système* (1).

Par exemple, si $y=\mathfrak{C}$ réduit ε' à zéro, et ne donne pas $\varepsilon''=0$, les valeurs $x=\alpha$, $y=\mathfrak{C}$, donnant $R=0$, $R''=0$, les relations $t'\varepsilon''=R''n''+R$, $t\varepsilon'=R''n'+\ell$, donneront $\ell=0$, $t\ell=0$; et cette dernière égalité a lieu quel que soit t, puisque ε' est nul par l'hypothèse. Les valeurs $x=\alpha$, $y=\mathfrak{C}$, pourront donc ne pas réduire le reste t à zéro: on ne sera donc pas certain que ces valeurs réduisent à zéro les restes précédens, ainsi que A et B. On verra si les valeurs $x=\alpha$, $y=\mathfrak{C}$,

conviennent au système (1), en les substituant dans A et B.

REMARQUE. *Quand le reste* R *a un commun diviseur* $\phi(y)$ *avec l'un des multiplicateurs,* $\gamma, \gamma', \ldots, \epsilon''$, *le système* (2) *peut fournir des valeurs de* x *et* y, *étrangères au système* (1); car les valeurs de y tirées de $\phi(y)=0$, sont des racines de $R=0$, et ces valeurs réduisent à zéro celui des multiplicateurs γ, $\gamma', \ldots, \epsilon''$, qui a le facteur commun $\phi(y)$ avec R.

4°. *Lorsqu'une valeur* $y=\mathcal{C}$, *tirée de* $R=0$, *rend nul le diviseur* R'' *qui a conduit au reste* R *indépendant de* x, *cela indique que plusieurs valeurs de* x *peuvent correspondre à* $y=\mathcal{C}$. *Pour obtenir ces valeurs de* x, on observe que les solutions du système (1) devant réduire à zéro tous les restes et tous les diviseurs, *il suffit de faire* $y=\mathcal{C}$ *dans les diviseurs qui précèdent* R'', *jusqu'à ce qu'on parvienne à un diviseur* $\phi(x,y)$, *qui ne se réduise pas à zéro lorsqu'on y fait* $y=\mathcal{C}$; *l'équation* $\phi(x,\mathcal{C})=0$, *fournit les valeurs de* x *qui peuvent correspondre à* $y=\mathcal{C}$.

Si $y=\mathcal{C}$ *ne réduit à zéro aucun des multiplicateurs dont on a fait usage dans le cours de la division par* $\phi(x,y)$, *et dans les divisions précédentes, chaque valeur* α *de* x, *tirée de* $\phi(x,\mathcal{C})=0$, *combinée avec* $y=\mathcal{C}$, *fournira une solution* $x=\alpha$, $y=\mathcal{C}$, *du système* (1). . . $A=0$, $B=0$.

Par exemple, si la valeur $y=\mathcal{C}$ (tirée de $R=0$), rend nul le diviseur R'' et ne réduit pas à zéro le diviseur $R'=\phi(x,y)$ qui précède R''; si de plus, $y=\mathcal{C}$ ne réduit à zéro aucun des multiplicateurs δ'', δ', δ, γ'', γ', γ, employés dans la division de B par R′ et de A par B, les relations

$$s'\delta''=R'p''+R'', \quad s\delta'=R'p'+s', \quad B\delta=R'p+s,$$
$$r'\gamma''=Bq''+R', \quad r\gamma'=Bq'+r', \quad A\gamma=Bq+r,$$

font voir que si l'on tire une valeur $x=\alpha$ de $R'=\phi(x,\mathcal{C})=0$, les valeurs $y=\mathcal{C}$, $x=\alpha$, réduiront à zéro les fonctions s', s, B, r', r, A; de sorte que $x=\alpha$, $y=\mathcal{C}$, sera nécessairement une solution du système (1).

Si $y=\mathcal{C}$ *réduit à zéro, l'un des multiplicateurs* $\gamma, \gamma', \ldots, \epsilon', \epsilon''$, *des valeurs correspondantes de* x, *tirées de* $\phi(x,\mathcal{C})=0$,

pourront ne pas convenir au système (1) ; on reconnaîtra celles de ces valeurs de x qui, conjointement avec $y=\mathcal{C}$, conviennent au système (1), en les substituant dans A et B.

Quand $y=\mathcal{C}$ *réduira à zéro tous les restes moindres que les diviseurs, ainsi que* A *et* B, *les équations* (1) *admettront une infinité de solutions ;* car A et B contenant alors le facteur commun $y-\mathcal{C}$ (n° 122), la valeur $y=\mathcal{C}$ satisfera à ces équations quel que soit x.

Pour trouver les autres solutions du système (1), on divisera A et B par $y-\mathcal{C}$, ce qui donnera des quotiens exacts P, Q. Le système $P=0$, $Q=0$, fournira les autres solutions du système (1)... $A=0$, $B=0$.

5°. *Lorsque pour une valeur* $y=\mathcal{C}$ (*tirée de* $R=0$) *le diviseur* R″ *qui a conduit au reste* R *indépendant de* x, *se réduit à un nombre, cette valeur de* y *ne convient pas au système* (1), c'est-à-dire qu'il ne lui correspond aucune valeur finie de x ; car, d'après (1°), les bonnes valeurs de x et y doivent réduire tous les diviseurs à zéro.

6°. *Lorsqu'on sait décomposer un des restes en facteurs, on peut simplifier les calculs, en cherchant les valeurs de* x *et* y *qui réduisent à zéro l'un quelconque de ces facteurs et le diviseur correspondant.*

Par exemple, si dans la division de B par R′, on peut décomposer le reste s en deux facteurs entiers k, k', on obtiendra les solutions du système (1), fournies par le système $R'=0$, $s=0$, en traitant séparément chacun des deux systèmes plus simples, $R'=0$, $k=0$ || $R'=0$, $k'=0$.

7°. *Lorsque dans le cours d'une même division, des valeurs* $x=\alpha$, $y=\mathcal{C}$, *réduisent à zéro, l'un des restes et le diviseur, si* $y=\mathcal{C}$ *ne réduit à zéro aucun des multiplicateurs dont on a fait usage pour parvenir à ce reste, ces valeurs de* x, y, *réduiront à zéro tous les restes précédens, ainsi que* A *et* B ; *de sorte que* $x=\alpha$, $y=\mathcal{C}$, *sera une solution du système* (1).

Par exemple, si dans la division de B par R′, les valeurs $x=\alpha$, $y=\mathcal{C}$, donnent $s'=0$, $R'=0$, et si $y=\mathcal{C}$ ne réduit à zéro aucun des multiplicateurs δ'', δ, γ'', γ', γ, dont on a

fait usage pour parvenir au reste s', ces valeurs de x, y, substituées dans les relations obtenues (page 197), donneront successivement $s=0$, $B=0$, $r'=0$, $r=0$, $A=0$.

Appliquons cette théorie générale à des exemples.

1er EXEMPLE. *Soient les équations*

$$A=x^3+2yx^2+2y(y-2)x+y^2-4=0,$$
$$B=x^2+2yx+2y^2-5y+2=0.$$

La division de A par B donne le quotient x et le reste

$$R'=(y-2)x+(y^2-4).$$

Le 1er terme de B n'étant pas divisible par le 1er terme de R', on multiplie B par $y-2$, et l'on divise $B(y-2)$ par R'; le 1er terme du quotient est x et le reste est

$$s=(y^2-4y+4)x+(y-2)(2y^2-5y+2).$$

Le coefficient y^2-4y+4 étant divisible par $y-2$, on divise s par R', ce qui donne le quotient $y-2$ et le reste

$$R=(y-2)(y^2-5y+6)=(y-2)(y-2)(y-3).$$

Il résulte de (3°) que la valeur $y=2$, tirée de $R=0$, peut ne pas convenir aux équations, $A=0$, $B=0$, car elle réduit à zéro la quantité $y-2$ par laquelle on a multiplié B. Pour trouver les valeurs de x correspondantes à $y=2$, on fait $y=2$ dans R'; ce qui réduit R' à zéro. On est donc conduit, d'après (4°), à faire $x=2$ dans $B=0$; ce qui donne $x^2+4x=0$; d'où $x=0$ et $x=-4$. Chacun des systèmes

$$y=2,\ x=0 \ \|\ y=2,\ x=-4,$$

convient aux équations $A=0$, $B=0$.

Il suit de (2°) que la valeur $y=3$, tirée de $R=0$, conviendra nécessairement aux équations proposées, car elle ne réduit pas à zéro la quantité $y-2$ par laquelle on a multiplié B. Pour obtenir la valeur de x correspondante à $y=3$, on fait $y=3$ dans $R'=0$, ce qui donne $x=-5$.

On voit que les équations proposées admettent les trois solutions, $y=2, x=0 \ \|\ y=2, x=-4 \ \|\ y=3, x=-5$.

La propriété énoncée (6°) fournit le moyen de simplifier les

calculs en observant que y^2-4 étant le produit de $y-2$ par $y+2$, le reste $R'=(y-2)(x+y+2)$; et comme on est parvenu à ce reste sans multiplier le dividende A par une fonction de y, il résulte de (2°) que les solutions des équations proposées $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles du système, $B=0$, $R'=0$; il suffit donc de traiter séparément chacun des deux systèmes

$$B=0,\quad y-2=0 \;\|\; B=0,\quad x+y+2=0.$$

Le 1er système fournit les deux solutions,

$$y=2,\quad x=0 \;\|\; y=2,\quad x=-4.$$

Pour trouver les solutions du 2e système, on divise B par $x+y+2$; ce qui conduit au reste $R=y^2-5y+6$. Les équations $R=0$, $x+y+2=0$, déterminent les deux solutions $y=2, x=-4 \;\|\; y=3,\quad x=-5$, des équations proposées.

2e Exemple. *Soient les deux équations*

$$A=(y-1)x^2+2x-5y+3=0,\quad B=yx^2+9x-10y=0.$$

Pour éliminer x entre ces équations, on divise Ay par B, ce qui fournit le reste $R'=(9-7y)x+(5y-7)y$.

On divise $B(9-7y)$ par R'; le 1er terme du quotient est yx, et le reste correspondant est

$$s=(-5y^3+7y^2-63y+81)x-10(9-7y)y.$$

Le 1er terme de s n'étant pas divisible par le 1er terme de R', on divise $s\times(9-7y)$ par R', ce qui conduit au reste

$$R=25y^5-70y^4-126y^3+414y^2-243y.$$

Ce reste ayant un commun diviseur y, avec le multiplicateur y dont on a fait usage pour rendre la 1re division possible, il suit de (3°) que le système $R=0$, $R'=0$, peut admettre des valeurs de x et y *étrangères* aux équations proposées.

L'équation $R=0$ donne $y=0$; cette valeur de y, substituée dans $R'=0$, donne $x=0$. Ces valeurs de x et y ne satisfont pas aux équations proposées, car elles ne réduisent pas A à zéro.

Pour trouver l'équation qui fournit les autres valeurs de y, on divise R par y, et l'on égale le quotient à zéro, ce qui donne

$$(1)\ldots\ 25y^4 - 70y^3 - 126y^2 + 414y - 243 = 0.$$

Le 1er membre de l'équation (1) n'ayant pas de facteur commun avec les multiplicateurs y et $9-7y$, dont on a fait usage pour éviter les fractions, il résulte de (2°) que toute valeur de y, tirée de (1), conviendra aux équations proposées, et que l'équation (1) est l'*équation finale* en y; elle donne (n° 175),

$$y=1,\ y=3,\ y=\frac{3}{5}(-1+\sqrt{10}),\ y=\frac{3}{5}(-1-\sqrt{10}).$$

En substituant ces valeurs de y dans $R'=0$, on trouve que les valeurs de x correspondantes sont

$$x=1,\ x=2,\ x=-5-\sqrt{10},\ x=-5+\sqrt{10},\ (*).$$

183. Lorsque les calculs du n° 181 conduisent à un reste R identiquement nul, le système (2)... $R=\phi$, $R_1=0$ (page 195) ne peut plus servir à déterminer les solutions du système (1)... $A=0$, $B=0$; et l'on ignore si les polynomes A, B, ont un commun diviseur, car la multiplication des dividendes partiels par des fonctions de y, pouvant introduire des facteurs dans les restes, on n'est plus certain, comme on l'était dans le n° 152 (2°), que le plus grand commun diviseur de deux restes est le même que celui de A et B. On peut alors chercher le plus grand commun diviseur D de A et B par la méthode du n° 152 (2°).

Quand A et B admettront un commun diviseur D, fonction des inconnues, x, y, l'équation $D=0$ fournira une infinité de solutions du système (1). En effet, si D renferme x et y, on

(*) En faisant $y=\frac{3}{5}(-1+\sqrt{10})$ dans $R'=0$, on trouve

$$x=\frac{13\sqrt{10}-40}{22-7\sqrt{10}}=-5-\sqrt{10}\ \text{(page 92)}.$$

pourra donner des valeurs arbitraires à l'une de ces inconnues; l'équation $D=0$, qui ne contiendra plus que l'autre inconnue, servira à déterminer les valeurs correspondantes de cette dernière inconnue; lorsque D ne contiendra que l'inconnue x, l'équation $D=0$ déterminera des valeurs de x qui satisferont au système (1) quel que soit y; enfin, si D ne contient que l'inconnue y, l'équation $D=0$ déterminera des valeurs de y qui satisferont au système (1) quel que soit x.

Pour trouver les autres solutions du système (1), il suffira de calculer les quotiens A', B', de A et B par D, et de traiter le système $A'=0$, $B'=0$.

Lorsque le reste R, indépendant de x, étant identiquement nul, les polynomes A, B, n'admettent aucun commun diviseur fonction de x, y, ou de x, ou de y, la méthode exposée (n°s 181...183), offre des difficultés que l'on peut toujours éviter en ayant recours au procédé que nous allons indiquer; ce procédé a le double avantage de n'être jamais en défaut et de simplifier souvent les calculs (*).

184. *Pour déterminer toutes les solutions communes à deux équations*, $P'=0$, $P''=0$, *dont les premiers membres sont des fonctions entières des inconnues*, x, y, *on cherche à décomposer ces premiers membres en facteurs, par une méthode analogue à celle qui a été indiquée* (page 158).

Pour décomposer P' en facteurs, on cherche d'abord si P' contient un facteur X' indépendant de y; à cet effet, on ordonne P' par rapport à y; le facteur X' devant diviser les coefficiens des diverses puissances de y dans P' (n° 20), et ces coefficiens ne pouvant contenir que la seule lettre x, il est facile de calculer leur plus grand commun diviseur (n° 152, 1°); ce commun diviseur exprime X'. On divise P' par X' (n° 20); cela donne un quotient exact A', qui ne peut être divisible

(*) Ce procédé a paru pour la première fois dans une brochure que j'ai publiée en 1833.

par aucun nombre entier, on a $P' = X'A'$; et il ne s'agit plus que de décomposer A' en facteurs.

Pour découvrir si le polynome entier A' contient un facteur Y' indépendant de x, on ordonne A' par rapport à x, et l'on cherche le plus grand commun diviseur des coefficiens de x dans A'; ce diviseur exprime Y' (n° 20). On divise A' par Y' (n° 20); ce qui donne un quotient exact A''; on a

$$A' = Y'A'', \quad P' = X'Y'A''.$$

On parviendrait au même résultat en commençant par la recherche du facteur Y'.

On décompose de même P'' en trois facteurs X'', Y'', B''; ce qui donne $P'' = X''Y''B''$.

Les facteurs, X', X'', sont des quantités entières, indépendantes de y, qui ne peuvent être que des fonctions de x, ou des nombres, ou l'unité. Les facteurs, Y', Y'', sont des quantités entières, indépendantes de x, qui ne peuvent être que des fonctions de y, ou l'unité. Enfin, les facteurs A'', B'', sont des fonctions entières de x et y, qui n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des inconnues x, y, ni aucun diviseur monome, et qui peuvent se réduire à l'unité; ces facteurs sont ordonnés par rapport à x.

Pour *mettre en évidence les facteurs communs à* P' *et* P'', on cherche successivement, le plus grand commun diviseur X des polynomes X', X'', le plus grand commun diviseur Y des polynomes Y', Y'', (n° 152, 1°), et le plus grand commun diviseur D des polynomes A'', B'', (n° 152, 2°). On divise successivement les polynomes X', X'', par X; les polynomes Y', Y'', par Y, et les polynomes A'', B'', par D; ce qui donne des quotiens exacts x', x'', y', y'', A, B. On a,

$$X' = Xx', \quad X'' = Xx'', \quad Y' = Yy', \quad Y'' = Yy'', \quad A'' = DA, \quad B'' = DB;$$

et les expressions $P' = X'Y'A''$, $P'' = X''Y''B''$,

donnent $P' = XYDx'y'A$, $P'' = XYDx''y''B$.

On voit que *le plus grand commun diviseur des polynomes* P′, P″, *est* XYD (*).

185. La question se trouve ainsi réduite à *déterminer les solutions du système* (1)... XYD $x'y'A = 0$, XYD $x''y''B = 0$.

Dans ce système, X, x' et x'', ne peuvent renfermer que la seule inconnue x; Y, y' et y'' ne peuvent renfermer que la seule inconnue y; D contient les deux inconnues x, y; ou D est égal à l'unité. Enfin, A et B sont des fonctions *entières* de x et y, qui sont premières entre elles, et qui n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des inconnues x, y, ni aucun diviseur monome.

Un produit de facteurs entiers étant nul, lorsque l'un de ses facteurs se réduit à zéro (n° 9, 7°), on obtiendra des solutions du système (1) en égalant successivement à zéro l'un quelconque des facteurs X, Y, D, communs aux premiers membres des équations (1), ou en égalant à la fois à zéro l'un des facteurs x', y', A, et l'un des facteurs x'', y'', B; ce qui fournit douze systèmes. L'ensemble des solutions fournies par ces systèmes, déterminera toutes les valeurs des inconnues, x, y, qui satisfont aux équations (1); car on conçoit qu'un produit ne peut devenir nul que lorsqu'un de ses facteurs se réduit à zéro.

Discutons ces différens systèmes d'équations, et supposons d'abord qu'aucun des facteurs X, Y, D, x', x'', y', y'', A, B, ne se réduise à un nombre ou à l'unité.

L'équation à une seule inconnue $X = 0$ détermine un nombre limité de valeurs de x, avec chacune desquelles on peut combiner des valeurs arbitraires de y. Ainsi, x est déterminé, et y reste entièrement indéterminé.

2°. L'équation $Y = 0$, détermine y; et x reste arbitraire.

3°. L'équation $D = 0$ contenant les deux inconnues x, y, fournira une infinité de solutions du système (1); car on

(*) On pourra faire usage de ce procédé pour *simplifier la méthode qui a servi* (n° 152, 2°) *à déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers contenant deux lettres.*

pourra donner des valeurs arbitraires à l'une quelconque des inconnues, et l'équation résultante ne renfermant que l'autre inconnue, déterminera les valeurs correspondantes de cette dernière inconnue.

Ainsi, chacune des équations $X=0$, $Y=0$, $D=0$, donne une infinité de solutions du système (1).

4°. Le système $x'=0$, $x''=0$, n'admet aucune solution; car x' et x'' étant des fonctions de x premières entre elles, une même valeur de x ne saurait les réduire simultanément à zéro (n° 176).

5°. Par une raison semblable, le système $y'=0$, $y''=0$, n'admet aucune solution.

6°. Chacun des six systèmes

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x'=0 & y'=0 & x'=0 & y'=0 & x''=0 & y''=0 \\ y''=0 & x''=0 & B=0 & B=0 & A=0 & A=0, \end{array}$$

admet un nombre limité de solutions.

Par exemple, dans le système $x'=0$, $y''=0$, chaque valeur de x, tirée de $x'=0$, peut se combiner avec l'une quelconque des valeurs de y tirées de $y''=0$; et dans le système $x'=0$, $B=0$, l'équation à une seule inconnue $x'=0$, détermine des valeurs de x, qui substituées dans l'équation à deux inconnues $B=0$, donnent des équations en y d'où l'on déduit les valeurs correspondantes de y.

On obtient toutes les solutions précédentes en résolvant successivement des équations à une seule inconnue.

Lorsqu'un des facteurs $X, Y, D, x', x'', y', y'', A, B$, des premiers membres des équations (1), se réduit à un nombre ou à l'unité, on ne saurait l'égaler à zéro; il ne peut donc fournir aucune solution du système (1).

186. *Il ne reste donc qu'à traiter le système*.....

$$(2)\ldots\ A=0,\quad B=0,$$

dans lequel A *et* B *sont des fonctions entières de* x *et* y, *qui n'admettent aucun facteur commun, et qui ne sont divisibles par aucune quantité indépendante de l'une des inconnues* x, y, *ni par aucun monome.*

Pour *éliminer x entre les équations* (2), on ordonne A et B par rapport aux puissances décroissantes de x; on divise A par B (on suppose que le plus fort des exposans de x dans A n'est pas moindre que dans B); et quand le coefficient du 1er terme d'un dividende partiel n'est pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur B, on évite les quotiens fractionnaires en multipliant ce dividende par une quantité indépendante de x (n° 152, 2°). On parvient ainsi à un reste R′ *moindre* que le diviseur B.

On prouvera, comme dans le n° 153, que le système (3)... B=o, R′=o, contient non-seulement toutes les solutions du système (2), mais qu'il donne en outre quelquefois des valeurs de x et y *étrangères* au système (2).

Pour *déterminer les solutions du système* (3), on décompose le reste R′ en trois facteurs, par la méthode indiquée (n° 184); et comme R′ est ordonné par rapport à x, on commence par la recherche du facteur Y_1 indépendant de x; on trouve $R' = Y_1 X_1 R_1$. Le facteur Y_1 ne peut contenir que l'inconnue y; X_1 ne peut contenir que l'inconnue x; et R_1 est une fonction de x et y qui n'admet aucun diviseur indépendant de x ou de y.

On obtiendra les solutions du système (3) en cherchant successivement les diverses solutions des trois systèmes,

$$B=o,\ Y_1=o \quad \| \quad B=o,\ X_1=o \quad \| \quad B=o,\ R_1=o.$$

Dans le 1er *système*, l'équation $Y_1=o$ fournira des valeurs de y; et en les substituant successivement dans $B=o$, l'équation résultante fournira les valeurs correspondantes de x.

On déterminera semblablement les solutions du 2e *système* ($X_1=o, B=o$) en résolvant des équations à une seule inconnue.

Enfin, pour calculer les diverses solutions du 3e *système* ($B=o, R_1=o$), on divisera B par R_1, en ordonnant R_1 suivant les puissances décroissantes de x; et quand le coefficient du 1er terme d'un dividende partiel ne sera pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur R_1, on évitera les quotiens fractionnaires en multipliant ce dividende par une quantité in-

dépendante de x; ce qui conduira à un reste R'' *moindre* que le diviseur R_1. Le système (4)... $R_1 = 0$, $R'' = 0$, fournira toutes les solutions du 3ᵉ système, et quelquefois il donnera en outre des valeurs de x et y étrangères à ce 3ᵉ système.

On décomposera R'' en trois facteurs Y_2, X_2, R_2, et l'on obtiendra les solutions du système (4) en cherchant successivement les diverses solutions de chacun des trois systèmes

$$R_1 = 0,\ Y_2 = 0 \quad \| \quad R_1 = 0,\ X_2 = 0 \quad \| \quad R_1 = 0,\ R_2 = 0.$$

On obtiendra les solutions des deux premiers systèmes en résolvant successivement des équations à une seule inconnue; et il ne s'agira plus que de traiter le système

$$(5)\ldots\ R_1 = 0,\ R_2 = 0.$$

En continuant ces calculs, on parviendra toujours à un reste R indépendant de x.

Supposons que ce soit la division de R_1 par R_2, qui conduise à ce reste R indépendant de x. Le système

$$(6)\ldots\ R = 0,\ R_2 = 0,$$

fournira non-seulement toutes les solutions du système (5), mais quelquefois il donnera en outre des solutions *étrangères* au système (5).

L'équation $R = 0$ fournira des valeurs de y; et en les substituant dans $R_2 = 0$, l'équation résultante déterminera les valeurs correspondantes de x.

On obtiendra de cette manière toutes les solutions du système (2) en résolvant des équations à une seule inconnue. On pourra trouver en outre des solutions *étrangères* à ce système, et on les distinguera par la méthode indiquée (nº 182).

Remarque. *Lorsqu'on suit le procédé que nous venons d'indiquer, le reste* R *indépendant de* x *n'est jamais identiquement nul; et une valeur de* y, *tirée de* $R = 0$, *ne réduit jamais à zéro le diviseur qui a conduit au reste* R. En effet, dans tout le cours de la 1ʳᵉ division, le diviseur B ne contenant aucun facteur indépendant de x, on prouvera, comme

dans le n° 152, que les facteurs communs de A et B sont les mêmes que ceux de B et R'. Or, $R' = Y_1X_1R_1$; et chacun des facteurs X_1, Y_1, est premier avec B, puisque B n'admet aucun diviseur indépendant de l'une des inconnues x, y; les facteurs communs de B et R' sont donc les mêmes que ceux de B et R_1. Dans la 2e division (de B par R_1), le diviseur R_1 n'admettant aucun facteur indépendant de l'une des inconnues x, y, on verra comme ci-dessus que les facteurs communs de B et R_1 sont les mêmes que ceux qui existent entre le diviseur R_1 et le reste R'' de cette division. Or, $R'' = Y_2X_2R_2$; et comme chacun des facteurs Y_2, X_2, est premier avec R_1, les facteurs communs de R_1 et R'' sont les mêmes que ceux de R_1 et R_2. Et ainsi de suite. Supposons que ce soit la division de R_1 par R_2 qui conduise au reste R indépendant de x; les facteurs communs de R_2 et R seront les mêmes que ceux de A et B. Cela posé : si le reste R était identiquement nul, R_2 diviserait R_1; R_2 diviserait donc A et B, ce qui ne saurait avoir lieu puisque, d'après le procédé que nous avons suivi, les polynomes A, B, sont premiers entre eux.

Le reste indépendant de x n'étant jamais identiquement nul, l'équation $R = 0$ ne fournira qu'un nombre limité de valeurs de y. Chaque valeur $y = C$, tirée de $R = 0$, et substituée dans $R_2 = 0$, fournira une équation $\varphi(x) = 0$ dont le 1er membre ne sera jamais identiquement nul; car si $y = C$ réduisait R_2 à zéro, R_2 serait divisible par $y - C$ (n° 122), ce qui est impossible puisque R_2 n'admet aucun diviseur indépendant de x. L'équation $\varphi(x) = 0$ déterminera donc les valeurs de x correspondantes à $y = C$. De sorte que le système (6)... $R = 0$, $R_2 = 0$, n'admettra qu'un nombre limité de solutions.

On verra d'une manière semblable que chacun des systèmes auxquels on a été conduit en traitant les équations (2)... $A = 0$, $B = 0$, n'admet qu'un nombre déterminé de solutions.

Par conséquent, *lorsque les premiers membres de deux*

équations $A = 0$, $B = 0$, *à deux inconnues, ne renferment aucun diviseur indépendant de l'une des inconnues, ni aucun commun diviseur fonction des deux inconnues, le système de ces équations n'admet jamais qu'un nombre déterminé de solutions.*

187. Pour appliquer la 2e *méthode d'élimination* à un exemple, nous considérerons les polynomes

$$P' = 6y^6x^5 - 6y^4x^5 + 6y^7x^4 - 6y^6x^4 - 6y^7x^3 + 6y^6x^3 - 6y^5x^3 + 6y^4x^3 - 6y^6x^2 + 6y^5x^2,$$

$$P'' = 4y^4x^6 - 4y^3x^6 - 4y^4x^5 + 4y^3x^5 - 4y^6x^4 + 4y^5x^4 + 4y^6x^3 - 4y^5x^3.$$

En opérant comme il a été indiqué (n° 184), on trouve

$$X = 2(x-1)x^4, \quad x' = 3, \quad x'' = 2x,$$
$$Y = (y-1)y^3, \quad y' = y, \quad y'' = 1,$$
$$D = x + y, \quad A = (y+1)x + 1, \quad B = x - y.$$

Or, $P' = XYDx'y'A$, $P'' = XYDx''y''B$, (*page* 205). Donc

$$P' = 6y^4x^4(x-1)(y-1)(x+y)\{(y+1)x+1\},$$
$$P'' = 4y^3x^3(x-1)(y-1)(x+y)(x-y).$$

L'équation $X = 0$ donne $x = 0$ et $x = 1$. Chacune de ces valeurs de x satisfait au système (1)... $P' = 0$, $P'' = 0$, quel que soit y.

L'équation $Y = 0$ donne $y = 0$ et $y = 1$. Chacune de ces valeurs de y satisfait au système (1) quel que soit x.

L'équation $D = 0$ donnant $x = -y$, chaque valeur arbitraire ζ de y fournit une valeur correspondante $x = -\zeta$ de x; et $y = \zeta$, $x = -\zeta$, est une solution du système (1).

Les systèmes $x' = 0$, $y'' = 0 \,\|\, x' = 0$, $B = 0 \,\|\, y' = 0$, $A = 0$, n'admettent aucune solution, car $x' = 3$ et $y'' = 1$.

Chacun des systèmes $y' = 0$, $x'' = 0 \,\|\, y' = 0$, $B = 0$, donne $y = 0$, $x = 0$.

Le système $x'' = 0$, $A = 0$, n'admet aucune solution, car $x'' = 0$ donne $x = 0$ et $A = 1$.

Enfin, pour déterminer les solutions du dernier système (2)... $A = 0$, $B = 0$, on divise A par B, ce qui fournit le

quotient $y+1$ et le reste $R=y^2+y+1$; et comme on obtient ce reste sans multiplier par des fonctions de y, il suit du principe du n° 182 (2°) que les solutions du système $B=0$, $R=0$, sont les mêmes que celles du système (2). L'équation $R=0$ donne

$$y=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\quad y=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

Les valeurs correspondantes de x, déduites de $B=0$, sont

$$x=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\quad x=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}),$$

car $B=0$ donne $x=y$.

Telles sont les solutions du système (1).

La 1re *méthode d'élimination* (nos 181 et 182) conduirait plus longuement aux mêmes résultats.

188. Pour *résoudre trois équations*

$$(1)\ldots P=0,\quad (2)\ldots Q=0,\quad (3)\ldots R=0,$$

qui renferment trois inconnues x, y, z, on élimine successivement z entre (1), (2), et (1), (3); cela conduit à deux équations $(4)\ldots F(x,y)=0$, $f(x,y)=0$, qui servent à déterminer x et y. L'élimination de x entre les équations (4) conduit à une équation $(5)\ldots \varphi(y)=0$, qui donne toutes les valeurs de y. Soit $\mathcal{C}$ une de ces valeurs; on fait $y=\mathcal{C}$ dans $F(x,y)$ et $f(x,y)$; on cherche le plus grand commun diviseur X, des résultats $F(x,\mathcal{C})$, $f(x,\mathcal{C})$; l'équation $X=0$, fournit les valeurs de x correspondantes à $y=\mathcal{C}$; si α désigne une valeur de x tirée de $X=0$, l'une des solutions des équations (4) est $x=\alpha$, $y=\mathcal{C}$. La substitution de ces valeurs de x et y, dans P, Q, R, fournit trois fonctions de z; on cherche le plus grand commun diviseur Z de ces fonctions de z; l'équation $Z=0$ détermine les valeurs de z correspondantes à $x=\alpha$, $y=\mathcal{C}$.

Exemple. *Soient les trois équations* $(1)\ldots x+y+z-6=0$,

$(2)\ldots z^2-x^2-y^2-4=0$, $(3)\ldots z^2+xy-x^2-7=0$.

L'élimination de z entre (1), (2), et entre (1), (3), donne

$(4)\ldots (y-6)x-6y+16=0$, $3(y-4)x+y^2-12y+29=0$.

Éliminant x entre ces deux dernières équations, on parvient à l'équation (5)... $y^3 - 19y + 18 = 0$, qui donne

$$y = 1, \quad y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{73}).$$

Les valeurs correspondantes de x, déduites de (4), sont

$$x = 2, \quad x = \frac{1}{12}(7 \mp 5\sqrt{73}).$$

Et en substituant ces valeurs de x et y dans (1), on trouve que les valeurs correspondantes de z sont,

$$z = 3, \quad z = \frac{1}{12}(71 \mp \sqrt{73}).$$

Les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs. De sorte que le système des équations (1), (2), (3), proposées, admet trois solutions.—

En général, *la résolution de n équations d'un degré quelconque contenant n inconnues, conduit à des équations dans chacune desquelles il n'entre qu'une seule inconnue.*

Des équations irrationnelles.

189. Nous allons actuellement nous occuper des *équations irrationnelles*, c'est-à-dire des équations dans lesquelles les inconnues entrent sous des radicaux. Pour résoudre ces équations, on égale chaque radical à une nouvelle inconnue; on fait ensuite disparaître les radicaux; ce qui fournit des *équations rationnelles* entre les inconnues primitives et les nouvelles inconnues; l'élimination de ces nouvelles inconnues conduit à des équations rationnelles entre les inconnues primitives, et nous avons vu comment on résout ces dernières équations.

1er Exemple. Soit l'équation (1)... $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 5$.

On fait $\sqrt{x} = y$ et $\sqrt{x-5} = z$; d'où

(2)... $y + z = 5$, (3)... $y^2 = x$, (4)... $z^2 = x - 5$.

Pour obtenir l'*équation finale* en x, il suffit d'éliminer y et z entre (2), (3), (4); à cet effet, on remplace d'abord y par sa valeur $5 - z$ tirée de (2); l'équation (3) devient (5)... $z^2 - 10z + 25 - x = 6$; l'élimination de z entre (4) et (5) conduit à diviser $z^2 - 10z + (25 - x)$ par $z^2 - (x - 5)$; ce qui donne le quotient $+1$ et le reste $-10(z-2)$; on divise $z^2 - (x-5)$ par $z-2$, et le reste indépendant de z étant $-x+9$, l'équation finale demandée est $-x+9=0$; d'où $x=9$. Cette valeur de x satisfait à l'équation (1).

Remarque. Le seul moyen de rendre l'équation (1) rationnelle, est de faire disparaître les radicaux en les élevant au quarré; ce qui fait disparaître le double signe dont la valeur de chaque radical doit être affectée; chacune des équations

$$(6)\ldots \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 5, & -\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 5, \\ -\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 5, \end{cases}$$

conduirait donc à la même valeur $x=9$; et cependant, en ne prenant que la valeur arithmétique de chaque radical, la valeur $x=9$ ne satisfait à aucune des équations (6).

En général, *lorsqu'on fait disparaître les radicaux contenus dans des équations, les valeurs des inconnues, tirées des équations rationnelles qui en résultent, peuvent ne convenir qu'à certaines combinaisons des diverses valeurs dont ces radicaux sont susceptibles.*

Ainsi, l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 5$, n'admet pas de *solutions arithmétiques;* mais en prenant la valeur négative de $\sqrt{x-5}$, l'hypothèse $x=9$ fournit une *solution algébrique* de cette équation.

2e Exemple. Soient les équations

$$(1)\ldots \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 2, \quad (2)\ldots \sqrt{x+8} - \sqrt{y+2} = 1.$$

On fait, $\sqrt{x}=z$, $\sqrt{y-1}=t$, $\sqrt{x+8}=v$, $\sqrt{y+2}=u$; d'où $(3)\ldots z^2=x$, $(4)\ldots t^2=y-1$, $(5)\ldots v^2=x+8$,

$$(6)\ldots u^2=y+2,\ (7)\ldots z+t=2,\ (8)\ldots v-u=1.$$

Pour obtenir les deux *équations rationnelles* qui déterminent les valeurs des inconnues, x, y, il suffit d'éliminer z, t, v et u, entre les équations (3), (4), (5), (6), (7), (8); à cet effet, on élimine successivement les inconnues z, t, entre (3), (4), (7), et les inconnues v, u, entre (5), (6), (8), ce qui conduit aux équations demandées

$$(9)\ldots x^2 - 2(y+3)x + (y^2 - 10y + 25) = 0,$$
$$(10)\ldots x^2 - 2(y-5)x + (y^2 - 14y + 17) = 0.$$

Si l'on élimine x, entre les équations (9) et (10), par la méthode du n° 181, les deux derniers restes seront

$$R_1 = -4(4x - y - 2), \quad R = 9y^2 - 196y + 356.$$

Et comme on est parvenu à ces restes, sans multiplier les dividendes par des fonctions de y, les solutions du système (9) et (10) sont les mêmes que celles du système $R = 0$, $R_1 = 0$.

Les solutions de ce dernier système sont

$$y = 2, \quad x = 1 \;\|\; y = \frac{178}{9}, \quad x = \frac{49}{9}.$$

Les valeurs, $x = 1$, $y = 2$, forment une *solution arithmétique* des équations (1) et (2) proposées.

Les valeurs, $y = \frac{178}{9}$, $x = \frac{49}{9}$, satisfont au système

$$-\sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 2, \quad -\sqrt{x+8} + \sqrt{y+2} = 1.$$

Remarque. Les autres systèmes, que l'on déduirait des équations (1), (2), en changeant les signes des radicaux contenus dans ces équations, n'admettraient aucune solution arithmétique.

§ VII. *Des Équations réciproques.*

190. Lorsque, α désignant une racine quelconque d'une équation $f(x) = 0$, $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine de la même équation, on dit que cette équation est *réciproque*

Nous allons chercher les *relations qui doivent exister entre les coefficiens d'une équation pour qu'elle soit* RÉCIPROQUE.

1°. Considérons d'abord l'*équation de degré impair*

$$(1)\ldots\ x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0.$$

Pour qu'elle soit réciproque, il faut et il suffit qu'en y changeant x en $\frac{1}{x}$, l'équation résultante admette les mêmes racines que la proposée. Or, on trouve que cette nouvelle équation se réduit à

$$(2)\ldots\ x^5+\frac{s}{t}x^4+\frac{r}{t}x^3+\frac{q}{t}x^2+\frac{p}{t}x+\frac{1}{t}=0.$$

Il résulte du principe du n° 125 (1°) que les relations demandées sont

$$(3)\ldots\ \frac{s}{t}=p,\quad \frac{r}{t}=q,\quad \frac{q}{t}=r,\quad \frac{p}{t}=s,\quad \frac{1}{t}=t,$$

La dernière donne $t^2=1$; d'où, $t=+1$ et $t=-1$.

Ces valeurs de t, substituées dans (3), donnent $s=p$, $r=q$, et $s=-p$, $r=-q$. Ce qui conduit aux équations réciproques

$$(4)\ldots\ x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0,$$
$$(5)\ldots\ x^5+px^4+qx^3-qx^2-px-1=0.$$

Les mêmes raisonnemens étant applicables à toute équation de degré impair, on voit que *pour qu'une équation de degré impair soit* RÉCIPROQUE, *il faut et il suffit que les coefficiens des termes également distans des extrêmes soient égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires.*

2°. Soit l'*équation de degré pair*

$$(6)\ldots\ x^6+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx+u=0.$$

Si l'on exprime que cette équation est réciproque, on parviendra aux relations

$$(7)\ldots\ \frac{t}{u}=p,\ \frac{s}{u}=q,\ \frac{r}{u}=r,\ \frac{q}{u}=s,\ \frac{p}{u}=t,\ \frac{1}{u}=u.$$

La dernière donne $u^2=1$; d'où $u=+1$ et $u=-1$.

Soit $u=+1$; les relations (7) s'accordant à donner $t=p$, $s=q$, $r=r$, l'équation (6) devient

$$(8)\ldots\ x^6+px^5+qx^4+rx^3+qx^2+px+1=0.$$

Soit $u=-1$; la relation $\frac{r}{u}=r$ devient $r=-r$, d'où $2r=0$ et $r=0$; les autres relations (7) s'accordant à donner $t=-p$, $s=-q$, l'équation (6) devient

$$(9)\ldots\ x^6+px^5+qx^4-qx^2-px-1=0.$$

D'ailleurs, l'équation (8) étant réciproque, quel que soit r, on peut y faire $r=0$, ce qui fournit l'équation réciproque

$$(10)\ldots\ x^6+px^5+qx^4+qx^2+px+1=0.$$

Par conséquent : *Pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit, si elle renferme le terme du milieu, que les coefficiens des termes également distans des extrêmes soient égaux et de même signe; et si elle ne renferme pas le terme du milieu, il faut que les coefficiens des termes également distans des extrêmes soient égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires.*

191. *Toute équation réciproque de degré impair a une racine égale à* -1 *ou à* $+1$, *selon que les coefficiens des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires; en divisant le* 1er *membre par le facteur correspondant,* $x+1$ *ou* $x-1$, *on obtient une équation réciproque de degré pair, dans laquelle les coefficiens des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe.*

En effet, soient les équations réciproques de degré impair,

$$(4)\ldots\ x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0,$$
$$(5)\ldots\ x^5+px^4+qx^3-qx^2-px-1=0.$$

1°. L'hypothèse $x=-1$ satisfaisant à l'équation (4), son premier membre est divisible par $x+1$, (n° 122).

Pour faciliter cette division, on met l'équation (4) sous la forme $(6)\ldots\ (x^5+1)+px(x^3+1)+qx^2(x+1)=0$.

Les quotiens des binomes x^5+1, x^3+1, par $x+1$, étant $x^4-x^3+x^2-x+1$, et x^2-x+1 (*page* 125), la division du 1er membre de l'équation (6) par $x+1$ conduit à l'équation réciproque de degré pair

$$x^4+(p-1)x^3+(1-p+q)x^2+(p-1)x+1=0.$$

2°. L'hypothèse $x=1$ satisfaisant à l'équation (5), son premier membre est divisible par $x-1$. Or, cette équation revient à

$$(x^5-1)+px(x^3-1)+qx^2(x-1)=0;$$

et les quotiens des binomes x^5-1, x^3-1, par $x-1$, étant

$$x^4+x^3+x^2+x+1 \text{ et } x^2+x+1 \text{ (}page\text{ 125)},$$

la dernière équation, divisée par $x-1$, conduit à l'équation réciproque de degré pair,

$$x^4+(p+1)x^3+(1+p+q)x^2+(p+1)x+1=0.$$

Le principe est donc démontré.

192. *Toute équation réciproque de degré pair, manquant du terme du milieu, et dans laquelle les coefficiens des termes également distans des extrêmes sont égaux et de signes contraires, a une racine égale à* $+1$ *et une racine égale à* -1; *son premier membre, divisé par le produit* x^2-1 *des facteurs* $x-1$, $x+1$, *correspondans aux racines* $+1$, -1, *conduit à une équation réciproque de degré pair qui est généralement complète, et dans laquelle les coefficiens des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe.*

En effet, soit l'équation de cette espèce

$$(1)\ldots\quad x^6+px^5+qx^4-qx^2-px-1=0.$$

Chacune des valeurs $x=+1$, $x=-1$, rendant l'équation (1) identique, son premier membre est divisible par le produit x^2-1 des facteurs $x-1$, $x+1$.

Pour faciliter cette division, on met l'équation (1) sous la forme (2)... $(x^6-1)+px(x^4-1)+qx^2(x^2-1)=0$.

Les quotiens des binomes x^6-1, x^4-1, par x^2-1, étant x^4+x^2+1, et x^2+1 (page 125), on trouve que la division

du premier membre de l'équation (2) par $x^2 - 1$ conduit à l'équation réciproque

$$(3)\ldots, x^4 + px^3 + (q+1)x^2 + px + 1 = 0.$$

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

193. Il est facile de conclure des propriétés que nous venons d'établir, que *la résolution d'une équation réciproque se réduit toujours à déterminer les racines d'une équation réciproque de degré pair, dans laquelle les coefficiens des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe.* En effet :

1°. Si *l'équation réciproque proposée est d'un degré impair* $2n+1$, on pourra diviser son premier membre par $x+1$ ou par $x-1$, selon que le dernier terme sera $+1$ ou -1; et le quotient égalé à zéro donnera une équation réciproque du degré pair $2n$, dans laquelle les coefficiens des termes également distans des extrêmes seront égaux et de même signe (n° 191).

2°. Si, *l'équation réciproque proposée étant d'un degré pair* $2n$, les coefficiens des termes également distans des extrêmes ne sont pas égaux et de même signe, il faudra nécessairement que ces coefficiens soient égaux et de signes contraires, et que le terme du milieu (affecté de x^n) n'entre pas dans l'équation, (n° 190, 2°). Dans ce cas, l'équation admettra les racines $+1, -1$, et son premier membre sera divisible exactement par $x^2 - 1$; le quotient égalé à zéro fournira une équation réciproque du degré pair $2n-2$, qui déterminera les $2n-2$ autres racines de l'équation proposée, et dans laquelle les coefficiens des termes également distans des extrêmes seront égaux et de même signe (n° 192).

Le principe énoncé est donc démontré.

194. La recherche des racines d'une équation réciproque quelconque, se trouvant ainsi réduite à la *résolution d'une équation réciproque d'un degré pair* $2n$, *dans laquelle les coefficiens des termes également distans des extrêmes sont égaux et de même signe,* nous allons démontrer qu'*il est toujours possible de faire dépendre la résolution de cette dernière équation de celle d'une équation du* $n^{ième}$ *degré.*

Pour fixer les idées, considérons l'équation

$$(1)\ldots\ x^6+px^5+qx^4+rx^3+qx^2+px+1=0.$$

Cette équation étant réciproque, ses racines sont de la forme $a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{c}$. Ces six valeurs de x ne donnant que trois valeurs correspondantes, $a+\frac{1}{a}, b+\frac{1}{b}, c+\frac{1}{c}$, de la fonction $x+\frac{1}{x}$, on prévoit que si l'on fait (2)... $x+\frac{1}{x}=z$, il sera possible *d'effectuer l'élimination de x, entre* (1) *et* (2), *de manière que l'équation en z ne soit que du troisième degré.* Et en effet, la division du premier membre de l'équation (1), par x^3, conduisant à

$$(3)\ldots\ \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+p\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+q\left(x+\frac{1}{x}\right)+r=0,$$

il suffit, pour éliminer x, d'exprimer les binomes qui entrent dans (3), en fonction de z. Pour y parvenir, on observe que la relation (2) donne $z^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, d'où $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$, $z^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$, d'où $x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$; etc.

Substituant dans (3), on parvient à l'équation demandée

$$(4)\ldots\ z^3+pz^2+(q-3)z+(r-2p)=0.$$

Remarque. L'équation (2) donnant

$$x^2-zx+1=0,\ \text{d'où}\ (5)\ldots\ x=\tfrac{1}{2}(z\pm\sqrt{z^2-4}),$$

chaque valeur de z, tirée de (4) et substituée dans (5), fournira deux racines de l'équation (1) qui seront *réciproques ;* car leur produit devant être égal au dernier terme $+1$ de l'équation $x^2-zx+1=0$, si l'une de ces racines est α, l'autre sera $\frac{1}{\alpha}$.

195. En général, lorsque l'équation réciproque est d'un degré pair, $2m$, en la divisant par x^m, on la ramène à la forme

$$(1)\ldots\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+p\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\ldots+k\left(x+\frac{1}{x}\right)+l=0.$$

Pour résoudre cette dernière, on pose (2).. $x+\frac{1}{x}=z$; la fonction z n'ayant que m valeurs, dépend d'une équation du $m^{ième}$ degré, que l'on obtient en exprimant les binomes qui entrent dans (1), en fonction de z, comme on l'a vu (n° 194).

§ VIII. *Des équations binomes et trinomes.*

196. Les équations qui peuvent se ramener à la forme $y^m \pm b=0$, ont reçu le nom d'*équations binomes*.

Il résulte du principe du (n° 173) que *les équations binomes n'ont pas de racines égales;* car le binome $y^m \pm b$ n'a pas de diviseur commun avec sa dérivée my^{m-1}.

Pour simplifier la *résolution des équations binomes*, on cherche d'abord la *valeur arithmétique* γ de $\sqrt[m]{b}$, (on suppose que b est un nombre positif); on fait $y=\gamma x$; on substitue cette valeur de y dans $y^m \pm b=0$; on remplace b par sa valeur γ^m, et l'on divise les termes de l'équation résultante par γ^m, ce qui conduit à $x^m \pm 1=0$.

Cette dernière équation donnant $x^m=\mp 1$, il s'agit de trouver pour x une expression dont la $m^{ième}$ puissance soit égale à -1 ou à $+1$. Or, suivant qu'une quantité réelle est plus grande ou plus petite que l'unité, sa $m^{ième}$ puissance est aussi plus grande ou plus petite que l'unité (n°66); la $m^{ième}$ puissance de $+1$ est $+1$, et selon que m est un nombre pair $2n$ ou un nombre impair $2n+1$, la $m^{ième}$ puissance de -1 est égale à $+1$ ou à -1, (n°65, 6°). Par conséquent, *la seule racine réelle de l'équation* (1).. $x^{2n+1}=1$ *est* $+1$, *les seules racines réelles de l'équation* (2).. $x^{2n}=1$ *sont* $+1$ *et* -1, *la seule racine réelle de l'équation* (3)... $x^{2n+1}=-1$ *est* -1, *et l'équation* $x^{2n}=-1$ *n'a que des racines imaginaires.*

197. Nous allons faire voir comment on peut *trouver les autres racines des équations*

$$(1)\ldots\ x^{2n+1}-1=0,\quad (2)\ldots\ x^{2n}-1=0,\quad (3)\ldots\ x^{2n+1}+1=0.$$

1°. La seule racine réelle de l'équation (1) étant $+1$, si pour obtenir ses autres racines on égale à zéro le quotient de $x^{2n+1}-1$ par $x-1$, l'équation résultante

$$(4)\ldots x^{2n}+x^{2n-1}+\ldots+x+1=0,$$

n'admettra que des racines imaginaires. Cela est d'ailleurs évident; car l'équation (4) ayant tous ses termes positifs ne saurait avoir de racines réelles positives, et comme ses racines doivent réduire $x^{2n+1}-1$ à zéro, elle ne peut être satisfaite par des valeurs réelles négatives de x.

2°. Les seules racines réelles de l'équation (2) étant $+1$ et -1, si l'on égale à zéro le quotient de $x^{2n}-1$ par le produit x^2-1 des facteurs correspondans $x-1$, $x+1$, l'équation résultante

$$(5)\ldots\ x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^4+x^2+1=0,\ (\textit{page}\ 125),$$

ne devra admettre que des racines imaginaires. Cela est d'ailleurs évident; car le premier membre ne contenant que des puissances paires de x affectées du signe $+$, aucune valeur réelle de x ne saurait le réduire à zéro.

Pour résoudre l'équation (5), on y fait $x^2=z$; elle se réduit à $\quad z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0.$

Cette dernière détermine $n-1$ valeurs de z, et la relation $x=\pm\sqrt{z}$ donne les $2n-2$ racines de l'équation (5).

Le binome $x^{2n}-1$ étant le produit de x^n+1 par x^n-1, les racines de l'équation $x^{2n}-1=0$ peuvent se déduire plus simplement des équations $\quad x^n+1=0,\ x^n-1=0.$

3°. La seule racine réelle de l'équation (3) étant $x=-1$, si l'on égale à zéro le quotient de la division de $x^{2n+1}+1$ par $x+1$, l'équation résultante

$$x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-x^{2n-3}+\ldots+x^2-x+1=0,$$

n'admettra aucune racine réelle. Et en effet, cette équation, qui est *complète*, n'ayant aucune *permanence*, ne peut admettre des racines réelles négatives (n° 140, 2°); et comme ses racines doivent réduire $x^{2n+1}+1$ à zéro, elles ne sauraient être des quantités réelles positives.

Appliquons cette théorie générale à des exemples :

L'équation $x^2-1=0$ donne $x=+1$ et $x=-1$.

Les racines de $x^2+1=0$ sont $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

Les racines de $x^4-1=0$, sont déterminées par les équations $x^2-1=0$, $x^2+1=0$, car x^4-1 est le produit de x^2-1 par x^2+1. Ces racines sont donc ± 1 et $\pm\sqrt{-1}$.

Une des racines de l'équation $x^3-1=0$ étant $+1$, pour déterminer ses deux autres racines α, ζ, on égale à zéro le quotient de x^3-1 par $x-1$; l'équation résultante

$$x^2+x+1=0 \quad \text{donnant} \quad x=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}),$$

on a, $\alpha=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $\zeta=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

On verrait de même que les racines de l'équation $x^3+1=0$, sont -1, $-\alpha$ et $-\zeta$; c'est-à-dire qu'elles sont égales à celles de l'équation $x^3-1=0$, prises avec des signes contraires. Et en effet, quand on change x en $-x$, dans $x^3-1=0$, on obtient l'équation $-x^3-1=0$, qui revient à $x^3+1=0$.

On trouve les racines de $x^6-1=0$, en égalant à zéro les facteurs x^3-1, x^3+1, de x^6-1. De sorte que ces racines sont $+1$, $+\alpha$, $+\zeta$, -1, $-\alpha$ et $-\zeta$.

198. *Les équations binomes* $x^m-1=0$, $x^m+1=0$, *étant réciproques, on peut les résoudre par les méthodes des numéros* 193 *et* 194. On trouve ainsi que les racines de l'équation $x^4+1=0$, sont $\frac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{-2})$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2})$, et que les racines de $x^5-1=0$ sont $+1$,

$$\frac{1}{4}\left\{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\times\sqrt{-1}\right\},$$

$$\frac{1}{4}\left\{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\times\sqrt{-1}\right\}.$$

Pour obtenir les racines de $x^5+1=0$, il suffit de changer les signes des racines de $x^5-1=0$; car lorsqu'on change x en $-x$ dans $x^5-1=0$, on obtient l'équation $-x^5-1=0$, qui revient à $x^5+1=0$.

Enfin, les racines des équations $x^8-1=0$, $x^{10}-1=0$, seront données par les équations

$$x^4-1=0,\quad x^4+1=0,\quad x^5-1=0,\quad x^5+1=0;\ \text{car}$$

$$x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)\ \text{et}\ x^{10}-1=(x^5-1)(x^5+1).$$

199. *Un radical a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son indice.* En effet, si l'on désigne par y la valeur de $\sqrt[m]{p}$, il faudra, d'après la définition de la racine $m^{ième}$ (*page* 2), que la $m^{ième}$ puissance de y reproduise p, c'est-à-dire que $y^m=p$; et comme cette équation du $m^{ième}$ degré admet m valeurs inégales de y (n°s 124 et 196), le principe est démontré.

L'équation $y^m \mp b=0$, donnant $y=\sqrt[m]{\pm b}$, les méthodes exposées dans le n° 198 serviront à calculer les m valeurs de chacun des radicaux $\sqrt[m]{+b}$, $\sqrt[m]{-b}$. Pour trouver ces valeurs, on cherche la valeur arithmétique γ de $\sqrt[m]{b}$, et en multipliant γ par chacune des racines des équations $x^m=+1$, $x^m=-1$, les produits expriment les valeurs des radicaux $\sqrt[m]{+b}$, $\sqrt[m]{-b}$. Lorsque l'indice m est un nombre impair, chacun de ces radicaux a une seule valeur réelle qui est $+\gamma$ ou $-\gamma$; quand m est un nombre pair, $\sqrt[m]{b}$ a les deux valeurs réelles $+\gamma$, $-\gamma$, et les m valeurs de $\sqrt[m]{-b}$ sont imaginaires. Cela résulte de la discussion du n° 196.

L'équation $x^m=1$ donnant $x=\sqrt[m]{1}$, les m racines de cette équation sont ce qu'on nomme les *m racines de l'unité*. Ces racines jouissent de plusieurs propriétés remarquables.

Par exemple, lorsque $m=3$, les trois racines de $x^3-1=0$, sont

$$+1,\quad \alpha=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\quad \mathcal{C}=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}),$$ (*page* 223).

Les deux racines cubiques imaginaires de l'unité sont telles, que leurs diverses puissances reproduisent constamment les trois racines $+1$, α *et* $\mathcal{C}$, *de* $x^3-1=0$. En effet, on a nécessairement.

$$\alpha^3=1,\quad \mathcal{C}^3=1,\quad \text{et } 1\times\alpha\times\mathcal{C}=1 \text{ (n° 125)};\quad \text{donc } \alpha^3=\mathcal{C}^3=1\times\alpha\times\mathcal{C};\quad \text{d'où } \alpha^3=\mathcal{C}\quad \text{et}\quad \mathcal{C}^2=\alpha.$$

D'ailleurs, si n désigne un nombre entier positif quelconque, les diverses puissances des racines α, $\mathcal{C}$, sont

$$\alpha^{3n}=1,\quad \alpha^{3n+1}=\alpha^{3n}\times\alpha=\alpha;\quad \alpha^{3n+2}=\alpha^{3n}\times\alpha^2=\alpha^2,$$
$$\mathcal{C}^{3n}=1,\quad \mathcal{C}^{3n+1}=\mathcal{C}^{3n}\times\mathcal{C}=\mathcal{C},\quad \mathcal{C}^{3n+2}=\mathcal{C}^{3n}\times\mathcal{C}^2=\mathcal{C}^2.$$

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

On peut encore observer que la somme des trois racines de l'équation $x^3-1=0$, étant égale à zéro (n° 125), on a $1+\alpha+\alpha^2=0$ et $1+\mathcal{C}+\mathcal{C}^2=0$.

200. *La règle du n° 82 conduirait aux n valeurs de la racine* $n^{ième}$ *d'un polynome* P ; car la racine $n^{ième}$ du premier terme de P ayant n valeurs, chacune d'elles exprime le premier terme d'une des n racines du polynome proposé, et la division fournit les autres termes de chaque racine. Mais, on parvient plus simplement aux mêmes résultats en multipliant la *valeur arithmétique* de $\sqrt[n]{\text{P}}$, par chacune des n valeurs de $\sqrt[n]{1}$.

201. *Les règles qui ont été données dans le* n° 74, *pour opérer sur les valeurs arithmétiques des radicaux, n'étant pas toujours applicables aux valeurs algébriques de ces radicaux* (n° 78), *on pourra lever toutes les difficultés relatives au calcul des radicaux algébriques, en opérant successivement sur chacune des valeurs de ces radicaux.*

Exemple. *Calculer le produit de* $\sqrt[3]{8}$ *par* $\sqrt[6]{729}$.

Les valeurs arithmétiques de ces radicaux étant $+2$ et $+3$,

on a, $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[6]{729}=2\sqrt[3]{1}\times 3\sqrt[6]{1}=6\sqrt[3]{1}\times\sqrt[6]{1}$.

La question est donc réduite à former le produit de $\sqrt[3]{1}$ par $\sqrt[6]{1}$. On multiplie successivement chacune des valeurs $+1, \alpha, \alpha^2$, de $\sqrt[3]{1}$, par chacune des valeurs $\pm 1, \pm\alpha, \pm\alpha^2$, de $\sqrt[6]{1}$; et, en ayant égard aux relations $\alpha^3=1$, $\alpha^4=\alpha$, on verra que le produit de $\sqrt[3]{1}$ par $\sqrt[6]{1}$, n'a que les six valeurs différentes $\pm 1, \pm\alpha, \pm\alpha^2$; l'expression générale du produit de $\sqrt[3]{1}$ par $\sqrt[6]{1}$, est donc $\sqrt[6]{1}$. La règle du n° 74 (6°) conduirait au même résultat.

202. La résolution des équations binomes donne le moyen de *calculer les racines des* ÉQUATIONS TRINOMES *de la forme*

$$(1)\ldots x^{2m}+2px^m+q=0;$$

car en faisant $x^m=y$, l'équation (1) devient

$$y^2+2py+q=0, \quad \text{d'où} \quad y=-p\pm\sqrt{p^2-q};$$

et, en désignant ces valeurs de y par a et b, la question est réduite à résoudre les équations binomes

$$(2)\ldots x^m=a,\ x^m=b.$$

REMARQUE. *L'équation* (1) *n'admet jamais plus de quatre racines réelles*; car lorsque a et b sont réels, chaque équation binome ne peut donner plus de deux valeurs réelles de x, (n° 196); et quand les racines, a, b, sont imaginaires, aucune valeur réelle de x ne saurait satisfaire aux équations (2).

203. *Lorsqu'un polynome entier*

$$(1)\ldots \pm Ax^n\pm bx^{n+1}\pm cx^{n+2}\pm\ldots\pm px^{n+m},$$

est ordonné suivant les puissances croissantes de l'indéterminée x, si tous les coefficiens A, b, c, ..., p, *sont des nombres positifs et finis, on pourra toujours déterminer une*

valeur finie de x, moindre que l'unité, qui rende la valeur absolue du premier terme plus grande que la valeur absolue de la somme de tous les autres termes, et qui soit telle en outre que toute valeur de x plus petite, jouisse de la même propriété.

Il s'agit de satisfaire à la condition

$$Ax^n > \pm bx^{n+1} \pm cx^{n+2} \pm \ldots \pm px^{n+m}.$$

Si l'on divise les deux membres par x^n, et si l'on observe qu'on n'a égard qu'aux valeurs absolues de ces deux membres, la question sera réduite à satisfaire à l'inégalité

$$A > \pm bx \pm cx^2 \pm \ldots \pm px^m.$$

Or, en désignant par C le plus grand de tous les coefficiens, b, c, ..., p, on aura évidemment

$$Cx + Cx^2 + \ldots + Cx^m > \pm bx \pm cx^2 \pm \ldots \pm px^m.$$

Il suffit donc de satisfaire à l'inégalité

$$A > Cx + Cx^2 + \ldots + Cx^{m-1} + Cx^m,$$

qui revient à

$$A > Cx(1 + x + \ldots + x^{m-2} + x^{m-1}), \text{ ou à}$$

$$A > Cx\left(\frac{x^m - 1}{x - 1}\right), \text{ (page 125), ou à (2)... } A > \frac{Cx(1 - x^m)}{1 - x}.$$

Mais, x étant supposé moindre que l'unité, on satisfera à cette dernière inégalité en prenant

$$A = \frac{Cx}{1-x} \text{ ou } A > \frac{Cx}{1-x};$$

ce qui donne $x = \frac{A}{A+C}$ ou $x < \frac{A}{A+C}$.

La valeur de x qui jouit de la propriété demandée est donc égale à une fraction dont le numérateur est la valeur absolue A du coefficient du premier terme du polynome donné, et dont le dénominateur est ce même coefficient augmenté de la valeur absolue C du plus grand de tous les coefficiens des autres termes du polynome (1).

1re Remarque. *On parvient au même résultat, lorsque le polynome* (1) *se prolonge à l'infini ;* car m devenant infini, et x étant supposé moindre que l'unité, il résulte de ce qu'on a vu (n° 110) que l'inégalité (2) se réduit à

$$A > \frac{Cx}{1-x}, \quad \text{d'où} \quad x < \frac{A}{A+C}.$$

§ 9e. *Théorème de M. Sturm.*

204. Lorsque toutes les racines d'une équation (numérique et rationnelle) à une seule inconnue (1)... $f(x)=0$, sont inégales, le *théorème de* M. Sturm fournit le moyen de *déterminer avec certitude le nombre des racines réelles de l'équation* (1) *comprises entre deux nombres donnés* A, A' ; à cet effet, on prend la *dérivée* $f'(x)$ du polynome entier $f(x)$, (n° 154) ; et l'on opère sur ces deux polynomes, comme s'il s'agissait de trouver leur plus grand commun diviseur (n° 152, 1°), avec cette seule différence qu'on change le signe de chaque reste (*moindre* que le diviseur) avant de l'employer comme diviseur, ce qui ne change pas le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$. Ainsi, on ordonne $f(x)$ et $f'(x)$ par rapport aux puissances décroissantes de x ; on divise $f(x)$ par $f'(x)$, ce qui donne un quotient Q_1 et un reste $-X_2$ *moindre* que le diviseur. On change les signes de tous les termes de $-X_2$, et l'on divise $f'(x)$ par $+X_2$, ce qui donne un quotient Q_2 et un reste $-X_3$ *moindre* que le diviseur X_2. En continuant ces calculs, on parviendra nécessairement à un reste $-X_k$ indépendant de x. On écrira sur une même ligne, les fonctions

$$(2)\ldots f(x),\ f'(x),\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ldots,X_{k-1},\ X_k.$$

On fera $x=A$ dans ces fonctions; chacune d'elles se réduira à un nombre ou à zéro ; on déterminera le nombre total V des variations que présentent les signes de ces résultats numériques, en faisant abstraction des fonctions qui deviennent nulles pour $x=A$. On déterminera de même le nombre V' des variations que présente la suite (2) lorsqu'on

y fait $x = A'$ (*). Si la *valeur relative* de A est moindre que celle de A', *les nombres* A, A', *comprendront* V — V' *racines réelles de l'équation* (1).

205. La démonstration de ce théorème important repose sur les principes suivans :

1°. *Le reste* $-X_k$ *indépendant de* x *n'est jamais nul ;* car s'il était nul, le reste $-X_{k-1}$ précédent, serait une fonction de x qui diviserait $f(x)$ et $f'(x)$, (n° 152, 1°) ; l'équation (1)... $f(x) = 0$ aurait donc des racines égales (n° 173) ; ce qui est contre l'hypothèse. Le reste $-X_k$ sera donc toujours un nombre positif ou négatif qui conservera constamment le même signe, quelle que soit la valeur que l'on donne à x, dans la suite (2)... $f(x)$, $f'(x)$, X_2, X_3, X_4, ..., X_{k-1}, X_k.

2°. *Une même valeur de* x *ne peut jamais réduire simultanément à zéro deux fonctions consécutives de la suite* (2). En effet, il résulte de la 1re remarque du n° 18 (*page* 19), que les divisions indiquées (n° 204) conduisent aux relations

$$f(x) = Q_1 f'(x) - X_2, \quad f'(x) = Q_2 X_2 - X_3, \quad X_2 = Q_3 X_3 - X_4, \ldots$$

D'après ces relations, si une valeur $x = \alpha$ réduisait à zéro deux fonctions consécutives de la suite (2), telles que X_2 et X_3 par exemple, toutes les autres fonctions deviendraient nulles en même temps ; la fonction primitive $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$, admettraient donc un commun diviseur $x - \alpha$ (n° 123) ; l'équation (1)... $f(x) = 0$, aurait donc des racines égales (n° 173) ; ce qui est contre l'hypothèse. La propriété énoncée (2°) est donc démontrée.

3°. *Lorsqu'en donnant à* x *des valeurs arbitraires comprises entre deux nombres donnés* P, Q, *une fonction* X_p *de la*

(*) Lorsque nous dirons que pour une valeur α de x, *la suite* (2) *présente* V' *variations*, nous entendrons toujours qu'après avoir fait $x = \alpha$ dans les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $X_2, X_3, \ldots, X_{k-1}$, ce qui réduit chaque fonction à un nombre (positif ou négatif) ou à zéro, les signes de ces nombres, écrits par ordre, présentent V' variations, abstraction faite des fonctions qui deviennent nulles.

suite (2) *ne peut pas devenir nulle, ces valeurs de x substituées dans cette fonction et dans les fonctions suivantes* X_{p+1}, $X_{p+2}, \ldots, X_k$, *fournissent des résultats numériques dont les signes présentent constamment le même nombre de variations.* En effet, si P étant moindre que Q, on conçoit que x augmente d'une manière continue depuis P jusqu'à Q, la fonction X_p ne changera pas de signe (n° 136, 2°). Si l'une des fonctions suivantes, telle que X_n, change de signe, il existera nécessairement une valeur α de x, comprise entre P et Q, qui réduira X_n à zéro (n° 135). Or, d'après les relations indiquées (2°), on a

$$X_{n-1} = Q_n X_n - X_{n+1}.$$

Cette égalité démontre que, pour la valeur $x = \alpha$, qui réduit X_n à zéro, les fonctions X_{n-1}, X_{n+1}, prennent des valeurs numériques égales et de signes contraires. D'ailleurs, α étant une racine de $X_n = 0$, il suit de (2°) que $x = \alpha$ ne saurait réduire à zéro aucune des fonctions X_{n-1}, X_{n+1}. On pourra donc prendre h assez petit, pour que $\alpha - h$ et $\alpha + h$ ne comprennent aucune racine des équations $X_{n-1} = 0$, $X_{n+1} = 0$; de sorte que x croissant depuis $\alpha - h$ jusqu'à $\alpha + h$, les fonctions X_{n-1}, X_{n+1}, ne changeront pas de signes; or ces fonctions prennent des valeurs de signes contraires pour $x = \alpha$; elles resteront donc constamment de signes contraires, lorsque x croîtra d'une manière continue depuis $\alpha - h$ jusqu'à $\alpha + h$; et par conséquent, pour toutes ces valeurs de x, les trois fonctions consécutives, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, prendront des valeurs numériques qui présenteront constamment une variation, quel que soit le signe de X_n. *Le changement de signe de l'une quelconque des fonctions qui suivent* X_p, *ne change donc pas le nombre total des variations que présentent les valeurs des fonctions* X_p, X_{p+1}, $X_{p+2}, \ldots, X_{k-1}$, X_k. Ce qui démontre la propriété énoncée (3°).

Remarque. Toute valeur de x qui réduit à zéro une des fonctions de la suite (2), comprise entre $f(x)$ et X_k, jouissant de la propriété de fournir des résultats de signes contraires, quand on la substitue successivement dans la fonction

précédente et dans la suivante, *on ne change pas le nombre total des variations des valeurs correspondantes des fonctions de la suite* (2), *en faisant abstraction des fonctions qui deviennent nulles.*

4°. *Si l'on désigne par* α *une racine quelconque de l'équation* (1)... $f(x)=0$, *on pourra toujours assigner à l'indéterminée* h *une valeur finie assez petite pour qu'en faisant* $x=\alpha-h$, *dans* $f(x)$ *et* $f'(x)$, *les résultats* $f(\alpha-h)$, $f'(\alpha-h)$, *soient de signes contraires; et pour qu'en faisant* $x=\alpha+h$ *dans ces mêmes fonctions, les résultats* $f(\alpha+h)$, $f'(\alpha+h)$, *soient de même signe.* En effet, on a vu (n° 157) que lorsqu'on change x en $x+h$ dans le polynome entier $f(x)$, le résultat est

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\tfrac{1}{2}h^2f''(x)+\text{etc.}$$

Or, $x=\alpha$ réduit $f(x)$ à zéro; on a donc

$$f(\alpha+h)=+hf'(\alpha)+\tfrac{1}{2}h^2f''(\alpha)+\text{etc.}; \text{ d'où}$$
$$f(\alpha-h)=-hf'(\alpha)+\tfrac{1}{2}h^2f''(\alpha)-\text{etc.}$$

Les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, ..., étant *entières*, ne peuvent devenir infinies lorsqu'on y fait $x=\alpha$. Tous les coefficiens des diverses puissances de h, dans les développemens des fonctions $f(\alpha+h)$, $f(\alpha-h)$, sont donc des nombres finis; on pourra donc donner à l'indéterminée h une valeur finie assez petite pour que la valeur absolue du premier terme de chaque développement soit plus grande que la valeur absolue de la somme de tous les autres termes, et pour qu'il en soit de même de toutes les valeurs plus petites de h (n° 203); de sorte que le signe de chaque développement sera le même que celui du premier terme. On voit donc (d'après les développemens ci-dessus) que $f(\alpha+h)$ aura le même signe que $f'(\alpha)$, tandis que $f(\alpha-h)$ et $f'(\alpha)$ seront de signes contraires. Or, l'équation $f(x)=0$ n'ayant pas de racines égales, la valeur $x=\alpha$ qui réduit $f(x)$ à zéro, ne saurait réduire $f'(x)$ à zéro. On peut donc prendre h assez petit pour que $\alpha-h$ et $\alpha+h$ ne comprennent aucune racine de $f'(x)=0$; et par suite, les trois nombres $f'(\alpha-h)$, $f'(\alpha)$, $f'(\alpha+h)$, seront

de même signe. Il est facile d'en conclure que les deux nombres $f(\alpha - h), f'(\alpha - h)$, sont de signes contraires, et que les deux nombres $f(\alpha + h), f'(\alpha + h)$, sont de même signe. Par exemple, si $f'(\alpha)$ est positif, il suit de ce qui vient d'être démontré, que les nombres $f'(\alpha - h), f'(\alpha + h), f(\alpha + h)$, seront positifs, tandis que $f(\alpha - h)$ sera négatif. Ce qui démontre le principe énoncé (4°).

REMARQUE. Si α est une racine quelconque de l'équation (1)... $f(x) = 0$, on pourra toujours prendre h assez petit, pour qu'en donnant à x des valeurs quelconques, comprises entre $\alpha - h$ et α, les valeurs correspondantes de $f(x)$ et $f'(x)$ présentent constamment une variation, et pour qu'en donnant à x des valeurs arbitraires comprises entre α et $\alpha + h$, les valeurs correspondantes des fonctions, $f(x)$, $f'(x)$, présentent constamment une permanence.

5° *Lorsque deux nombres*, P, Q, *ne comprennent aucune racine de l'équation* (1)... $f(x) = 0$, *si l'on fait successivement* $x = P$ *et* $x = Q$, *dans les fonctions de la suite* (2), *les résultats de ces substitutions présenteront, dans les deux cas, le même nombre de variations.* En effet, soit $P < Q$, et concevons que x augmente d'une manière continue depuis P jusqu'à Q; ces valeurs de x ne pouvant pas réduire $f(x)$ à zéro, il résulte de (3°) que les valeurs correspondantes des fonctions

$$(2)\ldots f(x), f'(x), X_2, X_3, \ldots, X_{k-1}, X_k,$$

présenteront constamment le même nombre de variations.

6°. *Lorsque deux nombres*, P, Q, *comprennent une seule racine* α *de l'équation* (1)... $f(x) = 0$, *si l'on suppose* $P < Q$, *et si l'on fait successivement* $x = P$, $x = Q$, *les valeurs numériques correspondantes des fonctions de la suite* (2) *présenteront une variation de moins pour* $x = Q$ *que pour* $x = P$. En effet, supposons que pour $x = P$, les valeurs numériques correspondantes des fonctions de la suite (2) présentent V variations; si x augmente d'une manière continue, à partir de P, tant que x sera moindre que α, la fonction $f(x)$ restera de même signe, et ne deviendra pas nulle; les valeurs numé-

rigues que prendront les fonctions de la suite (2), présenteront donc constamment V variations (3°). Or, il résulte de (4°) qu'on pourra toujours prendre h assez petit, pour qu'en faisant $x = \alpha - h$ dans $f(x)$ et $f'(x)$, les résultats $f(\alpha - h)$, $f'(\alpha - h)$, soient de signes contraires, et pour qu'en faisant $x = \alpha + h$, dans les mêmes fonctions, les résultats $f(\alpha + h)$, $f'(\alpha + h)$ soient de même signe. Les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, prenant des valeurs de signes contraires pour $x = \alpha - h$, et les valeurs correspondantes des fonctions de la suite (2) présentant V variations, les valeurs des fonctions de la suite

$$(3) \ldots f'(x), X_2, X_3, \ldots, X_{k-1}, X_k,$$

ne présentent que V — 1 variations. Or, la valeur $x = \alpha$, qui réduit $f(x)$ à zéro, ne pouvant pas réduire $f'(x)$ à zéro, on peut toujours prendre h assez petit pour que $\alpha - h$ et $\alpha + h$ ne comprennent aucune racine de $f'(x) = 0$. Par conséquent, si x croît d'une manière continue depuis $\alpha - h$ jusqu'à $\alpha + h$, la fonction $f'(x)$ restera de même signe et ne deviendra pas nulle; les valeurs correspondantes des fonctions de la suite (3) présenteront donc constamment V — 1 variations (3°); mais pour $x = \alpha + h$, les valeurs des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, sont de même signe; les valeurs des fonctions de la suite (2) ne présenteront donc que V — 1 variations, lorsqu'on y fera $x = \alpha + h$. D'ailleurs, $\alpha + h$ et Q ne comprenant aucune racine de $f(x) = 0$, il résulte de (5°) que si x augmente d'une manière continue depuis $\alpha + h$ jusqu'à Q, les valeurs correspondantes des fonctions de la suite (2) présenteront constamment le même nombre V — 1 de variations. Par conséquent, les fonctions de la suite (2), qui présentaient V variations pour $x = P$, ne présentent plus que V — 1 variations pour $x = Q$. Ce qui démontre la propriété énoncée (6°).

Remarque. On voit que les nombres P, Q, ne comprenant qu'une seule racine α de l'équation (1)... $f(x) = 0$, si x augmente d'une manière continue depuis P jusqu'à $\alpha - h$, la fonction $f(x)$ ne deviendra pas zéro et restera de même signe; la suite (2) présentera constamment V variations,

quelque petit que soit h (*). Lorsqu'on fera $x = a - h$, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, seront de signes contraires, les fonctions (3) présenteront V — 1 variations. Si x continue à croître, depuis $a - h$ jusqu'à $a + h$, la fonction $f(x)$ changera de signe en passant par zéro, $f'(x)$ ne changera pas de signe et ne se réduira pas à zéro, les fonctions (3) présenteront constamment V — 1 variations; les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, qui présentaient une variation pour $x = a - h$, présenteront une permanence pour $x = a + h$; de sorte que la suite (2) ne donnera plus que V — 1 variations, lorsqu'on fera $x = a + h$. *La variation que perd la suite* (2)*; quand on dépasse une racine* a*, est donc due à ce que* $f(x)$ *change de signe, tandis que la dérivée* $f'(x)$ *reste de même signe.* Enfin, x croissant depuis $a + h$, jusqu'à Q, la fonction $f(x)$ ne devient pas nulle et reste de même signe; des fonctions de la suite (3) peuvent changer de signe et devenir nulles; mais le nombre total des variations de la suite (2) reste constamment égal à V — 1, tant que les valeurs de x ne dépassent pas une nouvelle racine de $f(x) = 0$.

206. Nous allons faire voir que le *théorème de M. Sturm* se déduit rigoureusement de la remarque précédente et des principes du n° 205. Supposons que pour la valeur numérique $x = A$, la suite

$$(2)\ldots \quad f(x),\ f'(x),\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_{k-1},\ X_k,$$

présente V variations; désignons par a, b, c, d, ..., les N racines réelles de l'équation (1)... $f(x) = 0$, comprises entre A et A', classées suivant leurs grandeurs relatives, en commençant par la plus petite; et concevons que x augmente d'une manière continue depuis A jusqu'à A'. Il s'agit de faire voir

(*) Nous désignerons toujours par h une quantité positive assez petite, pour que dans le développement $hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a) + \text{etc.}$, de $f(a + h)$, la valeur absolue du 1er terme $hf'(a)$ soit plus grande que la valeur absolue de la somme de tous les autres termes, et pour que les nombres $a - h$, $a + h$, ne comprennent aucune racine de l'équation dérivée $f'(x) = 0$.

que si l'on fait $x = A'$ *dans la suite* (2), *les résultats ne présenteront plus que* $V - N$ *variations.*

Les racines, a, b, c, d, ..., étant inégales, on pourra toujours prendre deux nombres qui comprennent une seule de ces racines. Soient donc,

$$p > a,\ p < b,\ q > b,\ q < c,\ r > c,\ r < d, \ldots$$

Les nombres, A, a, p, b, q, c, r, d, ..., A', formeront une suite croissante. Les nombres, A, p, ne comprenant que la 1re racine a de $f(x) = 0$, et pour $x = A$ la suite (2) présentant V variations, il résulte du principe établi (n° 205, 6°), qu'en faisant $x = p$, la suite (2) ne présentera plus que V — 1 variations. De même, les nombres, p, q, ne comprenant que la 2e racine b de l'équation (1), et pour $x = p$ la suite (2) ayant donné V — 1 variations, il résulte du principe énoncé (n° 205, 6°), que pour $x = q$ la suite (2) ne présentera plus que V — 2 variations. Par une raison semblable, q et r ne comprenant que la 3e racine c de l'équation (1), la suite (2) qui présentait V — 2 variations pour $x = q$, ne présentera plus que V — 3 variations pour $x = r$; et ainsi de suite. On en déduit le *théorème* énoncé (n° 204).

207. Pour *faire apercevoir comment* x *croissant d'une manière continue depuis* A *jusqu'à* A', *les valeurs numériques correspondantes que prennent les fonctions de la suite*

$$(2) \ldots f(x),\ f'(x),\ X_2,\ X_3,\ X_4, \ldots, X_{k-1},\ X_k,$$

présentent successivement une variation de moins, chaque fois qu'on dépasse une des racines, a, b, c, d, ..., *de l'équation* (1) ... $f(x) = 0$, *comprises entre* A *et* A', nous observerons que d'après la remarque du n° 205 (*page* 233), si h désignant une quantité suffisamment petite, x augmente depuis A jusqu'à $a - h$ (on suppose toujours $b > a$, $c > b$, ...), la fonction $f(x)$ ne deviendra pas zéro et restera de même signe, les valeurs correspondantes des fonctions de la suite (2) présenteront constamment V variations, quelque petit que soit h; les fonctions $f'(x)$, X_2, X_3, ..., X_{k-1}, pourront changer de

signe et passer par zéro. Quand on fera $x = a - h$, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, seront de signes contraires, les fonctions

$$(3)\ldots \quad f'(x),\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ldots,\ X_{k-1},\ X_k,$$

présenteront V—1 variations. Supposons, afin de fixer les idées, que $x = A$ rende $f(x)$ positif; $f(a-h)$ sera aussi positif, et $f'(a-h)$ sera négatif. Si x augmente depuis $a-h$ jusqu'à $a+h$, la fonction $f(x)$ passera par zéro et deviendra négative; $f'(x)$ restera négatif et ne deviendra pas nul; les fonctions (3) présenteront constamment V — 1 variations; $f(x)$ et $f'(x)$, qui présentaient une variation pour $x = a-h$, présenteront une permanence pour $x = a+h$, et la suite (2) n'offrira plus que V — 1 variations pour $x = a+h$. De sorte que x dépassant la 1re racine a, la suite (2) perd une première variation.

Par des raisons semblables, si x augmente entre les deux premières racines, a, b, depuis $a+h$ jusqu'à $b-h$, la fonction $f(x)$ ne deviendra pas zéro et restera négative; la dérivée $f'(x)$ changera de signe, en passant par zéro, et deviendra positive; de sorte qu'il se rétablira une variation pour $f(x)$ et $f'(x)$; les fonctions de la suite (2) présenteront constamment V — 1 variations, et pour $x = b-h$ la suite (3) offrira V — 2 variations. Si x augmente depuis $b-h$ jusqu'à $b+h$, la fonction $f(x)$ passera par zéro et changera de signe; elle reprendra donc le signe + qu'elle avait pour $x = a-h$; et comme les nombres $f(b+h)$, $f'(b+h)$, sont de même signe, la fonction $f'(x)$ restera positive depuis $x = b-h$ jusqu'à $x = b+h$; les fonctions (3) présenteront constamment V — 2 variations; et quand $x = b+h$, les fonctions (2) ne présenteront plus que V — 2 variations. De sorte que x dépassant la 2e racine b, la suite (2) perd une seconde variation. Et ainsi de suite.

208. Les propriétés précédentes ne dépendant que des signes que prennent les fonctions de la suite (2), quand on y donne des valeurs numériques particulières à x, et ces signes ne pouvant pas changer quand on multiplie ou quand on divise

ces fonctions par des nombres positifs, *on pourra simplifier les calculs indiqués* (*page* 228), *en évitant les coefficiens numériques fractionnaires, et en divisant chaque fonction par le plus grand commun diviseur numérique commun à tous ses termes*. A cet effet, on fera d'abord disparaître tous les dénominateurs contenus dans l'équation proposée, et l'on divisera tous les termes du résultat par leur plus grand commun diviseur numérique, ce qui conduira à une équation $f(x)=0$, de la forme $px^m + qx^{m-1} + \text{etc.} = 0$. La dérivée de $f(x)$ sera aussi un polynome entier; on divisera ses coefficiens numériques par leur plus grand commun diviseur, ce qui donnera pour quotient un polynome entier que nous désignerons par $f'(x)$. On opérera sur $f(x)$ et $f'(x)$ par la méthode indiquée (*page* 228), avec cette seule différence, que si le coefficient du 1er terme d'un dividende partiel n'est pas divisible par le coefficient α du 1er terme du diviseur, on évitera les quotiens fractionnaires en multipliant ce dividende par le plus petit nombre positif divisible par α (n° 152, 1°); et l'on divisera tous les termes de chaque reste par leur plus grand commun diviseur numérique. Nous désignerons toujours par $-X_2$, $-X_3$, $-X_4$, ..., $-X_{k-1}$, les restes ainsi simplifiés.

209. Lorsqu'en cherchant combien deux nombres A, A', comprennent de racines réelles de l'équation (1), on parvient à une fonction X_n de la suite (2) qui ne peut être réduite à zéro par aucune valeur réelle de x comprise entre A et A', on peut faire abstraction des fonctions qui suivent X_n; car il résulte du principe établi (n° 205, 3°), que pour chacune des valeurs $x=A$, $x=A'$, les fonctions X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, ..., X_k, présentent le même nombre de variations. Par conséquent, *toutes les fois que dans le calcul des fonctions de la suite* (2), *on parviendra à une fonction* X_n *telle que l'équation* $X_n = 0$, *n'aura aucune racine réelle, il sera inutile de calculer les fonctions suivantes*.

210. Pour *déterminer le nombre des racines réelles de l'équation* (1)... $f(x)=0$, *dont toutes les racines sont inégales*, il suffit de faire usage du principe du n° 204, en prenant pour

A et A′ deux nombres qui comprennent nécessairement toutes les racines réelles de l'équation (1).

On pourrait prendre pour A et A′ les limites supérieures des racines positives et négatives de l'équation (1). Mais on simplifie les calculs en observant que toutes les racines réelles étant nécessairement comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, il suffit de faire successivement $x = -\infty$, $x = +\infty$, dans la suite

$$(2)\ldots\quad f(x),\ f'(x),\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots,\ X_{k-1},\ X_k.$$

Or, on déduit du principe du n° 130 que pour les valeurs infinies de x, le signe de chaque fonction de la suite (2) est le même que celui du premier terme ; il suffira donc de faire successivement $x = -\infty$, $x = +\infty$, dans le premier terme de chacune de ces fonctions, et de prendre le signe du résultat. Si, en opérant de cette manière, on trouve que $x = -\infty$ donne V variations, et que $x = +\infty$ donne V′ variations, il résulte du principe du n° 204, que l'équation (1) aura nécessairement V—V′ racines réelles.

Pour *déterminer le nombre des racines négatives et celui des racines positives*, on fera $x = 0$, dans les fonctions de la suite (2), ce qui réduira chaque fonction au terme indépendant de x ; s'il en résulte v variations, l'équation (1) aura $V - v$ racines négatives et $v - V'$ racines positives.

Exemple. *Soit*, $f(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 15x - 6$.

On aura, $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 2x + 15$.

On trouvera, $X_2 = 83x^2 - 170x + 21$,

$$X_3 = 73x - 72,\quad X_4 = +351339.$$

On fera successivement, $x = -\infty$, $x = 0$ et $x = +\infty$, dans les expressions des fonctions,

$$(2)\ldots\quad f(x),\ f'(x),\ X_2,\ X_3,\ X_4;$$

et en plaçant les signes des résultats sous les fonctions correspondantes, on verra que,

$x = -\infty$ donne, $+\quad -\quad +\quad -\quad +$; 4 *variations*,
$x = 0$ donne, $-\quad +\quad +\quad -\quad +$; 3 *variations*,
$x = +\infty$ donne, $+\quad +\quad +\quad +\quad +$; 0 *variations*.

Donc, $V = 4$, $v = 3$, $V' = 0$; d'où $V - v = 1$, $v - V' = 3$.

L'équation $f(x) = 0$ a donc une racine négative et trois racines positives ; toutes ses racines sont donc réelles.

211. Lorsque les plus forts exposans de x dans les fonctions de la suite (2) diminuent successivement d'une seule unité, en passant d'une fonction à la suivante, les degrés respectifs des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, X_2, X_3, X_4, ..., sont m, $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$, ... ; l'avant-dernière fonction est du 1er degré en x, et la dernière fonction X_k est indépendante de x ; le nombre des fonctions de la suite (2) est $m+1$. Dans ce cas, *si pour la valeur* $x = -\infty$, *les signes des valeurs des* $m+1$ *fonctions de la suite* (2) *présentent* P *permanences, l'équation* (1) *aura nécessairement* 2P *racines imaginaires.* En effet, pour $x = \pm\infty$, le signe que prend chaque fonction est le même que celui du premier de cette fonction ; or, en faisant $x = -\infty$, les $m+1$ fonctions de la suite (2) présentent P permanences, elles présenteront donc $m - P$ variations ; d'ailleurs, lorsqu'au lieu de faire $x = -\infty$, on fait $x = +\infty$, les premiers termes des fonctions (2) changent de signes de deux en deux ; ces fonctions changent donc de signes de deux en deux ; il suit de là que les P permanences que présentaient les signes des valeurs des fonctions de la suite (2), se changent en P variations, et que les $m - P$ variations deviennent $m - P$ permanences. Par conséquent, pour $x = -\infty$, la suite (2) présente $m - P$ variations, et pour $x = +\infty$, cette suite présente P variations. Le nombre des racines réelles de l'équation (1) est donc $(m - P) - P = m - 2P$; elle a donc $2P$ racines imaginaires.

Dans l'exemple du n° 210, la valeur $x = -\infty$ n'ayant donné aucune permanence dans la suite (2), on a $P = 0$; l'équation $f(x) = 0$ n'avait donc aucune racine imaginaire.

212. *Lorsque l'équation* $f(x) = 0$ *a* N *racines réelles, l'équation dérivée* $f'(x) = 0$ *a au moins* $N - 1$ *racines réelles.* En effet, soient, a, b, c, ..., les N racines réelles de $f(x) = 0$, classées suivant leurs grandeurs relatives, à commen-

cer par la plus petite; il résulte de ce qui a été démontré (n° 207), que l'on peut toujours prendre h assez petit pour que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, soient de signes contraires lorsqu'on donne à x l'une quelconque des valeurs $a-h$, $b-h$, $c-h$, etc. Or, les nombres $a-h$, $b-h$, ne comprenant que la seule racine a de $f(x)=0$, la fonction $f(x)$ change une seule fois de signe, lorsque x augmente depuis $a-h$ jusqu'à $b-h$; il faut donc que $f'(x)$ change aussi de signe depuis $x=a-h$ jusqu'à $x=b-h$. L'équation *dérivée* $f'(x)=0$ a donc au moins une racine réelle comprise entre $a-h$ et $b-h$. On prouverait de même que $f'(x)=0$ a au moins une racine réelle comprise entre $b-h$ et $c-h$; et ainsi suite. On en déduit la propriété énoncée.

Si l'on applique cette propriété aux dérivées successives $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., de $f'(x)$, on en conclura que l'équation $f''(x)=0$ a au moins N—2 racines réelles; que l'équation $f'''(x)=0$ a au moins N—3 racines réelles; et ainsi de suite.

D'après cette propriété, *si toutes les racines de l'équation* $f(x)=0$ *sont réelles, il en sera de même des racines de chacune des dérivées* $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, $f'''(x)=0$, etc.

Par conséquent, si l'une des équations dérivées a des racines imaginaires, l'équation primitive aura nécessairement des racines imaginaires.

213. Le *théorème de M. Sturm* fournit le moyen de *calculer avec certitude des valeurs aussi approchées qu'on voudra des racines réelles incommensurables d'une équation numérique, sans avoir recours à l'équation aux différences.* On cherche d'abord toutes les racines réelles commensurables de l'équation proposée, et l'on divise le premier membre par le produit des facteurs correspondans; cela conduit à une équation (1)... $f(x)=0$ qui n'a plus que des racines réelles incommensurables, et des racines imaginaires (n° 168).

Pour *calculer les racines réelles incommensurables de l'équation* (1), on détermine les fonctions

$$(2)\ldots\ f(x),\ f'(x),\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_{k-1},\ X_k,$$

par la méthode du n° 204, en effectuant les simplifications in-

diquées (n° 208), ce qui conduit à un reste indépendant de x. Ce reste pouvant être numérique ou identiquement nul, nous allons discuter successivement ces deux cas :

1er Cas. Lorsque le reste indépendant de x est un nombre $-X_1$, il n'existe pas de commun diviseur, fonction de x, entre $f(x)$ et $f'(x)$, (n°152, 1°) ; l'équation (1) n'a donc pas de racines égales (n° 173).

Pour calculer les racines réelles incommensurables de $f(x)=0$, avec une approximation donnée, on détermine d'abord combien cette équation admet de racines réelles positives. A cet effet, on fait successivement $x=0$ et $x=\infty$ dans les fonctions (2) ; on écrit les signes des résultats, en faisant abstraction des fonctions qui se réduisent à zéro pour $x=0$, et en observant que pour $x=\infty$ le signe de chaque fonction est le même que celui de son premier terme. Si $x=0$ ayant donné v variations, $x=+\infty$ a donné V' variations, l'équation (1) aura $v-V'$ racines réelles positives (n° 210).

Pour déterminer les plus petites valeurs entières approchées de ces racines, on donnera successivement à x, dans les fonctions (2), les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à ce qu'on parvienne à une valeur de x dont la substitution dans (2), ne fournisse plus que V' variations ; de sorte que le nombre des variations *perdues* dans les valeurs successives des fonctions de la suite (2) soit égal au nombre $v-V'$ des racines réelles positives de l'équation (1). Le principe du n° 204 fera connaître combien il y aura de racines réelles entre deux quelconques des valeurs consécutives $\alpha, \alpha+1$, données à x.

Quand α et $\alpha+1$ ne comprendront qu'une seule racine de l'équation (1), le procédé du n° 170, fournira la valeur de cette racine avec une approximation donnée.

Quand α et $\alpha+1$ comprendront P racines, $a, b, c, \ldots$, de l'équation (1), la partie entière, commune à ces racines, étant α, il suffira de calculer leur partie décimale.

Pour obtenir le chiffre des dixièmes, on pourrait donner successivement à x, dans la suite (2), les valeurs α, $\alpha+0,1$, $\alpha+0,2, \ldots$, jusqu'à ce que le nombre des variations corres-

pondantes perdues dans (2) soit égal au nombre P des racines comprises entre α et $\alpha+1$. Mais on peut simplifier ces calculs en diminuant d'abord les racines, a, b, c, ..., de leur partie entière α; à cet effet, on pose $x-\alpha=y$ (n° 129); d'où $x=\alpha+y$; la substitution de cette valeur de x dans (2) détermine des fonctions correspondantes

$$(3)\ldots\varphi(y),\ \varphi'(y),\ Y_2,\ Y_3,\ldots,\ Y_{k-1},\ X_k,\ (*)$$

On trouve le chiffre des dixièmes de chaque racine comprise entre α et $\alpha+1$, en donnant successivement à y, dans (3), les valeurs, 0, $0,1$, $0,2$, $0,3$, ..., jusqu'à ce que la suite (3) perde P variations; car, d'après la relation $x=\alpha+y$, les résultats de ces substitutions sont les mêmes que ceux que l'on déduirait des fonctions (2) en donnant successivement à x les valeurs, α, $\alpha+0,1$, $\alpha+0,2$, etc. On obtiendra de cette manière les P racines, a, b, c, ..., à moins d'un dixième d'unité; et le principe du n° 204 fera connaître le nombre des racines comprises entre deux substitutions consécutives qui différeront entre elles d'un dixième d'unité.

On opérera d'une manière analogue, pour trouver les racines, a, b, c, ..., à moins d'un centième d'unité. Supposons que deux nombres ζ, γ, qui diffèrent d'un centième, comprennent N racines; on donnera successivement à y, dans (3), les valeurs ζ, $\zeta+0,1$, $\zeta+0,2$, ..., jusqu'à ce que la suite (3) perde N variations. On connaîtra ainsi le chiffre des centièmes de toutes les racines comprises entre ζ et γ, et l'on saura combien deux substitutions consécutives comprennent de racines. Et ainsi de suite.

Pour calculer les racines négatives, il suffit de changer x en $-x$ dans $f(x)=0$, et de chercher les racines positives de la transformée $f(-x)=0$.

Exemple. *Soit* $f(x)=x^3-7x+7$.

On a, $\qquad f'(x)=3x^2-7$.

(*) Au lieu de faire $x=\alpha+y$ dans $f'(x)$, pour obtenir $\varphi'(y)$, il est plus simple de prendre la dérivée de $\varphi(y)$.

On divise $3(x^3 - 7x + 7)$ par $3x^2 - 7$; le reste $-14x+21$ admet le facteur 7; on supprime ce facteur; ce qui fournit le reste simplifié $-X_1 = -2x + 3$; d'où $X_1 = 2x - 3$. On divise $2(3x^2 - 7)$ par $2x - 3$; cela donne le 1er terme $3x$ du quotient et le reste partiel $9x - 14$; on divise $2(9x - 14)$ par $2x - 3$, cela fournit le reste -1 indépendant de x. Ce reste n'étant pas nul, l'équation $f(x) = 0$ n'a que des racines inégales (n° 173). La suite (2) se réduit donc ici à

(4).. $f(x) = x^3 - 7x + 7$, $f'(x) = 3x^2 - 7$, $X_1 = 2x - 3$, $X_2 = +1$.

On fait successivement $x = 0$ et $x = \infty$, dans ces fonctions; les signes correspondans de ces fonctions sont

$+ - - +$; 2 *variations*
$+ + + +$; 0 *variations*.

La suite (4) ayant perdu deux variations, l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$ a deux racines réelles positives (n° 210).

Pour séparer ces racines, on donnera successivement à x, dans la suite (4), les valeurs, 0, 1, 2, ..., jusqu'à ce qu'elle perde deux variations; et en écrivant les signes des résultats, on verra que

$x = 0$ donne $+ - - +$; 2 *variations*
$x = 1$ donne $+ - - +$; 2 *variations*
$x = 2$ donne $+ + + +$; 0 *variations*.

Les deux racines positives sont donc comprises entre 1 et 2.

Pour calculer ces racines à moins d'un dixième d'unité, on fera $x - 1 = y$, d'où $x = 1 + y$. Cette valeur de x, substituée dans (4), fournira les fonctions correspondantes

(5)... $\varphi(y) = y^3 + 3y^2 - 4y + 1$, $\varphi'(y) = 3y^2 + 6y - 4$, $Y_1 = 2y - 1$, $X_2 = +1$.

On donnera successivement à y les valeurs 0, 0,1, 0,2, 0,3..., jusqu'à ce que la suite (5) perde deux variations; on verra que le nombre des variations reste le même jusqu'à $y = 0,3$, et que

$y = 0,3$ donne $+ - - +$; 2 *variations*
$y = 0,4$ donne $- - - +$; *une variation*
$y = 0,5$ donne $- - 0 +$; *une variation*
$y = 0,6$ donne $- + + +$; *une variation*
$y = 0,7$ donne $+ + + +$; 0 *variations*.

La suite (5) perd donc une 1re variation de $y = 0{,}3$ $y = 0{,}4$, et une 2e variation de $y = 0{,}6$ à $y = 0{,}7$. Par conséquent, l'une des racines de $\varphi(y) = 0$ est comprise entre 0,3 et 0,4, tandis que l'autre tombe entre 0,6 et 0,7. L'une des racines positives de $f(x) = 0$ est donc comprise entre les nombres 1,3, 1,4, et l'autre entre 1,6 et 1,7; les valeurs de ces racines, à moins d'un dixième d'unité, sont donc 1,3 et 1,6. Ce qui s'accorde avec les résultats obtenus (*page* 184).

Si l'on veut calculer le chiffre des centièmes de la racine comprise entre 1,3 et 1,4, on donnera successivement à y les valeurs 0,30, 0,31, 0,32,..., jusqu'à ce que la suite (5) perde une variation; on trouvera que cette variation se perd de $y = 0{,}35$ à $y = 0{,}36$; de sorte que le chiffre des centièmes est 5. La racine comprise entre 1,3 et 1,4 est donc 1,35 à moins d'un centième d'unité.

En continuant ces calculs, on trouvera que les deux racines positives de l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$, sont 1,356 etc., et 1,692 etc. On déduira du principe du n° 125 (4°) que la troisième racine est — 3,048 etc.

2e Cas. Lorsque le reste $-X_k$ indépendant de x est identiquement nul, l'équation (1)... $f(x) = 0$ a des racines égales. M. *Sturm* a étendu son théorème à ce dernier cas; *mais il est plus simple, dans la pratique, de recourir à la méthode du n° 174, pour faire dépendre la recherche des racines de l'équation* (1), *de la résolution de plusieurs équations d'un degré moindre qui n'ont que des racines inégales et dont les racines sont celles de la proposée.*

FIN DES NOTES SUR L'ALGÈBRE.

00051962

Digitized with financial assistance from
Shri Brihad Bhartiya Samaj
on 20 February, 2020